物理（工学部・情報科学部）

物　　理

Ⅰ 空所を埋め，問いに答えよ。(配点 60)

（1） 図1のように，なめらかな水平面上にばね定数が k で自然長が ℓ の軽いばねを設置し，その右端に質量 m の小さなおもりを取り付けた。ばねの左端は壁に固定した。このばねはフックの法則が常に成り立つとする。

ばねが自然長のときのおもりの位置を原点Oとし，右向きを x 軸の正の向きとする。おもりを手で押して長さ d だけばねを縮めて，おもりを静止させた。$d < \ell$ とする。その後，静かにはなしたところ，おもりは一定の周期で x 軸上で振動をはじめた。

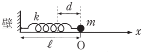

図1

1）おもりには，おもりを原点Oに戻そうとする力がばねからはたらく。この力の名称を答えよ。

2）おもりの振動の周期を求めよ。

3）おもりの速さの最大値を求めよ。

4）おもりの速さが最大値の半分になる x 座標を d を用いて表せ。

（2）（1）のばねをおもりを付けたまま壁から取り外し，図2のように，なめらかな水平面上に置いた。ばねの他端は細い軸につなげ，軸を中心にばねが自由に回転できるようにした。この軸の平面上の位置を原点Oとする。

おもりが水平面上で原点Oを中心として等速円運動をしている。ばねは自然長から伸びている。角速度を測定したところ ω であった。ここで $k > m\omega^2$ である。

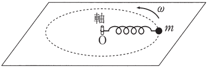

図2

5）おもりの回転半径はばねの自然長 ℓ に伸びを加えたものになる。ばねの伸びを求めよ。

6）前問の解答をもとに，ばねの伸びと $m\omega^2$ の関係を解答欄のグラフに描け。ここで縦軸をばねの伸び，横軸を $m\omega^2$ とする。

（3） 次に図3のように，軸を鉛直上方に伸ばし，ばねの他端を水平面から高さ ℓ に固定した。（2）と同様に，おもりが水平面上で原点Oを中心に等速円運動をしている。このとき，ばねはたわまないで，軸とばねのなす角は θ であった。おもりの回転半径は $\ell\tan\theta$ である。

おもりと一緒に回転している観測者からみたときの，おもりにはたらく力のつり合いを考えよう。おもりにはたらく，ばねからの力の大きさを F，水平面からの垂直抗力の大きさを N とおく。重力加速度の大きさを g とする。回転の角速度を ω' とする。

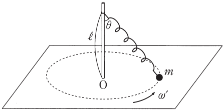

図3

おもりにはたらく力のつり合いの式は，水平方向と鉛直方向のそれぞれについて，F，N，θ を用いて以下で表される。

水平方向　$\boxed{\text{ア}} = m\ell\tan\theta\,\omega'^2$

鉛直方向　$\boxed{\text{イ}} = mg$

一方，図3より，ばねの伸びは ℓ と θ を用いて $\ell \times \left(\boxed{\text{ウ}}\right)$ と表される。

7）角速度 ω' を k，m，θ を用いて表せ。

角速度がある値よりも大きい場合，おもりは平面から浮き上がって等速円運動をする。おもりがちょうど浮き上がる状況を調べてみよう。

8）おもりがちょうど浮き上がるときの角を θ_0 とする。$\cos\theta_0$ を k，m，g，ℓ を用いて表せ。

9）このときのばねの伸びを k，m，g，ℓ を用いて表せ。

10）問8）と問9）の解が存在するためには，k，m，g，ℓ の間に，ある条件が必要である。この条件式を求めよ。

11）おもりがちょうど浮き上がるときの角速度を g と ℓ を用いて表せ。

Ⅱ 空所を語句で埋め，問いに答えよ。(配点 45)

(1) 真空中で2つの点電荷間にはたらく静電気力の大きさF〔N〕は，それぞれの電荷の電気量q_1〔C〕，q_2〔C〕の積に比例し，距離r〔m〕の2乗に反比例する。これを $\boxed{\text{ア}}$ の法則という。離れた2つの電荷が力を及ぼし合うのは，q_1が存在することによって周りの空間の状態が変化し，q_2は変化した空間から力を受けるためと考え，向きも含めて$\vec{F}=q_2\vec{E}$と表される。このとき，空間には $\boxed{\text{イ}}$ が生じているという。

$\boxed{\text{ア}}$ の法則の比例定数を$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$〔N·m²/C²〕とする。$q_1$，$q_2$がともに正のとき，$|\vec{E}|=\dfrac{F}{q_2}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1}{r^2}$となる。ここで，$q_1$から$q_2$へ向かうベクトルを$\vec{r}$とし，これをその大きさ$|\vec{r}|=r$で割ったベクトル$\dfrac{\vec{r}}{r}$を考える。このベクトルは$\vec{E}$の向きを表し，大きさが1だから，これを$|\vec{E}|$にかけると$\vec{E}$を表すベクトルとなる。つまり，$\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$と表される。この式は$q_1$が負のときにもこのまま成り立つ。

(2) 電気量$q\,(>0)$の点電荷がある。この点電荷を中心とする半径rの球面を考える。この球面上の各点における$|\vec{E}|$はどこでも等しく，その向きは $\boxed{\text{ウ}}$ である。球の表面積と$|\vec{E}|$との積は$\dfrac{q}{\varepsilon_0}$となり，この値は球の半径を変えても変わらない。そこで，正の点電荷が一つだけ存在する場合，$\dfrac{q}{\varepsilon_0}$本の電気力線があらゆる方向へ均等に出るとする。このとき電荷から出た電気力線は途中で消滅したり新たに生み出されたりすることはなく，無限の彼方へ直進する。

(3) **球面上**に電荷が**単位面積あたり**σ〔C〕で一様に分布している。この球面をSと名付ける。Sの内部に$\vec{E}$は生じないことが以下のようにして示される。

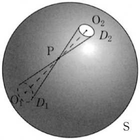

図1 S内の点Pと二つの円錐

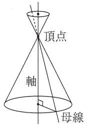

図2 軸と母線を共有する2つの円錐

図1のようにSの内部の点Pを通る直線とSとの交点をO_1，O_2とし，点Pを頂点，直線O_1O_2を軸とする二つの細い円錐を考える。片方の円錐の母線を延長すると，もう片方の円錐の母線となる（図2参照）。円錐の側面がSから切り取る面を平面とみなし，その面積をD_1〔m²〕，D_2〔m²〕とおく。

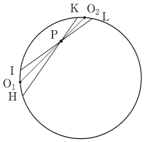

図3 O_1O_2を含む面による断面

直線O_1O_2を含むある平面でSを切った。その切り口を示したのが図3である。ここで，点H，I，K，L

は，S 上の点である。△HPI と△LPK は相似であるから，$\dfrac{D_1}{D_2}=\left(\dfrac{\mathrm{PO_1}}{\mathrm{PO_2}}\right)^2$となる。

1）点 P に置いた試験電荷が，円錐の側面によって S から切り取られた二つの面上の電荷から受ける力は互いに打ち消す。その理由を簡潔に示せ。

一般に，複数の電荷分布が作る $\boxed{\text{イ}}$ は，各電荷分布が作る $\boxed{\text{イ}}$ のベクトルとしての和になる。これを $\boxed{\text{エ}}$ の原理という。点 P を通るすべての直線に関して，問1）と同様な議論が成り立つので，S 内には $\boxed{\text{イ}}$ は存在しないことになる。

2）S 上の全電気量と等しい電気量をもつ点電荷を考え，そのまわりに生じる電気力線の様子を解答欄に示した。この図を参考に，S のまわりに生じる電気力線を解答欄の図に描け。

（4） 点 O を中心とする半径 a〔m〕の**球の内部全体**に，電荷が**単位体積あたり** ρ〔C〕で一様に分布している$\left(\text{全電気量は}\,\rho\,\dfrac{4\pi a^3}{3}\right)$。点 O から距離 $r\ (<a)$ の点 P における $\boxed{\text{イ}}$ を $\vec{E}$ とする。**内部に電荷の詰まった球**を，球面が何層も積み重ねられたものと考えよう。$\vec{E}$ を求めるためには，（3）の考察より，半径が r より小さな球面上の電荷だけを考えればよく，しかも，これらはすべて球の中心にあると見なせばよい。点 O から点 P へ向かうベクトルを $\vec{r}$ とする。

3） $\vec{E}=\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$ と表されることを示せ。

次に**内部に電荷の詰まった球**から，図 4 のように点 O′ を中心とした小球をくり抜いて空洞とした。点 O′ から点 P へ向かうベクトルを $\vec{r'}$ とする。点 P がこの空洞内にあるとき，点 P における $\boxed{\text{イ}}$ を $\vec{E'}$ とする。電荷分布だけに着目すると，これは空洞と同じ大きさを持ち，電荷が単位体積あたり $-\rho$ で一様に分布した球を元の球内にはめ込んだと見なせる。$\boxed{\text{エ}}$ の原理によれば，問 3）で求めた $\vec{E}$ にはめ込んだ球内の全電荷が点 P に作る $\boxed{\text{イ}}$ を加えることで，$\vec{E'}$ を求めることができる。

4）$\vec{E'}$ を求めよ。

5）$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=\vec{r}-\vec{r'}$ に注意して，空洞内の $\vec{E'}$ の特徴を簡潔に示せ。

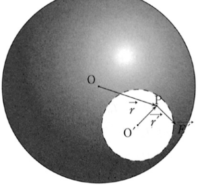

図 4　空洞内の点 P における $\vec{E'}$

Ⅲ 空所を埋め，問いに答えよ。(配点 45)

温泉の近くなどで，数分から数時間おきに周期的に水や水蒸気が吹き出す「間欠泉（かんけつせん)」が名所になっている所がある（図１)。アメリカのイエローストーン国立公園にあるものが世界的に有名だが，日本にも多数存在する。

図１　吹き上がる間欠泉

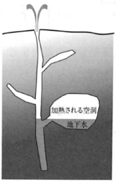

図２　地中の想像図

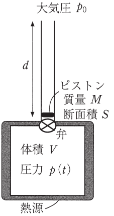

図３　空気鉄砲モデル

間欠泉のしくみには諸説あるが，図２のように推測されるものがある。すなわち，間欠泉の吹き出し口から地下に長い管がのび，管内には地下水が流入する。地下には空洞もあり，地熱によって常に加熱される。地下水によって空洞に閉じ込められた気体が熱膨張すると，やがて地下水を押し上げ，水は間欠泉として吹き上げられる。この現象が繰り返される，というものである。

このモデルをさらに簡略化し，空気鉄砲を縦に向けたような実験装置を考えた（図３)。体積が V〔m^3〕の容器があり，周囲の熱源から中の気体は常に加熱されている。容器には，気体が出入りできる弁が付いていて，この弁は内部の気体の圧力が大気圧 p_0〔Pa〕の $\dfrac{5}{4}$ 倍になると開くものとした。管内にはピストンがあり，気体に押し出されて上に飛び出すしくみである。

以下では大気圧は一定とし，気体定数を R〔J/(mol·K)〕とする。

（1） まず，気体が加熱される過程を考えよう。容器に大気圧と同じ圧力 p_0 の理想気体 n〔mol〕を入れて弁を閉じた。この時刻を $t = 0$ s とし，この状態をⒶとする。このときの気体の温度 T_0〔K〕は，$T_0 = \boxed{\text{ア}}$ となる。

容器全体は周囲から加熱され，閉じ込められた気体に毎秒 Q〔J〕の熱が取り込まれる。この気体の定積モル比熱を C_V〔J/(mol·K)〕とすると，気体の温度上昇は毎秒 $\boxed{\text{イ}}$ である。弁がはじめて開く状態をⒷとする。ⒶからⒷまでの間で，時刻 t での気体の温度 $T(t)$〔K〕は，

$$T(t) = T_0 + \boxed{\text{ウ}}$$

となる。時刻 t での気体の圧力 $p(t)$〔Pa〕は，$T(t)$ と T_0 を用いると，

$$p(t) = p_0 \times \boxed{\text{エ}}$$

となる。Ⓑのときの気体の温度は $\boxed{\text{オ}} \times T_0$ となる。

（2） 次に，弁から出た気体が物体を押し出す過程を考えよう。図3のように，弁の上には断面積が S〔m^2〕の管が接続されており，その内部には上下に動く質量 M〔kg〕のピストンが静止している。ピストンと管の間はなめらかであり，ピストンには摩擦ははたらかないものとする。

弁が開くと，ピストンには弁から排出された気体による圧力が下部から新たに加わり，上向きに動き始める。そして，ピストンは管の中を d〔m〕だけ押し上げられて打ち出された。この状態（瞬間）をⒸとする。

管の体積は容器の体積に比べて非常に小さく，また，ⒷからⒸまでの時間は短くて，この間に加えられた熱量は無視できるとしよう。そうであれば，Ⓑ－Ⓒの過程では，ピストンに加わる下部からの気体の圧力は大気圧の $\frac{5}{4}$ 倍のまま一定であると考えられる。ピストンに生じる加速度を上向きに a〔m/s^2〕とすると，ピストンの運動方程式は，重力加速度の大きさを g として

$$Ma = \boxed{\text{カ}}$$

となる。Ⓒでのピストンの速さ v〔m/s〕は，a と d を用いて，$v = \boxed{\text{キ}}$ となる。

ピストンは管から鉛直上方に打ち出され，重力のみによる運動をする。管の上端から測った最高到達点の高さ H〔m〕は，a と d と g を用いて，$H = \boxed{\text{ク}}$ となる。

1）管から打ち出された後のピストンには，大気の圧力もはたらくが，運動にはほとんど影響を与えない。その理由は何か。

2）$p_0 = 1.0 \times 10^5$ Pa，$S = 1.0$ m^2，$M = 1.0 \times 10^2$ kg のとき，$\frac{H}{d}$ はいくらになるか。簡単のため，$g = 1.0 \times 10$ m/s^2 として計算せよ。

（3） 管からピストンが飛び出すと同時に，管からは気体の一部も飛び出す。管と容器の中が再び大気圧になるまでの時間は短く，この間に温度変化がないとすれば，はじめにあった n〔mol〕の気体のうち，$\boxed{\text{ケ}}$ ％の気体が飛び出すことになる。

（4） Ⓑの時刻を t_1，Ⓒの時刻を t_2 とする。Ⓒの後，容器にはやがて大気圧 p_0 の気体が再び入り，はじめの状態にもどる。気体の圧力の時間変化の様子を図4に示した。

3）状態ⒶからⒸまでについて，容器内（弁が開いた後は管も含む）の気体の状態変化の様子をⒶⒷⒸの記号と共に解答欄の p-V グラフに記入し，ピストンを動かすのに内部の気体がした仕事に対応する領域を斜線で示せ。

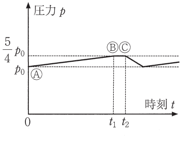

図4　気体の圧力の時間変化の様子