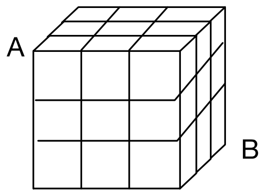
練習問題の補充（１）

過去の中間テスト問題＋おまけ.

1　数え上げ

類題 1.1
下図のようなルービックキューブ状の立体経路がある（描いていない裏側や内部にも経路がある）．頂点 A から対角の頂点 B まで行く最短経路は何通りあるか.



類題 1.2
1 から 5 の番号が書かれた 5 枚のカードがあり，すべてを使って 5 桁の数をつくる．偶数は何通りできるか.

類題 1.3
0 から 9 までの数字を用いた 4 桁の暗証番号について，セキュリティ上安全なものを考える.

1. 使える暗証番号は全部で何通りあるか.
2. 4 つ異なる数字を用いる暗証番号は何通りあるか.
3. 2 桁ずつ同じパターンの繰り返し（1111, 1212, 3636, $\cdots$）は暗証番号として不適とする．このような組み合わせは何通りあるか.
4. 数字がすべて異なっても，数字が 4 つ連続する番号（1234, 5432, $\cdots$）は不適とする．このような暗証番号はいくつあるか．ただし，8901, 2109, $\cdots$ などもここでは連続と考える.

2　確率

類題 2.1
学生 100 人は，通学にバスを使うか徒歩かのいずれかに分けられる．また，男女いずれかに分けられる．調査対象を変えて一人の学生を無作為に選ぶ.

(i) 学生 100 人を対象とすると，その学生が徒歩通学である確率は a であり，男子学生である確率は b である.

(ii) 男子学生を対象とすると，その学生が徒歩通学である確率は c である.

a, b, c を正の数とする．次の問いに答えよ.

1. 徒歩通学の学生全員を対象とするとき，その学生が男子学生である確率を a, b, c を用いて表せ.
2. 学生 100 人を対象とするとき，その学生が男子学生かまたは徒歩通学である確率を a, b, c を用いて表せ.

類題 2.2
サイコロを 4 回投げ，出た目を順に a, b, c, d とする．$a < b < c < d$ となる確率はいくらか.

類題 2.3
A, B, C の 3 人がこの順に繰り返してサイコロ 2 個を順に投げ，最初にゾロ目（⚂ と ⚂ など目がそろうこと）が出た人を勝ちとする．勝者が出るまで何巡もする．A, B, C それぞれが勝つ確率を P_A, P_B, P_C とする．P_A と $P_B + P_C$ はどちらが大きいか.

類題 2.4
コインを 4 回投げるとき，少なくとも 1 回表が出る確率はいくらか.

類題 2.5
選択肢 4 つのうち，1 つだけ正解の問題がある．難しかったので，学生 5 人がランダムに解答した．少なくとも 1 人が正解する確率を求めよ.

3　期待値

類題 3.1
出る目が偏ったサイコロがあり，それぞれの目が出る確率が次の表のようになっている.

目	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
確率	x	y	x	x	x	y

このサイコロの出る目の期待値が 3.7 であるとき，x, y の値を求めよ.

類題 3.2
お年玉をもらうときに，サイコロ 3 個を同時に投げて「偶数の出た個数 $\times$ 1000 円」の額をもらう（プラン A）か，サイコロ 3 個を同時に投げて「偶数の出た個数 $\times$ 奇数の出た個数 $\times$ 1000 円」の額をもらう（プラン B）か選択できる．期待値が大きいのはどちらか．

類題 3.3
座標平面上を動く点 P がある．はじめに原点 O にある．コインを投げて表が出れば，P は x 軸上を正の向きに $+1$ 動く．裏が出れば，P は y 軸上を正の向きに $+1$ 動く．

1. コインを 2 回投げたとき，P が $(1,1)$ にある確率を求めよ．
2. コインを 4 回投げたとき，P が $(3,1)$ にある確率を求めよ．
3. コインを 3 回投げたとき，距離 OP の期待値を求めよ．

類題 3.4
力の互角な A, B 2 チームが，引き分けのない試合を 5 試合行う．先に 3 勝した方を勝者とするとき，平均して何試合で勝敗が決まるか．

類題 3.5
A,B,C の 3 人が所持金 5 万円をスタートにジャンケンを繰り返す．次のルールで金銭の移動を行った．

- 負けた人は勝った人全員に 1 万円づつ支払う．
- アイコの時は金銭の移動なし．

1. 1 回目のジャンケンの標本点（素事象）を列挙し，各標本点に確率を与えよ．ただし，列挙は，A がグーを出したときのみでよい．確率はすべての場合の総和を 1 として与えよ．
2. 1 回目のジャンケンで A が 1 万円獲得する確率はいくらか．
3. 1 回目のジャンケンで A が 2 万円獲得する確率はいくらか．
4. 3 回目が終了したとき，各人の所持金が 10 万円以下の確率はいくらか．
5. 2 回目が終了したとき，各人の所持金が同じである確率はいくらか．

4 条件付き確率

類題 4.1
学生数 1000 人の某大学には他大学の職員が学生になりすましたスパイが 1 人いた．スパイ判定機があるが，学生であってもスパイと判定される率が 10%あり，スパイであっても学生と判定される率が 5% ある．

1. 1000 人のうち 1 人を調べたとき，判定機が「スパイ」と判定を下す確率はいくらか．
2. 1000 人のうち 1 人を調べたとき，判定機が「スパイ」と判定を下した．実際にその学生がスパイである確率はいくらか．

類題 4.2
日本人とアメリカ人の血液型の比は異なる．簡単のため，A 型，B 型，O 型の 3 つのみで分類できるとすると，日本人は A 型 3 割，B 型 4 割，O 型 3 割であり，アメリカ人は A 型 2 割，B 型 1 割，O 型 7 割である．いま，日本人 3 割アメリカ人 7 割から献血が集まった．

1. 血液が日本人のものだ，と分かった場合の，A 型，B 型，O 型 の比をそれぞれ示せ．
2. 血液が日本人かつ A 型であるのは，全体のどのくらいの割合か．
3. 血液が A 型だ，と分かった場合，献血者がアメリカ人である確率はいくらか．

類題 4.3
晴天と雨天の確率は半々であるとする．

1. ある事件に関して，証人 A は「事件が起きたとき晴天であった」と述べた．証人 A が真実を言う確率は，$\dfrac{4}{5}$ であるとする．実際に事件が起きたとき，晴天であった確率はいくらか．
2. 同じ事件に関して，さらに，証人 B は「事件が起きたとき雨天であった」と述べた．証人 B が真実を言う確率は，$\dfrac{8}{9}$ であるとする．証人 A, B の 2 人の証言から，実際に事件が起きたとき，晴天であった確率はいくらか．

類題 4.4
ワクチンが A, B, C の 3 種類あり，国民の接種割合はそれぞれ 60%，30%，10%である．これらのワクチンで生じる発熱の副反応の割合がそれぞれ 2%，3%，4% である．いま，ワクチンを接種した一人に発熱の副反応があったとき，その人がワクチン A を接種していた確率を求めよ．

類題 4.5
100 人に 1 人の割合で罹患する感染症がある．その検査薬として，感染している人に陽性反応が出る確率が 90%，感染していない人に陰性反応が出る確率が 95% である．

(a) 検査を受けて，陽性反応が出た人が，この感染症に罹患している確率を求めよ．

(b) 後日，陽性反応が出た人全員を対象にして再検査が行われた．このときも陽性反応が出た人が，実際に感染している確率を求めよ．

5　ベイズ確率

類題 5.1
少年が嘘つきの場合（事象 **A**)，「オオカミがいる」と言ったとき，オオカミが発見される（事象 **B**）確率を 20%，発見できない（事象 $\overline{\mathbf{B}}$）確率を 80%とする．少年が嘘つきでない場合（事象 $\overline{\mathbf{A}}$)，「オオカミがいる」と言ったとき，オオカミが発見される確率を 70%，発見できない確率を 30%とする．事前確率として，少年が嘘つきの可能性を 10%とする．

	オオカミ発見 **B**	発見できない $\overline{\mathbf{B}}$
少年が嘘つき　**A**	20 %	80 %
少年が正直者　$\overline{\mathbf{A}}$	70 %	30 %

1. １度目，少年が「オオカミがいる」と言ったが，オオカミは発見されなかった．少年が嘘つきと考えられる事後確率 $P(\mathbf{A}|\overline{\mathbf{B}})$ を求めよ．
   引き続いて２度目，少年が「オオカミがいる」と言ったが，オオカミは発見されなかった．少年が嘘つきと考えられる事後確率を求めよ．

2. １度目，少年が「オオカミがいる」と言い，オオカミが発見された．少年が嘘つきと考えられる事後確率を求めよ．

類題 5.2
電子メール 15 通に対し，ユーザが迷惑メール（事象 S）かそうでないか（事象 $\overline{\mathrm{S}}$）の判定をした．メール中に特定の単語 A と B が含まれている (○) か含まれていないか (×) の判定表がある．

1. 迷惑メールに単語 A が含まれる確率を求めよ．

2. 通常メールに単語 A が含まれる確率を求めよ．

3. あるメールが単語 A を含むと分かったとき（単語 B に関しては不明）そのメールが迷惑メールである確率 $P(S|A)$ と通常メールである確率 $P(\overline{\mathrm{S}}|A)$ を求めよ．

4. あるメールが単語 A と 単語 B を両方含むと分かったとき，そのメールが迷惑メールである確率を求めよ．なお，この問題では，単語 A と 単語 B は，独立に出現するものとする．

メール	単語 A	単語 B	判定
1	×	×	迷惑
2	×	×	迷惑
3	○	×	迷惑
4	○	×	迷惑
5	○	×	迷惑
6	○	×	迷惑
7	○	○	迷惑
8	○	○	迷惑
9	×	×	通常
10	×	×	通常
11	×	○	通常
12	×	○	通常
13	×	○	通常
14	○	○	通常
15	○	○	通常

6　ガチャをコンプリートする

類題 6.1

(a) 確率 $p = \dfrac{1}{n}$ で当たりが出るくじがある．何回引いてもこの確率は同じとする．当たりが出るまでの平均試行数はいくらか.

(b) 2種類の商品が等確率で出てくる機械があり，2種類とも入手したい．平均試行数はいくらか.

(c) 3種類の商品が等確率で出てくる機械があり，3種類とも入手したい．平均試行数はいくらか.

(d) N 種類の商品が等確率で出てくる機械があり，N 種類とも入手したい．平均試行数はいくらか.

類題 6.1 の解答例

(a)

外れる確率を $q = 1 - p$ とする．以下の表のように当たりが出るまでの回数 N が決まるので，求める期待値 E は,

$$E = p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + \cdots \tag{6.1}$$

この和を求めるために,

$$qE = qp + 2q^2p + 3q^3p + 4q^4p + \cdots \tag{6.2}$$

表 1: 試行回数と確率

試行回数 N	確率
1	p
2	qp
3	q^2p
4	q^3p

を用意して，辺々引くと,

$$(1-q)E = p + qp + q^2p + q^3p + \cdots = p\frac{1}{1-q} = 1$$

故に $E = \dfrac{1}{p}$．したがって，平均試行数は，$E = n$ になる.

(b) はじめ 1 回の試行で 1 つの商品が得られる．そこから 2 つ目の商品を得るための平均試行数は，問題 1 の結果を用いると，$p = \dfrac{1}{2}$ に相当するので，あと 2 回．結果として，平均 3 回となる.

(c) はじめ 1 回の試行で 1 つの商品が得られる．そこから 2 つ目の商品を得るための平均試行数は，問題 1 の結果を用いると，$p = \dfrac{2}{3}$ に相当するので，平均 1.5 回．また，3 つ目の商品を得るための平均試行数は，1 つ得られた時点で問題 1 の結果で，$p = \dfrac{1}{3}$ に相当するので，平均 3 回．合計して平均 5.5 回となる.

(d) 問題 3 での考え方を拡張し，平均試行数 $E(N)$ は,

$$E(N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k/N}$$

となる．具体的には以下のようになる.

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E(N)$	3	5.5	8.33	11.4	14.7	18.2	21.7	25.5	29.3