物理（工学部・情報科学部）

物　　　理

I 空所を埋めよ。ただし，$\boxed{\text{ウ}}$ は語句で，$\boxed{\text{カ}}$ は選択して埋めよ。（配点 60）

質量 M，半径 R で，角速度 ω_0 で自転している球対称な天体の周りを，天体からの万有引力だけを受けて，天体の自転の角速度と同じ角速度 ω_0 で円運動している物体について考える。万有引力定数を G とする。天体の中心からの距離を r で表す。

（1） まず，物体が小さい場合を考えよう。物体の質量を m とする。

小物体が角速度 ω_0 で半径 r の円運動をするとき，その向心加速度の大きさは r と ω_0 を用いて $\boxed{\text{ア}}$ と表される。

天体の中心から r（$>R$）の距離にある質量 m の小物体が天体から受ける万有引力は，天体の中心に天体の全質量が集中しているとしたときと同じで，大きさは $m\times\boxed{\text{イ}}$ で，向きは $\boxed{\text{ウ}}$ である。

小物体が，万有引力により特別な角速度 ω_0 で等速円運動することを表す等速円運動の運動方程式は

$$m\times\boxed{\text{ア}}=m\times\boxed{\text{イ}}\qquad ①$$

である。これが成り立つためには，半径 r は特別な値 r_0 でなければならない。r_0 を ω_0，G，M で表すと $r_0=\boxed{\text{エ}}$ となる。$\dfrac{r_0}{R}=x_0$ とする。ちなみに，地球では $x_0\fallingdotseq 6.6$ である。

（2） 次に，図1のように，天体表面近く（$r=R$）から，r_0 を越えて，$r=L$ の位置まで，天体表面に対して垂直に伸びた細い棒状の構造物を考える。この構造物は，適切に配置すると天体表面に対して静止した状態をエネルギーの供給なしに維持できる。棒を登っていけばロケットより良いエネルギー効率で宇宙へ行ける。このような構造物は宇宙エレベーターと呼ばれる。以下では，棒の材料の質量密度（単位体積当たりの質量）を ρ（一定），棒の断面積を S（一定）とする。

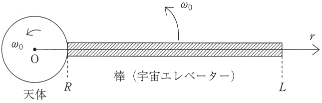

図1　天体と細い棒状の構造物（宇宙エレベーター）

棒の $r\neq r_0$ の部分も角速度 ω_0 で回転するので，棒に沿って r によって変化する張力が発生する。その大きさを $F(r)$ と記す。図2のように，距離 r の位置で長さ Δr（>0）の非常に短い部分を考える。その部分の質量を Δm とする。この部分は，万有引力 $\Delta m\times\boxed{\text{イ}}$ と，断面を通じて棒の他の部分から2つの逆向きの張力 $F(r)$，$F(r+\Delta r)$ を受けて，角速度

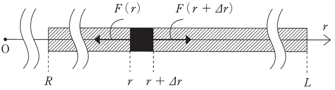

図2　宇宙エレベーターの一部を拡大したもの

ω_0 で等速円運動する。したがって，この部分の等速円運動の運動方程式は，$\Delta m \times$ $\boxed{\text{ア}}$ $=$ $\boxed{\text{オ}}$ となる。これを $\Delta m = \rho S \Delta r$ を用いて整理して，$\dfrac{F(r)}{S}$ を $T(r)$ とおくと

$$\frac{1}{\rho}\frac{T(r+\Delta r)-T(r)}{\Delta r} = \boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ア}} \qquad ②$$

となる。右辺がゼロになるのは $r = r_0$ のときである。$\boxed{\text{イ}}$ が r の減少関数，$\boxed{\text{ア}}$ が r の増加関数であることに注意すると，$r < r_0$ で式②の右辺はゼロより $\boxed{\text{カ｜大き：小さ}}$ くなり，$T(r+\Delta r)$ は $T(r)$ より $\boxed{\text{カ}}$ くなる。よって，$r < r_0$ では $T(r)$ は r の増加関数となる。$r > r_0$ では逆になる。したがって，$T(r)$ が最大になるのは $r =$ $\boxed{\text{キ}}$ のときである。

$T(r)$ の最大値を $T_{\max}$ と記すと，$\dfrac{T_{\max}}{\rho}$ は S や ρ に依存せず，このような棒状構造物をつくる材料の強度を判定するための基準となる。式②と，棒の端では張力がゼロになる条件を用いて計算すると，$\dfrac{T_{\max}}{\rho} \fallingdotseq C \times G^X M^Y R^Z$ となる。C は x_0 で決まる単位のつかない係数である。$T_{\max}$ の単位は $\mathrm{N/m^2}$，ρ の単位は $\mathrm{kg/m^3}$，G の単位は $\boxed{\text{ク}}$ であることを考慮して両辺の単位を比較すると，$X =$ $\boxed{\text{ケa}}$，$Y =$ $\boxed{\text{ケb}}$，$Z =$ $\boxed{\text{ケc}}$ とわかる。

詳しい計算によると，地球では $C \fallingdotseq 0.8$ である。また，地球では $\dfrac{GM}{R^2} \fallingdotseq 9.8\ \mathrm{m/s^2}$，$R \fallingdotseq 6.4 \times 10^6\ \mathrm{m}$ であるから，有効数字1桁で，$\dfrac{T_{\max}}{\rho} \fallingdotseq$ $\boxed{\text{コ}}$ $\dfrac{\mathrm{N/m^2}}{\mathrm{kg/m^3}}$ となる。

(3)　棒状の構造物が壊れないで耐えられる最大の単位面積当たりの張力 T_{B} と，質量密度 ρ は，材料の種類によって決まる。例えば，鉄では $T_{\mathrm{B}} \fallingdotseq 4 \times 10^9\ \mathrm{N/m^2}$，$\rho \fallingdotseq 8 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ である。宇宙エレベーターを作るためには，$\dfrac{T_{\mathrm{B}}}{\rho}$ が $\dfrac{T_{\max}}{\rho}$ より大きな材料が必要である。地球では（2）の最後で求めたように $\dfrac{T_{\max}}{\rho}$ が大きく，鉄のような丈夫な材料でも $\dfrac{T_{\mathrm{B}}}{\rho}$ が小さすぎて，宇宙エレベーターを作るのには使えない。カーボンナノチューブという材料では $T_{\mathrm{B}} \fallingdotseq 6 \times 10^{10}\ \mathrm{N/m^2}$，$\rho \fallingdotseq 0.1 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ で，有効数字1桁で $\dfrac{T_{\mathrm{B}}}{\rho} \fallingdotseq$ $\boxed{\text{サ}}$ $\dfrac{\mathrm{N/m^2}}{\mathrm{kg/m^3}}$ となる。カーボンナノチューブが発見されて以降，宇宙エレベーターは地球でも実現可能性のあるものとして一部の人々の間で注目されている。なお，地球では $L \fallingdotseq 24R$ となる。

Ⅱ 空所を埋め，問いに答えよ。（配点 45）

（1） 極板間に誘電体が挿入されたコンデンサーについて考える。図1に3種類のコンデンサー C_a，C_b，C_c を示す。C_a は極板間すべてを満たすように誘電体が挿入されたものであり，C_b は誘電体が極板面積の半分を満たすように挿入されたもの，C_c は誘電体が挿入されていないものである。なお，3つのコンデンサーの極板面積は S，極板間隔は d とし，誘電体の比誘電率は4とする。また，極板の端の影響は考えないものとする。

C_b の電気容量を真空の誘電率 ε_0，S，d を用いて表すと $\boxed{\text{ア}}$ となる。また，3つのコンデンサーのうち最も電気容量が大きいものは $\boxed{\text{イ}}$ となる。

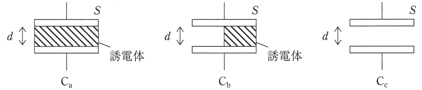

図1

図2のように，コンデンサー C_a，C_b，C_c と起電力 E〔V〕の電池E，およびスイッチ S_1，S_2 を接続した。ここで，コンデンサー C_c の電気容量を C〔F〕とする。また電池の内部抵抗は無視する。はじめは，各コンデンサーにたくわえられている電気量はゼロとし，スイッチ S_1，S_2 はともに開いているものとする。

1）スイッチ S_1 を閉じ，十分に時間が過ぎたとき，C_a にたくわえられた電気量 Q_a を C，E を用いて表せ。

2）次にスイッチ S_1 を開き，スイッチ S_2 を閉じた。十分に時間が過ぎたとき，C_a にたくわえられた電気量 Q_a' を C，E を用いて表せ。

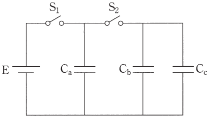

図2

（2） 豆電球のフィラメントは，電流を流すとその温度が大きく変化する導体であり，その抵抗値は電流とともに増加する。これは，電流が大きくなると発生したジュール熱によって導体内の陽イオンの熱運動がより活発となり，自由電子の進行をさらに妨げるからである。したがって，豆電球に流れる電流は豆電球に加わる電圧に比例せず，電流－電圧特性のグラフは図3のようになる。

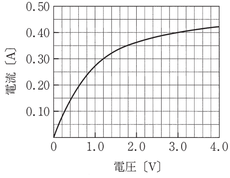

図3

3）ある導体に電圧 E〔V〕を加えて電流 I〔A〕を時間 t〔s〕の間流した場合，導体の発熱量 Q〔J〕はいくらか。E，I，t を用いて答えよ。

図3の電流と電圧の関係をもつ豆電球と6.0Ωの抵抗と3.0Vの電池を用いて図4に示す回路1と回路2を作った。ただし，電池の内部抵抗は無視する。回路1では，豆電球に加わる電圧は $\boxed{\text{ウ}}$ であるから，図3の関係より豆電球に流れる電流は $\boxed{\text{エ}}$ となる。次に回路2において，回路に流れる電流を I'〔A〕，豆電球の両端の電圧を V〔V〕とする。キルヒホッフの第2法則より起電力の和と電圧降下の和の関係は V，I' を用いて表すと $\boxed{\text{オ}}$ となる。

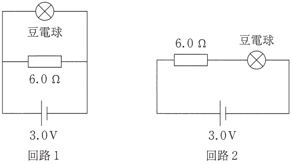

図4

豆電球の特性と回路2に関する条件を同時に満たす I' と V の値を求めるには，$\boxed{\text{オ}}$ の関係を表すグラフを図3のグラフに描き入れ，2つのグラフの交点の値を読み取ればよい。

4）解答欄のグラフに $\boxed{\text{オ}}$ より得られた I' と V の関係を表すグラフを記入せよ。また，I' と V を求めよ。

5）回路1と回路2において，どちらの豆電球が明るいか答えよ。またその理由を簡潔に説明せよ。

Ⅲ 空所を埋め，問いに答えよ。(配点 45)

図1のように，一定の断面積，長さをもつ筒状のシリンダー内を，なめらかに動くことのできるしきりSでA，Bの領域に分ける。領域Aにはモル数（物質量）n_A の単原子分子理想気体が，領域Bにはモル数 n_B の単原子分子理想気体が入っている。シリンダーは熱を伝えない断熱材でできている。一方，Sは熱を伝える物質でできている。始め，Aの気体がSを押す力とBの気体がSを押す力とがつり合っていてSは静止していた。このとき，A内の気体の絶対温度は T_A，体積は V_A であった。一方，B内の気体の絶対温度は T_B，体積は V_B であった。ただし，$T_A < T_B$ とする。この状態を始状態とよぶ。以下では，気体定数を R とする。

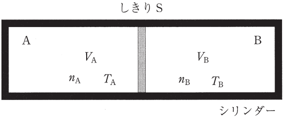

図1 始状態

1）始状態のとき，A内の気体の圧力を n_A，V_A，T_A，R で表せ。

2）始状態のとき，B内の気体の圧力を n_B，V_B，T_B，R で表せ。

3）始状態のとき，A，B内の気体の体積の比 $\dfrac{V_A}{V_B}$ を n_A，n_B，T_A，T_B で表せ。

その後，熱が徐々にしきりSを伝わりB側からA側に移動し始めた。それに伴い，Sは右に移動し始め，ずっと右にゆっくり移動し続けてやがて図2のように静止した。このとき，A，B内の気体の絶対温度は等しく T になっていた。A，B内の気体の圧力も等しくなっていた。この状態を終状態とよぶ。

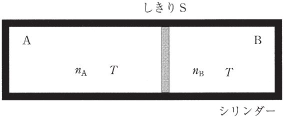

図2 終状態

終状態では，始状態のときと比べるとA内の気体の体積は増加し，B内の気体の体積は減少したが，A，B全体の体積は始状態のときと同じで $V_A + V_B$ である。

4）終状態のとき，A内の気体の体積を n_A，n_B，V_A，V_B で表せ。

A，B内の気体全体の変化は断熱かつ定積変化であるので，熱力学第1法則により，A，B内の気体のもつ全内部エネルギーは始状態と終状態では変化しない。したがって，始状態での全内部エネルギー $U_i = \frac{3}{2} n_A R T_A +$ $\boxed{\quad ア \quad}$ は，終状態での全内部エネルギー $U_f =$ $\boxed{\quad イ \quad}$ $\times T$ と等しく，次の関係式が成立する。

$$\frac{3}{2} n_A R T_A + \boxed{\quad ア \quad} = \boxed{\quad イ \quad} \times T \qquad ①$$

①式を用いて，終状態のときの気体の絶対温度 T を，n_A，n_B，T_A，T_B で表すと $T =$ $\boxed{\quad ウ \quad}$ となる。また，始状態から終状態への変化で，A内の気体の内部エネルギーは増加した。その増加量 $\varDelta U_A$ を n_A，n_B，T_A，T_B，R で表すと $\varDelta U_A =$ $\boxed{\quad エ \quad}$ となる。

5）$\varDelta U_A$ はしきりSを通って移動した熱量 Q と比べて {(a) 大きい，(b) 小さい，(c) 等しい}。
選択肢の中から正しいものを選び記号 (a)，(b)，(c) で答えよ。選んだ理由も書け。