数学〔数学① (工学部)、数学② (工学部・情報科学部・知的財産学部)〕

I　【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。(配点 40)

(1)　$x > 0$ のとき，$x + \dfrac{1}{x}$ の最小値は $\boxed{\text{ア}}$ であり，

$x > 1$ のとき，$x + \dfrac{2}{x-1}$ の最小値は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　座標平面上の点 P (a, b)　$(a, b > 0)$ が円 $C : x^2 + y^2 = 1$ 上にあるとき，

b を a の式で表すと，$b = \boxed{\text{ウ}}$ である。

また，x 軸と y 軸，および点 P における円 C の接線で囲まれた三角形の面積 S を

a の式で表すと，$S = \boxed{\text{エ}}$ である。

(3)　曲線 $C_1 : y = \log_2 x$ に対し，C_1 を直線 $y = x$ に関して対称に移した曲線を C_2 とする。

曲線 C_1 が点 $(a, -3)$ を通るとき，$a = \boxed{\text{オ}}$ である。

また，曲線 C_2 と曲線 $y = 4^x - 6$ の交点の x 座標は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(4)　2つの平面ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ が，$|\overrightarrow{a}| = 3$, $|\overrightarrow{b}| = 2$, $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = \sqrt{14}$ を

満たしている。このとき，$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \boxed{\text{キ}}$ であり，

$|\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}|$ の値が最小となるような t の値は，$t = \boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{II}}$ 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定める。

数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1,\ a_3 = 11,\ a_4 = 22$ を満たし，数列 $\{b_n\}$ が等差数列であるとき，次の空所を埋めよ。(配点 35)

(1) 数列 $\{b_n\}$ の初項は $b_1 = \boxed{\text{ア}}$ であり，公差 d の値は，$d = \boxed{\text{イ}}$ である。

また，$a_2 = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n = \boxed{\text{エ}}$ である。

また，初項から第 n 項までの和は，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{6} \times \left(\boxed{\text{オ}} \right)$ である。

(3) $a_n > 200$ を満たす最小の自然数 n の値は，$n = \boxed{\text{カ}}$ である。

(4) $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{2015}$ の 2015 個の自然数の中に，$\boxed{\text{イ}}$ の倍数は $\boxed{\text{キ}}$ 個ある。

Ⅲ 【数学 ① のみ解答】

2 つの自然数 m, n $(m<n)$ に対し，曲線 $y=2\log x$ 上の

2 点 A$(m,\ 2\log m)$，B$(n,\ 2\log n)$ における接線をそれぞれ l_1, l_2 とする。

l_1, l_2 と x 軸とのなす角をそれぞれ α, β とするとき，次の問いに答えよ。

ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。（配点 35）

(1) 直線 l_1 の方程式を求めよ。

(2) $\tan\alpha$ の値を m の式で表せ。

(3) $\tan(\alpha-\beta)$ の値を m, n の式で表せ。

(4) 2 直線 l_1, l_2 のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ のとき，m, n の値を求めよ。

Ⅳ 【数学 ① のみ解答】

関数 $f(x)=x^2-1-|x^2-1|$ について，次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形 A の面積 S を求めよ。

(3) 図形 A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(4) $g(x)=\{f(x)\}^2$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}$ を求めよ。

$\boxed{\text{V}}$ 【数学 ② のみ解答】

円 $C : x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{A}\,(0,\,1)$ と x 軸上の点 $\mathrm{P}\,(a,\,0)$ $(a>1)$ に対して，

直線 AP と円 C の 2 つの共有点のうち，A でない点を Q とする。

また，$\angle\mathrm{OPA}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ とし，$t=\tan\theta$ とおく。$\angle$OPA の O は原点とする。

このとき，次の空所を埋めよ。(配点 35)

(1) $\cos\theta=\boxed{\text{ア}}$，$\sin\theta=\boxed{\text{イ}}$，$\cos 2\theta=\boxed{\text{ウ}}$，$\sin 2\theta=\boxed{\text{エ}}$ と表すことができる。

ただし，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ は t の式である。

(2) a を t の式で表すと，$a=\boxed{\text{オ}}$ である。

点 Q の座標を t を用いて表すと，$\left(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}}\right)$ である。

また，$\mathrm{AQ}:\mathrm{QP}=3:1$ のとき，t の値は $t=\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{VI}}$ 【数学 ② のみ解答】

放物線 $C : y=-x^2+2x+4$ と x 軸との交点を $\mathrm{P}\,(\alpha,\,0)$，$\mathrm{Q}\,(\beta,\,0)$ とする。

ただし，$\alpha<\beta$ とする。このとき，次の問いに答えよ。(配点 40)

(1) α と β の値を求めよ。

(2) $0<t<\beta$ に対して，原点 O と x 軸上の点 $\mathrm{A}\,(t,\,0)$，および放物線 C 上の点 $\mathrm{B}\,(t,\,-t^2+2t+4)$ の 3 点を頂点にもつ直角三角形 OAB の面積を S とする。このとき，S が最大となるような t の値を求めよ。

(3) t が (2) で求めた値をとるとき，線分 OB と y 軸，および放物線 C で囲まれた図形の面積を求めよ。