練習問題の補充（2）

過去の中間テスト問題＋おまけ.

7　条件つき確率

類題 7.1
ある感染症に対して，2 回のワクチン接種が推奨されている．接種 2 回の国民は人口の 40%，接種 1 回だけの国民は人口の 30%である．感染率は，接種後の期間によらずワクチン 1 回接種だと 20%，2 回接種だと 10%であり，非接種者は 60%である．罹患していてもその感染が判明するのはいずれの場合でも 50% である．

(a) 感染している人が見つかった．その人がワクチンを接種していない確率を求めよ．

(b) ワクチンを接種した人のなかで，感染者が見つかった．その人がワクチンを 1 回のみ接種していた確率を求めよ．

(c) 人口１億人の国で，感染者が 300 万人みつかった．この時点で，潜在的な感染者（まだ見つかっていない感染者）は何人か．

類題 7.2
100 人に 1 人の割合で罹患する感染症がある．その検査薬として，感染している人に陽性反応が出る確率が 90%，感染していない人に陰性反応が出る確率が 95%である．

(a) 検査を受けて，陽性反応が出た人が，この感染症に罹患している確率を求めよ．

(b) 後日，陽性反応が出た人全員を対象にして再検査が行われた．このときも陽性反応が出た人が，実際に感染している確率を求めよ．

類題 7.3
少年が嘘つきの場合（事象 $\mathbf{A}$)，「オオカミがいる」と言ったとき，オオカミが発見される（事象 $\mathbf{B}$）確率を 20%，発見できない（事象 $\overline{\mathbf{B}}$）確率を 80%とする．少年が嘘つきでない場合（事象 $\overline{\mathbf{A}}$)，「オオカミがいる」と言ったとき，オオカミが発見される確率を 70%，発見できない確率を 30%とする．事前確率として，少年が嘘つきの可能性を 10%とする．(15 点)

	オオカミ発見 $\mathbf{B}$	発見できない $\overline{\mathbf{B}}$
少年が嘘つき　$\mathbf{A}$	20 %	80 %
少年が正直者　$\overline{\mathbf{A}}$	70 %	30 %

1. １度目，少年が「オオカミがいる」と言ったが，オオカミは発見されなかった．少年が嘘つきと考えられる事後確率 $P(\mathbf{A}|\overline{\mathbf{B}})$ を求めよ．
   引き続いて２度目，少年が「オオカミがいる」と言ったが，オオカミは発見されなかった．少年が嘘つきと考えられる事後確率を求めよ．

2. １度目，少年が「オオカミがいる」と言い，オオカミが発見された．少年が嘘つきと考えられる事後確率を求めよ．

類題 7.4
A 君が B 君に正しいことを言う確率は p，B 君が C 君に正しいことを言う確率は q である．いま，「Z 君は大阪出身である」のような yes/no で判定される事実について，A が真実を知っており，A→B→C の順に情報が伝わるとき，以下の確率を求めよ．

1. C が真実を伝えられる確率.

2. C が真実を伝えられたとき，B も真実を伝えられている確率.

8　確率分布　一般論

類題 8.1
連続型確率分布（確率密度関数 $f(x)$）に対して，期待値を $E[X]$，分散を $V[X]$ とする．次の関係式を示せ．

$$\begin{aligned} V[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ E[aX+b] &= aE[X] + b \end{aligned}$$

a, b を定数とする

類題 8.2
離散確率分布について，分散に関する公式

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

を示せ.（a, b は定数とする.）

類題 8.3
確率変数 X の累積分布関数 (CDF) $F(x)$ が次式で与えられる．

$$F(x)=\begin{cases}0 & (x\leq 0)\\ 1-\cos x & (0\leq x\leq \pi/2)\\ 1 & (\pi/2<x)\end{cases}$$

このとき，確率密度関数 (PDF) $f(x)$，この確率分布の平均値 μ を求めよ．

類題 8.4
確率変数 X の累積分布関数 (CDF) $F(x)$ が次式で与えられる．

$$F(x)=\begin{cases}0 & (x\leq 0)\\ -x^2+2x & (0\leq x\leq 1)\\ 0 & (1<x)\end{cases}$$

このとき，確率密度関数 (PDF) $f(x)$，この確率分布の平均値 μ を求めよ．

類題 8.5
あるガソリンスタンドは，週の売り上げ量 x（$x=1$ が 100 kℓ に相当）が,

$$f(x)=\begin{cases}6x(1-x) & (0\leq x\leq 1)\\ 0 & (\text{else})\end{cases}$$

である確率密度関数 (PDF) を持つ道路沿いにある．

1. $0\leq x\leq 1$ での累積分布関数 (CDF) を求めよ．
2. この確率密度関数どおりに販売できるとき，売上量の平均を求めよ．
3. このガソリンスタンドは，毎週 1 回ガソリンの供給を受けて，タンクを満杯にする．現在，利用できるタンクの容量が 75 kℓ であるとき，このタンクを満杯にしても売り切れてしまう確率はいくらか.

類題 8.6
2 個のサイコロを同時にふり，大きい方の目（小さくない方の目）を X とする．X の分布表を作り，X の平均と分散を求めよ．

類題 8.7
7 回の勝負のうち, 先に 4 回勝った方を勝者とするゲームがある．引き分けはない．何回戦で勝敗がつくのか, その平均と分散を求めよ．

9　確率分布　個別論

類題 9.1
酔っ払いが前後に確率 1/2 で動いている．8 歩動いたとき，元の位置に戻っている確率はいくらか.

類題 9.2
事象 S と F があり, それぞれ確率は p,q である（$p+q=1$ とする）．はじめて事象 S が発生するまでの試行回数 X の確率分布は，ファーストサクセス分布とよばれ,

$$P(X=k)=pq^{k-1}\qquad (k=1,2,\cdots)$$

で与えられる．この確率分布の平均値を求めよ．

類題 9.3
サイコロを 4 回投げるとき，少なくとも 2 回「5 以上の目」が出る確率はいくらか.

類題 9.4
Poisson 分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

の分散が λ であることを示せ．ただし，この分布の期待値が λ であることを用いて良い.

類題 9.5
確率変数 X の分布が関数形 $f(k)=\dfrac{c}{k!}\,(k=0,1,2,\cdots)$ で与えられる時，c の値を定めよ．

類題 9.6
あるマークシート形式の問題には 5 つの答の選択肢があり，正答は 1 つである．問題が難しかったので，10 人の受験生全員が無作為に答えた.

1. 正解者が少なくとも 2 人いる確率は約何%か．$5^{10}=9765625$，$4^{10}=1048576$ を用いてよい.
2. この問題は 10 点だとする．理論上，平均点は何点か.
3. 同様，分散はいくつか.

10　確率分布　正規分布

類題 10.1
極座標変換 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ に対するヤコビアン (Jacobian) J を求めよ．

類題 10.2
ガウス積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$ を用いて,

$$I=\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\,dx$$

を求めよ．$a\neq 0$ は定数である.

類題 10.3
正規分布 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ (μ, σ は定数) の平均値が μ であることを示せ.
ただし, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ を既知としてよい.

類題 10.4
正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ を表す確率密度関数 $f(x)$ を積分することにより, 正規分布の平均値が μ であることを示せ.

類題 10.5
正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ について答えよ.

1. 確率密度関数 $f(x)$ の式を示せ. また, 概形を図示して σ の意味を説明せよ.

2. 空欄を埋めよ.
正規分布の確率密度関数 $f(x)$ は, 確率変数を x, 分布の平均値 (期待値) を μ, 分散を σ^2 とすると, $f(x) = \boxed{\text{(a)}}$ として与えられる. また, $\boxed{\text{(b)}}$ と呼ばれる変換により, 平均値を $\boxed{\text{(c)}}$ に, 分散を $\boxed{\text{(d)}}$ に変換する操作を行うと, 標準正規分布になる. この変換は, 標準正規分布の確率変数を z とすると, $\boxed{\text{(e)}}$ と表すことができる. 分散の平方根 σ は, $\boxed{\text{(f)}}$ と呼ばれる.

3. $y = f(x)$ の概形を図示して説明せよ. また, 図を用いて, σ の意味を説明せよ.

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ を示せ.

類題 10.6
ある地域の地震は, 平均 100 年, 標準偏差 20 年の正規分布で表されるような間隔で発生している. 前回の地震から 90 年が経過している. 今後 30 年間に地震が発生する確率はいくらか.

類題 10.7
偏差値は「平均値からのズレが σ の何倍か」という値を 10 倍して 50 足した数として定義する. 同様に, 知能指数は,「平均値からのズレが σ の何倍か」という値を 15 倍して 100 足した数として定義する.

1. 偏差値 70 の人は, 知能指数ではいくつに相当するか.

2. 上位から 10%, 20%, 30%, 40%のレベルにある人の知能指数をそれぞれ求めよ.

類題 10.8
ある年の期末試験は, 100 点満点で, 平均 μ が 60 点, 標準偏差 σ が 15 点だった. 合格者を全体の 75%に調整するとき, 合格最低点は何点か. 標準正規分布表を用いて良い.

類題 10.9
あるテストを受けた 10000 人の学生の得点平均 μ は 50 点, 標準偏差 σ は 12 点である. 得点が 平均から 1.5σ 以内の学生数はおよそ何人いるか.

1. 標準正規分布表を用いて答えよ.

2. チェビシェフの不等式 $P(|X-\mu| > \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ を利用して答えよ.

---

11 火曜日生まれの男の子問題

男女の誕生は同確率で, 曜日に左右されないとする.

類題 11.1
以下の会話から, 回答者の子供が二人とも男の子である確率を求めよ.
質問者「お子さんは何人いますか」
回答者「２人です」
質問者「男の子はいますか」
回答者「います」

類題 11.2
以下の会話から, 回答者の子供が二人とも男の子である確率を求めよ.
質問者「お子さんは何人いますか」
回答者「２人です」
質問者「火曜日生まれの男の子はいますか」
回答者「います」

類題 11.1 の答えは, 1/3. 類題 11.2 の答えは, 13/27 = 48.1%.