第0章　準備

0.1　データ処理の基本

0.2　集合

問題 0.1 1つのサイコロを振って出る目を考える．全体集合を

$$\Omega = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$$

とし，その部分集合

$\mathbf{A} = \{⚀, ⚁, ⚂\}$，$\mathbf{B} = \{⚁, ⚃, ⚅\}$，$\mathbf{C} = \{⚂, ⚃\}$

について，次の集合を求めよ．

(1) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$　(2) $\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}}$

(3) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$　(4) $(\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}) \cap \overline{\mathbf{C}}$

(5) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \cap \overline{\mathbf{B}}$　(6) $(\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}}) \cap \mathbf{C}$

0.3　指数関数・対数関数

0.4　数列・級数

0.5　微分法

0.6　積分法

0.7　ベクトル・行列

第1章　確率

1.1　順列・組み合わせと数え上げ

1.1.1　数え上げ

例題 1.1 1列に並んだ4枚の板を青か赤に塗る．青は連続してもよいが，赤は連続してはいけない．塗り方は何通りあるか．

例題 1.2 **(約数の数)** 次の数の正の約数はいくつあるか．

(1) 60　(2) 600　(3) 6000

例題 1.3 同じジュース9缶を3人の学生に分ける．学生に区別を付けないとき，何通りの分け方があるか．

(1) どの学生も少なくとも1缶はもらう場合．

(2) 1缶ももらわない学生がいてもよい場合．

1.1.2　順列

例題 1.4 **(辞書的配列)** 5個の文字 `a,b,c,d,e` をすべて用いてできる120個の順列を辞書式に `abcde` から `edcba` まで並べる．`cdaeb` は何番めか．

例題 1.5 7人が並ぶ．次の並び方は何通りあるか．

(1) 7人が一列に並ぶとき．

(2) 7人のうち5人が一列に並ぶとき．

(3) 7人が一列に並び，そのうち特定の2人が隣り合うとき．

例題 1.6 **(展開係数)** $(a+b+c)^6$ を展開したときの a^3bc^2 の係数はいくつか．

例題 1.7 東西に $n+1$ 本，南北に $m+1$ 本の碁盤の目の道路からなる町がある．北西の端から，南東の端までの最短経路は，何通りあるか．

例題 1.8 **(モールス信号)** モールス信号は，長符号 — と短符号 · の組み合わせで文字を表現する．アルファベット26文字と数字10文字，および記号15個を作るとき，最低いくつの符号を用いればよいか．

1.1.3　組み合わせ

問題 1.9 ${}_n\mathrm{C}_{r-1} + {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n+1}\mathrm{C}_r$ を示せ．

例題 1.10 同じジュース 9 缶を 3 人の学生に分ける．学生に区別を付けるとき，何通りの分け方があるか．

(1) どの学生も少なくとも 1 缶はもらう場合．

(2) 1 缶ももらわない学生がいてもよい場合．

問題 1.11 10 個のリンゴを 4 つの皿に盛る．何通りの分け方があるか．

(1) 少なくとも 1 つは皿に載せる場合．

(2) 1 つもない皿があっても良い場合．

例題 1.12 （展開係数）$(a+b+c)^6$ を展開したときに，異なる項はいくつ出現するか．

1.1.4　2 項定理

1.2　確率

1.2.1　確率の定義

問題 1.13 次の文章の真偽を確かめよ．

(1) サイコロを振ったとき，事象は「⚀ の目が出る」か「1 の目が出ない」に分けられるから，「⚀ の目が出る確率は 1/2 である」．

(2) コインを 2 個投げたとき，それぞれ表か裏が出るが，「2 枚とも表」となるのは，全事象が $\mathbf{S} = \{$ 表と表, 表と裏, 裏と裏 $\}$ の 3 つであるから 1/3 の確率である．

例題 1.14 （じゃんけん）N 人でじゃんけんをしたとき，1 回で 1 人が勝つ確率を求めよ．

例題 1.15 （丁か半か）サイコロを 2 つ投げて，「丁（偶数）か半（奇数）か」と威勢良く賭博するシーンが時代劇に見られる．

(1) 賭けているのは，サイコロの 2 つの目の積か，それとも和か．

(2) 2 つの目の和が 7 となるのと 8 となるのはどちらが多いか．

問題 1.16 3 つのサイコロを同時に投げたとき，出た目の和が 10 となる確率を求めよ．

例題 1.17 （くじ引きの順番）5 本のくじがあり，2 本が当たりである．5 人が順にくじを引くとき，何番目にくじを引くのが最も有利か．

例題 1.18 A, B, C の 3 人が，この順に繰り返して 1 枚の硬貨を投げ，最初に表が出た人を勝ちとする．A, B, C それぞれが勝つ確率 $P_{\mathrm{A}}, P_{\mathrm{B}}, P_{\mathrm{C}}$ を求めよ．

問題 1.19 例題 1.18 で，A, B, C が順に 1/3 の確率で当たるくじを引き，最初に当たりが出た人を勝ちとする場合はどうか．

例題 1.20 （ド・メレの問題）2 つの賭けがある．

(A) 1 つのサイコロを 4 回投げて，少なくとも 1 回 ⚅ の目が出れば勝ち．

(B) 2 つのサイコロを 24 回投げて，少なくとも 1 回 ⚅⚅ のゾロ目が出れば勝ち．

貴族ド・メレは，次のように考えた．

(A) ⚅ の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ なので，4 回投げれば 4 倍して $\dfrac{2}{3}$.

(B) ⚅ のゾロ目が出る確率は $\dfrac{1}{36}$. 24 回投げれば 24 倍して $\dfrac{2}{3}$.

したがって，どちらも同じと考えた．しかし実際には，(A) では勝つことが多かったが，(B) では負けてしまうことが多かった．どう考えれば正しいか．

問題 1.21 大学受験の模擬試験で，合格可能性 50%と判定された大学が 5 校ある．5 校すべてを受験するとき，少なくとも 1 校に合格する確率はいくらか．

問題 1.22 10 枚のうち 1 枚の割合で当たる福引券がある．この福引券を何枚持つと，少なくとも 1 枚当たる確率が 90%以上になるか．

例題 1.23 （誕生日が同じ人がいる確率）1 クラスに N 人の学生がいる．誕生日が同じ学生がいる確率はどれだけか．N を横軸にして，確率をグラフにせよ．

例題 1.24 （ビュフォンの針）平行線が $2d$ の間隔で無数に引かれている平面に，長さ 2ℓ（ただし $\ell < d$）の針を何回も無作為に落とすとき，この針が平行線と交わる確率 p を実験することによって，円周率 π を求めることができる．この理由を説明せよ．

1.2.2　期待値

例題 1.25 力の互角な A, B 2 チームが，先に 4 勝した方を勝者とするとき，平均して何試合で勝敗が決まるか．引き分けはないものとする．

例題 1.26 （ド・メレの問題） A と B の 2 人が互角の力量をもつ勝負をして，3 回先に勝った方が賭け金 64 ピストル（ピストルは当時のフランスの金貨の単位）を取る約束をした．A が 2 回連勝したところで用事により勝負を中止したので，賭け金の分配に困った．勝負に引き分けはないものとして，この時点で，賭け金をいくらに分配したらよいか．

問題 1.27 例題 1.26 で，次の場合は賭け金をいくらに分配したらよいか．

(1) A が 2 勝 1 敗で中止した場合．

(2) A が 1 勝 0 敗で中止した場合．

例題 1.28 （一人っ子政策） ある国で，男の子の一人っ子政策が考案された．どの家も男の子が生まれるまで子供を産み続け，男の子が生まれたら，もう子供はつくらない．男女の誕生比が 1/2 だとして，この国の男の子と女の子の人口比はどうなるか．

問題 1.29 （じゃんけんの勝負数） A と B の 2 人がじゃんけんをする．平均して何回で勝負がつくか．

1.3　条件つき確率・Bayes の定理

1.3.1　条件つき確率

例題 1.30 ホテルに 3 部屋あり，それぞれに男 2 人，男と女，女 2 人が宿泊している．ボーイがドアをノックしたところ，女の声で「誰か来たから開けて」と聞こえた．このとき，ドアを開けるのが男である確率はいくらか．

例題 1.31 （不良品製造元の判定） 同種の部品があり，A 社と B 社が 60%, 40%の比で販売シェアを持っている．しかし，A 社製では 3%，B 社製では 4%の不合格品が発生する．いま，不合格品が発見されたとき，それが A 社製である確率を求めよ．

例題 1.32 （HIV 検査薬） ある HIV 検査薬は，本来「陰性」なのに「陽性」と誤判定する確率が 1%あり，その逆の判定はない．「HIV に感染している」という事象を A,「陽性の判定を受ける」と事象を B とする．

(1) $P(\mathrm{B}|\mathrm{A})$ と $P(\mathrm{B}|\overline{\mathrm{A}})$ を示せ．

(2) 日本人 1 億人のうち，HIV 感染者が 10 万人，すなわち $P(\mathrm{A}) = 0.001$ とする．この検査薬で「陽性」と判定されたとき，実際に「HIV に感染している」となる有効判定の確率を求めよ．

(3) この HIV 検査薬は信頼できるだろうか，考えを述べよ．

例題 1.33 （傘を忘れたとき） 酒が入ると 5 回に 1 回の割合で傘を忘れる K 君が，A, B, C 3 軒の飲み屋をはしごして，傘を忘れたことに気がついた．傘がある確率がもっとも高い店はどこか．

問題 1.34 0 と 1 の信号をそれぞれ確率 0.6, 0.4 で送る装置がある．送信信号が 0 であると，受信側で正しく 0 と受け取る確率が 0.8，誤って 1 と受け取る確率が 0.2 である．また，送信信号が 1 であると，受信側で正しく 1 と受け取る確率が 0.9，誤って 0 と受け取る確率が 0.1 である．「0 と受信したとき，送信信号が実際に 0 である確率」を求めよ．

例題 1.35 （サーベロニの問題） A,B,C の 3 人の囚人のうち，2 人が処刑され 1 人は釈放されることになっているが，A にはそれが誰かは知らされていない．A は看守に

「B か C のどちらかは確実に処刑されるのだから，あなたが B か C のどちらが処刑されるかを私に教えてくれても，私自身のことについては何も教えないことになる」

と言った．その看守は，この論法を正しいと認めて「B が処刑される」と答えた．その看守が答える前は，

$$\text{A が処刑される確率は } \frac{2}{3}$$

であったが，答えを聞いた後では，処刑される可能性がある者は彼自身と C の 2 人しかいないことになるので，

$$\text{A が処刑される確率は } \frac{1}{2}$$

となるから，A は以前より幸福であると感じた．A が幸福と感じるのは正しいといえるか．

例題 1.36 ある事件の逃走犯を目撃した証人 A と B は「犯人はネクタイをしていた」と述べ，証人 C は「ネクタイをしていなかった」述べた．証人 A, B, C が真実を語る確率がそれぞれ 70%，80%，90%であるとき，犯人がネクタイをしていた可能性を求めよ．ただし，実際に犯人がネクタイを着用していたかいないかの確率は等しいものとする．

問題 1.37 （ポリヤの壺） 壷の中に r 個の赤球と b 個の黒球が入っている．この中から 1 個取り出して色を見た後に，取り出した球をもとに戻すと共に同色の球を c 個入れる．これを繰り返すとき，k 番目に赤球が出る確率を R_k，黒球が出る確率を B_k とする．次の確率を求めよ．

(1) $P(R_2|R_1)$, $P(R_2|B_1)$

(2) $P(R_2)$, $P(B_2)$

(3) $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$

(4) n 回目に赤球が取り出される確率が $P(R_n) = \dfrac{r}{r+b}$ であることを数学的帰納法によって示せ．

問題 1.38 （モンティ・ホール問題）A,B,C の 3 つの扉があり，そのうちの 1 つのドアの後ろにある豪華商品を当てるテレビ番組のコーナーがある．司会者のモンティ・ホールだけが正解の扉を知っている．挑戦者が A の扉を選んだ．すると，司会者は残された扉のうちから B を開け，それが外れであることを挑戦者に見せ，次のように言った．
「はじめに選んだ A の扉のままでもよいが，ここで C の扉に変更してもよいですよ」
さて，挑戦者は扉を A とするのがよいか，C とするのがよいか．

1.3.2　Bayes の定理

例題 1.39 箱に子犬が 4 匹いて，オスとメスの割合はわからない．1 匹とりだすとオスだった．オスが全部で 3 匹いる確率はいくらか．

例題 1.40 （迷惑メールのフィルタリング）電子メール 6 通に対し，ユーザが迷惑メールかそうでないかの判定をした．メール中に特定の（独立に出現する）単語 A と B が含まれている (○) か含まれていないか (×) の判定表がある．

メール	単語 A	単語 B	判定
1	○	×	迷惑
2	○	○	迷惑
3	×	×	迷惑
4	○	×	通常
5	×	○	通常
6	×	○	通常

このデータをもとに，迷惑メールの判別ソフトを作成したい．

(1) 迷惑メールに単語 A が含まれる確率を求めよ．

(2) 通常メールに単語 A が含まれる確率を求めよ．

(3) あるメールが単語 A を含むと分かったとき（単語 B に関しては不明）そのメールが迷惑メールである事後確率と通常メールである事後確率を比較せよ．

(4) あるメールが単語 A は含むが単語 B は含まないと分かったとき，そのメールが迷惑メールである事後確率を求めよ．

第 1 章 章末問題

$\boxed{1.1}$ （三角形を移動する問題）三角形 ABC の頂点 A から出発し，硬貨を投げて表が出れば右回りに，裏が出れば左回りに，頂点を 1 つずつ回る．n 回投げたとき，A にいる確率 P_n を求めよ．

$\boxed{1.2}$ （火事になる確率）3 軒の家が 1 列に並んでいる．1 年間に 1 軒の家から出火する確率は p であり，隣の家から延焼する確率が q であるとする．それぞれの家は独立に出火するものとし，飛び火することはないとして，端の家と中央の家がそれぞれ火事になる確率を求めよ．

$\boxed{1.3}$ （魔法使い探知機）学生数 1 万人の某大学には魔法使いが 1 人いた．魔法使い探知機があるが，誤判定率は 10%である．つまり，人間であっても魔法使いと判定する率が 10%あり，その逆の判定も 10%である．

(1) 1 人を調べたとき，探知機が「魔法使い」と判定する確率．

(2) 探知機が「魔法使い」と判定を下したとき，実際にその人が魔法使いである確率．

$\boxed{1.4}$ （お見合い戦略）n 人とお見合いをする．相手には自分に合う 1 位から n 位までの順位がついている．順に 1 人づつと出会い，結婚するかどうかの判断を下す．（当然ながら一度相手を決めたらそこで終わりであり，一度見送ったらその相手とは再び出会えない）．最後の 1 人になった場合は，その相手と結婚することになる．次の戦略を考えた．

- 最初の a 人はすべて断る．
- $a+1$ 人目からは，それまでよりも良い人が現れたら結婚する．

第 1 位の人を選ぶ確率を高くするためには，a をどう決めたらよいか．

$\boxed{1.5}$ 上記の $\boxed{1.4}$ のお見合い戦略をプログラムを組むことによってシミュレーションせよ．順位の期待値はいくらになるかを計算せよ．

第 2 章　確率分布

2.1　確率変数と確率分布

2.1.1　確率変数

2.1.2　離散確率分布・連続確率分布

2.1.3　累積分布関数

2.1.4　一様分布

問題 2.1 確率密度分布が，$x = [0, x_0]$ で定義される「上に凸の 2 次関数」であるとする．

(1) 確率密度関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) 累積分布関数 $F(x)$ を求めよ．

2.1.5　$\boxed{\text{ガイド}}$ いろいろな確率分布

2.2　確率分布を特徴づける量（1）：1 次元の確率変数

例題 2.2 次の 2 つの一様分布について，平均値を求めよ．

(1) 離散一様分布のとき

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

(2) 連続一様分布のとき．密度関数 $f(x)$ は次式とする．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & (a \le x \le b) \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

2.2.1　分散・標準偏差

問題 2.3 連続型分布について次式を示せ．

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

例題 2.4 例題 2.2 で扱った離散一様分布と連続一様分布について，分散を求めよ．

例題 2.5 **（期待値・分散の合成公式）** 次の式が成り立つことを示せ．a, b を定数とする．

$$\begin{aligned} E[aX + b] &= a\,E[X] + b \\ V[aX + b] &= a^2\,V[X] \end{aligned}$$

例題 2.6 期待値が $\mu = E[X]$，分散が $\sigma^2 = V[X]$ である確率変数 X があるとする．

(1) $Z = \dfrac{X-a}{b}$ で定義された確率変数 Z の平均値と分散を求めよ．ただし，a, b は定数として，$b \neq 0$ とする．

(2) さらに，$a = \mu$, $b = \sigma$ とすると，Z の平均値と分散はどうなるか．

例題 2.7 サイコロを 2 回振るとき，1 回目に出る目を X_1，2 回目に出る目を X_2 とする．$X_1 + X_2$ を 5 で割るときのあまりを Y として，

(1) Y の分布表を作れ．

(2) $E[Y], V[Y]$ を求めよ．

例題 2.8 **（電車の待ち時間）** 毎時 0 分と 40 分に発車する電車がある．このことを知らずに T さんが駅に行くとき，彼女の平均待ち時間を求めよ．駅に到着する確率は，各分 1/60 であるとせよ．

例題 2.9 **（バスの待ち時間）** あるバス停では，到着するバスの間隔（t 分）が

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{3}{500} t\,(10 - t) & (0 \le t \le 10) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

の確率密度関数で与えられる．

(1) $0 \le t \le 10$ での累積分布関数を求めよ．

(2) 1 分以内に次のバスが来る確率はいくらか．

(3) バスの平均間隔を求めよ．

例題 2.10 次の確率密度関数をもつ確率変数 X の平均値と分散を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x^2} & (x > 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$$

2.2.2　積率（モーメント）

2.2.3　歪度・尖度

2.3　確率分布を特徴づける量（２）：多次元の確率変数

2.3.1　同時確率分布，周辺確率分布

2.3.2　共分散，相関係数

例題 2.11 次式を示せ.

$$\begin{aligned} E[X+Y] &= E[X]+E[Y] \\ V[X+Y] &= V[X]+V[Y]+2\,\mathrm{Cov}[X,Y] \end{aligned}$$

問題 2.12 次式を示せ.

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = E[XY] - E[X]\,E[Y]$$

2.3.3　確率変数の独立性

例題 2.13 1 組 52 枚のトランプから 1 枚のカードを引いたとき，

$$X = \begin{cases} 0 & (\text{ダイヤ}) \\ 1 & (\text{else}) \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 0 & (\text{絵札}) \\ 1 & (\text{else}) \end{cases}$$

とするとき，確率変数 X, Y は独立か.

2.4　確率分布を特徴づける量（３）：母関数・特性関数

2.4.1　確率母関数

例題 2.14 2 項分布 $B(n,p)$ に対する確率母関数 $G(z)$ を求め，2 項分布の平均値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ を求めよ.

問題 2.15 確率変数 X_1, X_2 が互いに独立で，それぞれの取りうる値が非負の整数値であるとする．これらの和である $S = X_1 + X_2$ の分布を考えると，X_i の確率母関数を $G_i(z)$，S の確率母関数を $G_S(z)$ とすれば，

$$G_S(z) = G_1(z)\,G_2(z)$$

が成り立つことを示せ.

2.4.2　積率母関数

例題 2.16（２項分布の積率母関数）2 項分布 $B(n,p)$ に対する積率母関数 $M(t)$ を求め，2 項分布の平均値と分散を求めよ.

例題 2.17（正規分布の積率母関数）正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に対する積率母関数 $M(t)$ を求め，正規分布の平均値と分散を求めよ.

2.4.3　特性関数

2.5　離散型確率分布

2.5.1　２項確率，Bernoulli 試行

例題 2.18 サイコロを 10 回振るとき，⚀ の目が 8 回出る確率を求めよ.

問題 2.19 サイコロを 10 回振るとき，⚀の目が 5 回以上出る確率.

例題 2.20（無作為に答えたマークシート）あるマークシート形式の問題には 5 つの答の選択肢があり，正答は 1 つである．問題が難しかったので，10 人の受験生全員が無作為に答えた．このとき，正解者が少なくとも 2 人いる確率を求めよ.

2.5.2　Bernoulli 分布

例題 2.21 Bernoulli 分布の平均 $E[X]$，分散 $V[X]$ を求めよ.

2.5.3　２項分布

例題 2.22 日本人の血液型は 10 人に 3 人の割合で O 型である．100 人の日本人を任意に選んだとき，そのうちの O 型の人数を X とする．X の平均値と標準偏差を求めよ.

例題 2.23（酔歩問題）ある酔っぱらいが，1 歩進むごとに，右か左へそれぞれ 1/2 の確率でよろけながら進んでいる．10 歩進んだとき，右または左へ何歩分よろけているか.

2.5.4 Poisson 分布

例題 2.24 50 人いるクラスの中で，誕生日が 1 月 1 日の人の人数 $k=0,1,\cdots,4$ 人の確率を，(a) 2 項分布にしたがうとする場合，(b) Poisson 分布にしたがうとする場合のそれぞれについて求めよ．

例題 2.25 ある製品の生産ラインの不良品発生率は 0.03 である．このラインで生産された製品からランダムに 100 個を取り出すとき，不良品が 3 個以上ある確率はいくらか．

(1) 2 項分布にしたがうとして求めよ．

(2) Poisson 分布にしたがうとして求めよ．

例題 2.26 あるスーパーコンピュータは，8 万台の CPU を持つシステムである．1 つの CPU の故障頻度は 10 年に 1 度の割合（1 時間あたりの故障率 $p=1/(10\times 365\times 24)$）である．システム全体では，1 時間あたり，故障頻度はどのくらいか．

問題 2.27
Poisson 分布は，ロシアの統計学者 Bortkiewicz によって再発見された．彼は馬に蹴られて死亡するプロシア軍の兵士の数を 20 年間にわたって調べ，そのデータが Poisson 分布と一致することを発表した (1898 年)．下のデータは，1 年あたり 1 師団ごとにその死亡者数をまとめたものである．このデータの標本平均値が 0.61 であることから，Po(0.61) で近似せよ．（電卓使用可）

死亡者数	師団数
0	109
1	65
2	22
3	3
4	1
5 以上	0

2.5.5 幾何分布

問題 2.28 幾何分布の積率母関数が $M(t)=\dfrac{p}{1-qe^t}$ であることを示し，これを用いて $E[X],V[X]$ を求めよ．

例題 2.29 ⚀ の目が出るまで 1 つのサイコロを投げ続ける．

(1) 初めて ⚀ の目が出るのは，平均して何回目か．

(2) 15 回以上投げる確率を求めよ．

2.5.6 Pascal 分布

2.5.7 負の 2 項分布

2.5.8 超幾何分布

2.6 連続型確率分布

2.6.1 正規分布

2.6.2 標準正規分布

2.6.3 標準正規分布表

例題 2.30 （偏差値）テストの採点結果，平均点 μ が 70 点，標準偏差 σ が 15 点となった．人数分布が正規分布にしたがうとして，偏差値（平均値を 50，標準偏差を 10 とするデータの標準化）を計算する．

(1) 80 点，90 点，100 点の人の偏差値はそれぞれいくらか．

(2) 上位 10%の人の成績を A とするとき，何点以上が A となるか．

(3) 50 点未満の人を不合格とするとき，不合格者は全体の何%か．

問題 2.31 （知能指数）知能指数（平均値を 100，標準偏差を 15 とするデータの標準化）について答えよ．

(1) 知能指数が 125 の人がいる．偏差値相当ではいくつか．

(2) 1 万人のうち，知能指数が 150 以上の人はおよそ何人いると考えられるか．

(3) 世界に知能指数 200 以上の人は何人いると考えられるか．

問題 2.32 （成績の 5 段階評価）学校教育現場では，成績を 5 段階評価することがしばしばある．試験成績が平均 μ 点，標準偏差 σ 点であるとき，下の表のように 5 段階評価を行った．空欄を埋めよ．

評価	素点	偏差値	人数比
5	$\mu+1.5\sigma$ 以上		
4	$\mu+0.5\sigma$ から $\mu+1.5\sigma$		
3	$\mu-0.5\sigma$ から $\mu+0.5\sigma$		
2	$\mu-1.5\sigma$ から $\mu-0.5\sigma$		
1	$\mu-1.5\sigma$ 以下		

2.6.4　多変量正規分布

2.6.5　対数正規分布

2.6.6　べき分布

2.6.7　指数分布

問題 2.33 指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ の平均は $1/\lambda$，分散は $1/\lambda^2$，標準偏差は $1/\lambda$ であることを示せ．

例題 2.34　（冷蔵庫の寿命）ある冷蔵庫の寿命 X は、平均が 10 年の指数分布に従っている。運悪く、5 年以内に壊れてしまう確率はいくらか。

2.6.8　Erlang 分布

例題 2.35 平均 λt の Poisson 分布にしたがって発生する事象がある．時刻 $t=0$ から始まって最初に事象が発生するまでの時間を T_1，$i-1$ 回目から i 回目の事象が発生するまでの時間を T_i とする．

(1) T_1 の分布が指数分布になることを確かめよ．

(2) $S_k = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$ とすると，S_k は k 回目の事象が発生する時刻である．S_k の分布が Erlang 分布になることを示せ．

例題 2.36 ある個人経営の歯医者では，待合室で診察を待つ患者の数は平均 5 人の幾何分布にしたがう．また，患者 1 人の診察時間は平均 12 分の指数分布にしたがう．新たに到着した患者の平均待ち時間はどれだけか．

第 2 章 章末問題

[2.1]　（平均値・分散）確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x & (-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

で与えられるとき，a を求め，この分布の平均値と分散を求めよ．

[2.2]　（オーバーブッキングの確率）ある航空路線では，予約客のうち平均 4%の客が予約を取り消す．そこで，97 人乗りの飛行機に対して，100 枚の予約券を発売した．予約券を持っているのに乗れない客が出る確率はどれだけか．

[2.3]　（**Banach** のマッチ箱の問題）ある人が左右のポケットにマッチ箱を入れていて，マッチが必要なとき，どちらかから適当に選んで 1 本取り出して使う．はじめに両方のマッチ箱に N 本入っていた．一方の箱が空になったとき，他方の箱に $0, 1, 2, \cdots, N$ 本のマッチが入っている確率を求めよ．

[2.4]　（不良品の個数）10 個の不良品を含む 50 個の製品の中から同時に 10 個取り出すとき，その中に含まれている不良品の個数の期待値を求めよ．

[2.5]　（どのくらい稀か）実験結果のデータ x が平均値 $\mu = 100$，分散 $\sigma^2 = 25$ の正規分布にしたがうとき，$x = 90, 80, 70$ のデータはどのくらい稀な現象か．

[2.6]　（通話時間）ある調査では，女性の電話での会話の長さを X 分とすると，X の確率密度関数は $f(x) = \dfrac{1}{5}e^{-x/5} \quad (x > 0)$ であるという．通話時間が 5 分以内である確率と，10 分以上である確率を求めよ．

[2.7]　（電話料金の期待値）ある公衆電話では，料金が「はじめの 3 分以内は a 円，3 分以上は 1 分ごとに b 円追加」となっている．1 分未満は切り上げになる．

(1) 利用者の通話時間 X が平均 $1/\lambda$ の指数分布にしたがうとき，料金 Y の平均値を求めよ．

(2) その電話の 1 日の通話数が，平均 μ の Poisson 分布にしたがうとき，料金の合計値 Z の平均値を求めよ．

[2.8]　（カード集め）あるスナック菓子には，n 種類のカードのうち 1 枚だけカードがランダムに入っている．全種類を集めるためには，スナック菓子を平均いくつ買わなければならないか．

[2.9]　2 項分布で表される確率分布をグラフ表示するプログラムを作成せよ．酔歩問題（例題 2.23）において，右向きに進む確率が $p = 0.6$ のとき，100 歩後の分布はどうなるか．

[2.10]　標準正規分布で，右側確率 $\phi(\alpha)$ を与えたときの $z = \alpha$ を求めるプログラムを作成せよ．世界の人口を 70 億人としたとき，世界最高の IQ はいくつになるか．

第 3 章　大数の法則と中心極限定理

3.1　大数の法則

3.1.1　Chebyshev の不等式

3.1.2　独立な確率変数の和

3.1.3　弱い大数の法則

3.2　中心極限定理

3.2.1　de Moivre-Laplace の定理

例題 3.1 サイコロを 500 回投げるとき，⚀ の目が 80 回以上 100 回以下の回数で出現する確率はいくらか．

問題 3.2 サイコロを 1000 回投げるとき，⚀ の目が 160 回以上 200 回以下の回数で出現する確率はいくらか．

3.2.2　中心極限定理

第 3 章 章末問題

$\boxed{3.1}$ **（エレベータの設計）** 10 人乗りのエレベータの設計を依頼された．成人 1 人の体重の平均値を $\mu = 58$kg，標準偏差を $\sigma = 6.0$kg とする．エレベータの乗客重量の想定は，4σ レベルで最大どれだけを考えればよいか．

$\boxed{3.2}$ **（下駄を投げる）** 下駄を投げて逆さに落ちる確率は p である．n 回投げて逆さに落ちる回数を k とするとき，k/n の値が $p \pm 0.1p$ 以内に収まる確率が 95% 以上になるためには，n は何回以上にすればよいか．

$\boxed{3.3}$ サイコロを投げて 6 つの目のどれかを出すプログラムを作成し，サイコロを投げる回数を増やすと，それぞれの出現が等確率に近づいていくかどうか確かめよ．

$\boxed{3.4}$ コラム 15 (p89) を参照して，一様乱数と正規乱数を発生させるプログラムでつくり，次を確かめよ．

(1) 一様乱数の出現頻度が一様分布に近づいていくかどうか．

(2) 正規乱数の出現頻度が正規分布に近づいていくかどうか．

第４章　標本分布・多変量解析

4.1　１変量のデータ処理

4.1.1　データの代表点を示す統計量

4.1.2　データの広がりを示す統計量

4.1.3　データ分布の形状を示す統計量

4.1.4　データ分布の高次の積率（モーメント）

4.1.5　データ個々の位置づけを示す量

例題 4.1 （親と子供の身長データ 1） 次のデータは，父親・母親とその成人した子供の身長データ (cm) である．

(1) 父親データの標本平均，標本分散，標準偏差を求めよ．

(2) 母親データの標本平均，標本分散，標準偏差を求めよ．

(3) 息子データの標本平均，標本分散，標準偏差を求めよ．

(4) 娘データの標本平均，標本分散，標準偏差を求めよ．

i	父親身長 x_i	母親身長 y_i	息子身長 z_i	娘の身長 w_i
1	171	150	163	154
2	174	149	168	153
3	172	151	169	153
4	172	156	162	158
5	170	153	172	155
6	173	153	174	158
7	173	160	175	165
8	176	155	168	163
9	178	160	175	165
10	175	162	172	164
11	170	160	178	162
12	181	155	172	162
13	183	156	185	160
14	171	154	173	163
15	173	159	166	162
16	175	150	167	160
17	170	160	173	163
18	169	161	170	164
19	175	152	178	159
20	165	155	168	160

4.2　多変量のデータ処理

4.2.1　散布図

4.2.2　平均，分散，共分散

4.2.3　相関

問題 4.2 積和記号について，次を示せ．

$$S_{xx} = \sum_i x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_i x_i\right)^2 \tag{4.2.1}$$

$$S_{xy} = \sum_i x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_j y_j\right) \tag{4.2.2}$$

例題 4.3 （親と子供の身長データ 2） 例題 4.1 の親と子供の身長データを用いて，父親・母親・息子・娘　のうちから 2 者を取り出し，相関係数をそれぞれ求めよ．

4.2.4　ガイド　多変量解析の概略

4.3　回帰分析

4.3.1　最小２乗法による回帰直線解析

4.3.2　重回帰分析

例題 4.4 （親と子供の身長データ 3） 例題 4.1 の親と子供の身長データを用いて，次を求めよ．

(1) 父親・母親・息子・娘　のうちから 2 者を取り出し，回帰直線を求めよ．

(2) 父親・母親の身長に対する息子の身長，および娘の身長について，重回帰分析をせよ．

4.4　主成分分析

4.4.1　２変量データの主成分分析

4.4.2　一般の場合の主成分分析

4.5　因子分析

4.5.1　因子分析の目的

4.5.2　相関係数行列と主因子法

4.5.3　回転の不定性と単純構造の構成

4.6　判別分析

4.6.1　判別関数

4.6.2　p 個の変量で 2 群に分けるときの判別分析

4.7　クラスター分析

4.7.1　分析例

4.7.2　データ間の距離の定義

4.7.3　クラスター間の距離の定義

4.8　標本がしたがう分布

4.8.1　χ^2 分布

問題 4.5 確率分布関数が，次式で与えられるとき，係数 C を定めよ．

$$f(x) = \begin{cases} C\,x^{(n/2)-1}e^{-x/2} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \tag{4.8.1}$$

ただし，ガンマ関数 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ を用いてよい．

4.8.2　t 分布

4.8.3　F 分布

第 4 章 章末問題

$\boxed{4.1}$ **(授業欠席日数とテスト得点)** アメリカの某州立大学で，講義の欠席回数と期末テスト得点を比較したデータがある．(2005 年，一般教養科目)

(1) 相関係数はいくらか．

(2) 最小 2 乗法により，回帰直線を求めよ．

(3) 散布図と回帰直線を図に描き，解釈を述べよ．

(4) 6 回欠席した学生が，もう 1 回欠席した方が良いと考えた．正しいか．

欠席回数 x	テスト点 y
0	89.2
1	86.4
2	83.5
3	81.1
4	78.2
5	73.9
6	64.3
7	71.8
8	65.5
9	66.2

$\boxed{4.2}$ **(主成分分析の計算例)** 3 変量があり，次の相関行列を得た．固有値・固有ベクトルを求め，2 番目までの主成分と累積寄与率を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{4.3}$ **(判別分析の計算例)** §4.7 のクラスター分析の例として挙げたデータを次のように 2 群に分けた．判別関数を求めよ．

グループ 1 (3 名)

学生 i	英語 x_1	数学 x_2
$\boxed{1}$	67	64
$\boxed{5}$	77	64
$\boxed{6}$	59	40

グループ 2 (6 名)

学生 i	英語 x_1	数学 x_2
$\boxed{2}$	43	76
$\boxed{3}$	45	72
$\boxed{4}$	28	92
$\boxed{7}$	28	76
$\boxed{8}$	28	60
$\boxed{10}$	47	80

$\boxed{4.4}$ §4.7　のクラスター分析の例として挙げたデータについて，データ間の距離を Mahalanobis の距離とした場合はどのような結果になるか．また，クラスター間の距離の定義に Ward 法を用いるとどのような結果になるか．

第5章　推定

5.1　統計的推測（推定）とは

5.2　点推定

5.2.1　推定値と推定量

5.2.2　推定量の良さの基準

例題 5.1 標本分散 S^2 は 不偏推定量ではなく，標本不偏分散 s^2 は不偏推定量であることを示せ．

5.2.3　推定量の見つけ方

例題 5.2 ある神社で 10 人がおみくじを引いたところ 8 人が吉だった．このおみくじで，吉の含まれていた確率 p を最尤法で推定せよ．

例題 5.3 母集団が正規分布（$N(\mu, \sigma^2)$）であり，分散が既知で σ^2 のとき，標本 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を用いて母平均を求める 最尤推定量 はどのような式か．

例題 5.4 母集団が正規分布であるが，母平均も母分散も未知のとき，標本 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を用いて母平均 μ と母分散 σ^2 を求める 最尤推定量 はどのような式か．

問題 5.5 （池にいる魚の数）ある池にいる魚の数 N を推定したい．m 匹の魚をとらえ，すべてに印をつけて再度放流した．後日，再び n 匹の魚をとらえたところ，k 匹の魚にマークがついていた．この確率は N を変数とすれば

$$f(N) = \frac{{}_m\mathrm{C}_k \times {}_{N-m}\mathrm{C}_{n-k}}{{}_N\mathrm{C}_n} \tag{5.2.1}$$

となる．これより，N を推定する式を最尤法を用いて求めよ．

5.2.4　母集団と点推定

5.3　区間推定

5.3.1　信頼度・信頼区間・危険率

5.3.2　正規母集団に対する母平均 μ の区間推定法

例題 5.6 ペットボトルでロケットを 5 回飛ばしたところ，飛距離が 40m, 38m, 55m, 51m, 48m だった．飛距離が正規母集団 $N(\mu, 10^2)$ にしたがうとして，平均値 μ を信頼度 95% で区間推定せよ．また，99% の信頼度ではどうか．

例題 5.7 例題 5.6 で，母分散 σ^2 が未知のときはどうか．

5.3.3　正規母集団に対する母分散 σ^2 の区間推定法

例題 5.8 ある列車の各車両の乗客数は，90, 105, 110, 95, 88 だった．通常のときの各車両の乗客数の分散 σ^2 を 95% の信頼区間として求めよ．

5.3.4　２項母集団に対する母比率 p の区間推定法

例題 5.9 ある選挙区で 100 人の有権者を無作為に調べたところ，A 党の支持者は 40 人いた．この地区での A 党の支持率を 95%と 99% の信頼度で推定せよ．

例題 5.10 （世論調査の人数）内閣支持率 p を精度 ±2% 以内で推定するためには，標本サイズ n は何人以上必要か．信頼度 95% で考えよ．

例題 5.11 （テレビ視聴率の精度）あるテレビ視聴率調査会社は，関東地区 1500 万世帯のうち，600 世帯にのみ調査機械を置いている．この会社の報告するテレビ視聴率は，何%の誤差を伴うか．信頼度 95% で考えよ．

5.3.5　相関係数 r の区間推定法

例題 5.12 ある学年の 40 人の学生について，英語と数学の成績の相関係数を算出したところ，$r = 0.6$ となった．この母集団の相関係数 ρ を 95%の信頼区間で求めよ．

第 5 章 章末問題

$\boxed{5.1}$ **（100 人に聞きました）**あるテレビ番組で，被験者 100 人にアンケートをした結果，60 人が「そのダイエットを試したことがある」と語った．母集団にこの値を適用すると，ダイエットを試したことがある人の確率はどのくらいといえるか．信頼係数を 95% として区間推定せよ．また，80 人がそのように答えた場合はどうか．

$\boxed{5.2}$ **（電子メール送信数）**1 日に何通電子メールを送信するか，という質問に対し，1600 名が回答した．その結果は，平均 12.3 通で，標準偏差は 24.5 だった．

(1) 分布の平均値から標準偏差の 1 倍左側の値は負になる．この事実はどう解釈したら良いか．

(2) この母集団に対する 1 日あたりの電子メールの送信数を 90%の信頼度で区間推定せよ．

$\boxed{5.3}$ **(有効推定量)** 正規母集団から大きさ n の標本をとり，標本平均 $\overline{X}$ を得た．このとき，Cramér-Rao の不等式 (5.2.3) で等号が成立することを示し，$\overline{X}$ が母平均 μ の有効推定量であることを述べよ．母分散 σ^2 は既知の量とする．

第 6 章　検定

6.1　仮説の検定

6.1.1　仮説検定の手順

6.1.2　検定に関する注意点

例題 6.1 あるサイコロを 60 回振ったところ，偶数の目が 40 回，奇数の目が 20 回出た．このサイコロが『いかさま』であると言えるか．有意水準 1% で検定せよ．

例題 6.2 A 君は毎日計算テストをしている．昨年の平均点 μ_0 は 60 点だった．今年に入ってから 25 回のテストがあり，平均点 μ_1 が 67 点，標準偏差 σ_1 が 20 点である．

(1) 今年のデータだけから，今後予想される平均点を信頼区間 95%で推定せよ．今年のデータが正規分布にしたがうと仮定してよい．

(2) 昨年より今年の成績が良いといえるのか，有意水準 5%で右側検定せよ．$z = \dfrac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_1/\sqrt{n}}$ が正規分布にしたがうと仮定してよい．

6.2　統計量の検定

6.2.1　$\boxed{\text{ガイド}}$ 検定方法の概略

6.2.2　正規母集団に対する母平均 μ の検定

例題 6.3 あるスーパーで売られている肉のパックは 1 kg と表示されているが，16 個を抽出して測ったところ，平均値 $\overline{x} = 998.2$ g だった．このスーパーでは故意に少なめにパックしているといえるだろうか．次の 2 つの場合について，有意水準 5 % で検定せよ．

(1) この店の秤が古くて，標準偏差 $\sigma = 4.0$ g であることが分かっている場合．

(2) 秤については不明だが，抽出したパックの標本不偏分散が $s^2 = 16.0$ g^2 の場合．

問題 6.4 36 人の学級で全国統一学力テストを実施したところ，平均点は 54.6 点，標本不偏分散は (8.2 点)^2 だった．全国平均は 51.1 点だという．この学級は平均点に関して優れていると考えられるか．有意水準 5% で検定せよ．

6.2.3　正規母集団に対する母分散 σ^2 の検定

例題 6.5 多数の学生が受験している入学試験の採点で，20 名分の答案を無作為に抽出して平均点 62 点，標本分散 (12.3 点)^2 を得た．母分散は (10.0 点)^2 を超えているか．有意水準 5%で検定せよ．

6.2.4　２つの正規母集団の母分散の差の検定

6.2.5　２つの正規母集団の母平均 μ の差の検定

例題 6.6 入学生に毎年同じ数学テストを行っている．学生の学力に有意な差はあるだろうか．有意水準 5%で検定せよ．

	人数	平均	不偏分散
昨年	447	58.07	574.1
今年	431	61.15	524.4

問題 6.7 同じクラスで異なる数学テストを行った．テスト 2 の方が難しかったのだろうか．有意水準 5%で検定せよ．

テスト	人数	平均	不偏分散
1	21	65	81
2	26	60	100

6.2.6　相関係数の検定

6.2.7　母比率の検定

6.3　適合度の検定

6.3.1　適合度の検定

例題 6.8 （Mendel の法則） 遺伝法則を研究していた Mendel はエンドウ豆の交配実験で，つぎのデータを得た．

	しわ無		しわ有		
種類	黄色 C_1	緑色 C_2	黄色 C_3	緑色 C_4	合計
個数	315	108	101	32	556

彼が提唱している理論にしたがえば，これらの個数の比は 9:3:3:1 のはずであるが，そうなっているか．有意水準 5%で検定せよ．

問題 6.9 （π と e のランダムさ） 円周率，自然対数の底のはじめの 200 桁は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\pi &= 3.\ 1415926535\ 8979323846\ 2643383279\ 5028841971\ 6939937510 \\
& 5820974944\ 5923078164\ 0628620899\ 8628034825\ 3421170679 \\
& 8214808651\ 3282306647\ 0938446095\ 5058223172\ 5359408128 \\
& 4811174502\ 8410270193\ 8521105559\ 6446229489\ 549303820 \\
e &= 2.\ 7182818284\ 5904523536\ 0287471352\ 6624977572\ 4709369995 \\
& 9574966967\ 6277240766\ 3035354759\ 4571382178\ 5251664274 \\
& 2746639193\ 2003059921\ 8174135966\ 2904357290\ 0334295260 \\
& 5956307381\ 3232862794\ 3490763233\ 8298807531\ 952510190
\end{aligned}$$

それぞれ出現する数字はランダムだろうか．有意水準 5% で検定せよ．

6.3.2　独立性の検定

例題 6.10 （予防注射は有効か） ある市でのインフルエンザ予防注射の接種と罹患者数のデータである．予防注射は有効といえるだろうか．有意水準 5%で検定せよ．

	B_1(罹患した)	B_2(罹患せず)	合計
A_1(予防接種した)	592	699	1291
A_2(予防接種せず)	1017	870	1887
合計	1609	1569	3178

6.3.3　複数母集団の比率一様性（均斉性）検定

第 6 章 章末問題

$\boxed{6.1}$ **（8 人に聞きました）** あるテレビ番組で，被験者 8 人に納豆を食べてもらい，そのうち 5 人に「ダイエット効果があった」という実験結果を放送した．この実験が事実とするならば，ダイエットに効果がある確率はどのくらいといえるか．信頼係数を 95% として区間推定せよ．また，もし 80 人に実験して 50 人に効果があった場合だったならどうか．

$\boxed{6.2}$ **（テスト成績の相関）** 数学と英語のテスト成績には相関があるといえるか，有意水準 5% で検定せよ．

(1) 次の学生 10 人のデータについて調べよ．

数学	41	70	70	62	74	67	56	89	48	67
英語	47	57	80	70	60	67	37	87	47	67

(2) さらに学生 10 人のデータが入手できた．合計 20 人のデータとして調べよ．

数学	93	74	78	85	81	81	81	52	85	100
英語	87	27	40	90	77	47	53	43	63	83

6.3 **（子供の誕生曜日）**曜日によって子供が生まれる率が変わるのか，という調査が 2006 年に米国で行われ，無作為抽出された 500 人について，次のデータが得られた．有意水準 1% で適合度検定せよ．

曜日	日	月	火	水	木	金	土	合計
新生児	57	78	74	76	71	81	63	500

6.4 **（タイタニック号の沈没）**1912 年のタイタニック号の沈没事故では，女性と子供を優先的に救助したことが知られている．しかし，客室のレベルによる救助の優先度はあったのだろうか．有意水準を決めて独立性検定せよ．

客室	1st クラス	2nd クラス	3rd クラス	合計
生存	203	118	178	499
死亡	122	167	528	817
合計	325	285	706	1316

6.5 **（源氏物語の著者は同じか）**同一著者か疑われる文学作品 2 つ（源氏物語の前半と後半）があり，使われた品詞を数えると次のようになった．2 つの作品は同じ割合で品詞を含んでいるといえるか．

	名詞	動詞	形容詞	助動詞	助詞	形容動詞	その他	総語数
前半	48206	42908	15656	29972	83529	6329	38429	265029
後半	18295	18386	6200	13803	35504	2702	16506	111396
合計	66501	61294	21856	43775	119033	9031	54935	376425

第 7 章 確率過程

7.1 Brown 運動とランダム・ウォーク

7.1.1 Brown 運動の発見

7.1.2 Einstein の Brown 運動理論

7.1.3 ランダム・ウォーク

例題 7.1 ある酔っぱらいが，1 歩（1 秒）進むごとに，右か左へそれぞれ 1/2 の確率でよろけながら進んでいる．始めに原点 $x = 0$ にいたとして，n 歩（n 秒）進んだときの位置の確率分布を求めよ．

7.2 確率過程

7.2.1 確率過程の定義

7.2.2 代表的な確率過程

7.2.3 確率過程の特徴付けに使われる概念

7.3 確率過程の応用例

7.3.1 破産問題：ランダムウォークの応用例

例題 7.2 **（破産問題）**A, B の 2 人がはじめにそれぞれ a, b 枚のコインをもつ．$a + b = M$ とする．じゃんけんで勝敗をつけるごとに相手にコインを 1 枚渡す．じゃんけんで，A が勝つ確率は p，B が勝つ確率は q として，$p + q = 1$ とする（引き分けは考えない）．どちらかの持っているコインがなくなることを破産とする．

(1) A が破産する（B が勝利する）確率を求めよ．

(2) B が破産する（A が勝利する）確率を求めよ．

(3) 破産が決まるまでの勝負数 N を求めよ．

7.3.2　出生死滅過程：Poisson 確率過程の拡張

7.3.3　気象連鎖：推移確率行列の応用例

例題 7.3
（気象連鎖）ある地域では翌日の天気が，前日の天気によってほぼ確率的に決まり，下表のように与えられる．

	今日晴れ $i=1$	今日曇り $i=2$	今日雨 $i=3$
明日晴れ $j=1$	0.5	0.4	0.3
明日曇り $j=2$	0.3	0.3	0.4
明日雨　$j=3$	0.2	0.3	0.3

(1) 日曜日が晴れだったとき，次の水曜日が晴れる確率はいくらか．

(2) この地域の天気は平均してどのような確率であるといえるか．

7.3.4　乗算過程 (1)：対数正規分布の出現

7.3.5　乗算過程 (2)：べき分布の出現