注意	1. 右の欄を正確に記入すること。 2. 所属を○で囲むこと。 3. 前記「1.2」を守らない答案は採点されないことがある。	試験日		所属	部	情報科学部				科目等履修生	学生番号	□□□ － □□□	
		座席番号	－		学科	IC	IS	IM	IN		フリガナ		組
					年次	1	2	3	4		氏名		

微分方程式 第2回中間テスト（Fセット） 解答例 ＜真貝＞

1

(1) 接線の傾きは $\frac{dy}{dx}$ で与えられるから

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

(2) 時間を t，感染者数を $x(t)$ とすると

$$\frac{dx}{dt} = k \quad (k：定数).$$

(3) 時間を t，位置を $x(t)$ とすると，加速度は $\frac{d^2x}{dt^2}$ であるから

$$\frac{d^2x}{dt^2} = k\cdot x. \quad (k：定数)$$

(4) $\Delta V = \frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \fallingdotseq 4\pi r^2 \Delta r$ より

球に対しては $\frac{\Delta V}{\Delta r} \fallingdotseq 4\pi r^2$

体積増加率が一定ならば $\frac{dV}{dt} = c$ 定数 $(t：時間)$

故に $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = c$ より

$$4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = c \quad \therefore \frac{dr}{dt} = \frac{c}{4\pi r^2}$$

2

(1) 特性方程式は

$\lambda^2+4=0$ より $\lambda = \pm 2i$

したがって求める一般解は

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x \quad \cdots\cdots ①$$

$(C_1, C_2：定数，以下同じ)$

(2) (1)の解に初期条件を代入して C_1, C_2 を決める。

$$y'(x) = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x \quad \cdots ②$$

①，②に $y(0)=5$，$y'(0)=2$ を代入して $C_1=5$，$C_2=1$

故に

$$y(x) = 5\cos 2x + \sin 2x$$

(3) $y''-2y'+10y=0$

特性方程式 $\lambda^2-2\lambda+10=0$ の解は

$\lambda = +1\pm 3i$.

故に

$$y(x) = e^{+x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$$

$(C_1, C_2：定数)$

(4) $y''-y' = 2e^x \quad \cdots ①$

• 右辺をゼロとした同次式 $y''-y'=0 \quad \cdots ②$

の一般解は，特性方程式 $\lambda^2-\lambda=0$ の解が

$\lambda = 0, 1$

であることから $y_1(x) = C_1 + C_2 e^x \quad \cdots ③$

• ①の特殊解として③と独立なものとして

$$\eta(x) = kx e^x$$

を仮定し，①に代入して，係数 k を求める。

$\eta'(x) = ke^x + kxe^x$

$\eta''(x) = 2ke^x + kxe^x$ より

① ⇔ $\eta''-\eta' = 2e^x$

$(2k+\cancel{kx})e^x - (k+\cancel{kx})e^x = 2e^x$

$\therefore k=2$. 故に $\eta(x) = 2xe^x$

• 以上より ①の一般解は

$$y(x) = C_1 + C_2 e^x + 2xe^x$$

(5) 右辺をゼロとした同次式の一般解は(1)で求めた。

特殊解として

$\eta(x) = k\cos x + l\sin x$

を仮定し，与式に代入すると，$\eta''(x) = -\eta(x)$ より

与式 ⇔ $+8(k\cos x + l\sin x) = 24\sin x$

$\therefore k=0,\ l=3$ と決まる。故に

$$y(x) = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + 3\sin x$$

所属	科	年・科目等履修生	学生番号	□□□－□□□	氏名	

注意	1. 右の欄を正確に記入すること。 2. 所属を○で囲むこと。 3. 前記「1.2」を守らない答案は採点されないことがある。	試験日		所属	部	情報科学部				科目等履修生	学生番号	□□□ － □□□	
		座席番号	－		学科	IC(IJ)	IS	IM	IN		フリガナ		組
					年次	1	2	3	4		氏名		

3

2階の同次線形微分方程式の一般解は，2個の1次独立な基本解の線形結合で表される。これは，2次元空間が2個の1次独立なベクトルの線形結合で表されることと同様である。

4

解くべき微分方程式は

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V_0\sin\omega t \quad \cdots ①$$

である。

Step1 右辺をゼロとした同次式

$$RQ' + \frac{1}{C}Q = 0$$

の一般解 $Q(t)$ は，変数分離法により

$$\int\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}\int dt$$

$$\therefore \log|Q| = -\frac{1}{RC}t + C_1$$

$$\therefore Q = C_2 e^{-\frac{1}{RC}t} \quad \cdots ②$$

Step2 ①の特殊解として

$$\eta(t) = k\cos\omega t + l\sin\omega t \quad \cdots ③$$

を仮定し，①に代入して k, l を求める。

$$R(-\omega k\sin\omega t + \omega l\cos\omega t) + \frac{1}{C}(k\cos\omega t + l\sin\omega t) = V_0\sin\omega t$$

$$\therefore \begin{cases} -\omega Rk + \frac{1}{C}l = V_0 \\ \frac{1}{C}k + \omega Rl = 0 \end{cases} \quad より$$

$$k = \frac{\omega RC^2V_0}{1+\omega^2R^2C^2}, \quad l = \frac{CV_0}{1+\omega^2R^2C^2}$$

Step3 以上より求める一般解は

$$Q(t) = ②+③$$
$$= C_2 e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{CV_0}{1+\omega^2R^2C^2}(\omega RC\cos\omega t + \sin\omega t)$$

第1項は $t\to\infty$ で減衰するので

入力項の振動数 ω で振動する電荷になる。

5

与式は $\frac{d}{dt} = '$ として

$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

となっている。

(1) $x''+4x'+5x=0 \quad \cdots ①$

を解く。特性方程式は

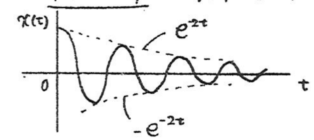
$\lambda^2+4\lambda+5=0$.

この解は $\lambda = -2\pm i$.

したがって①の解は $C_1, C_2：定数$

$$x(t) = e^{-2t}(C_1\cos t + C_2\sin t).$$

これは減衰振動を表す解である。



(2) 解く式は

$$x''+4x'+5x = \sin 2t$$

となる。右辺をゼロとした同次式の解は(1)と同じで減衰振動解。右辺は振動数の異なる外力を加えているため，運動はやがて外力の振動数に支配される強制振動となる。

(3) 解く式は

$$x''+4x = \sin 2t \quad \cdots ②$$

となる。右辺をゼロとした同次式 $x''+4x=0$ の解は

$$x(t) = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t \quad \cdots ③$$

の単振動解となる。特殊解は③と独立な解として

$$\eta(t) = kt\cos 2t + lt\sin 2t$$

の形になる。これは時間と共に振幅が大きくなる破壊的な振動になる。

所属	科	年・科目等履修生	学生番号	□□□－□□□	氏名	