数学〔数学①（工学部・ロボティクス&デザイン工学部）、数学②（全学部）〕

I 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=a$ とおくとき， a の整数部分は $\boxed{\text{ア}}$ である。

また， a の小数部分を b とするとき， $ab=\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) 方程式 $3^{x+2}+3^{1-x}=28$ を解くと， $x=\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ となる。

ただし， $\boxed{\text{ウ}}<\boxed{\text{エ}}$ とする。

(3) $a,\,b$ は $ab=5$ を満たす正の実数とする。

3 つの数 $a,\,b,\,3$ がこの順に等差数列をなすとき， $b=\boxed{\text{オ}}$ である。

また， 3 つの数 $a,\,b,\,3$ がこの順に等比数列をなすとき， $b=\sqrt[3]{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(4) $\cos\alpha$，$\cos\beta$ $(0<\alpha<\beta<\pi)$ が， 2 次方程式 $8x^2-4x-1=0$ の 2 つの解であるとき，

$\cos\alpha\cos\beta=\boxed{\text{キ}}$ ， $\sin\alpha\sin\beta=\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{II}}$ 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 30）

(1) 平面上の 2 つのベクトル $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$，$\vec{b} = (\sin\theta, \cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を考える。
このとき，$|\vec{a}| = \boxed{\text{ア}}$，$|\vec{b}| = \boxed{\text{イ}}$，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sin\left(\theta + \boxed{\text{ウ}}\right)$ である。
ただし，$0 < \boxed{\text{ウ}} < 2\pi$ とする。
さらに，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{5}$ のとき，$\theta = \boxed{\text{エ}}$ である。

(2) 変量 x のデータの値が 3，9，1，7，5 であるとき，
x の分散は $\boxed{\text{オ}}$ である。また，変量 $9 - x$ と x の相関係数は $\boxed{\text{カ}}$ である。

Ⅲ 【数学 ① のみ解答】（配点 40）

(1) 複素数 $\alpha = 1 + \sqrt{3}\,i$ について，次の問いに答えよ。ただし，$i^2 = -1$ とする。

（i） α^2, $\dfrac{1}{\alpha}$ の値をそれぞれ $a + b\,i$（a, b は実数）の形で表せ。

（ii） $z^6 = \alpha^6$ となる複素数 z のうち，実数でないものをすべて掛けた数を求めよ。

(2) n を自然数とする。関数 $f(x) = x^n(1 - x)$（$x \geqq 0$）について，次の問いに答えよ。

（i） $f(x)$ の増減を調べ，極大値をとるときの x の値を求めよ。

（ii） 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を A_n とするとき，

無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ を求めよ。

Ⅳ　【数学 ① のみ解答】

2 つの関数 $f(x)=\sqrt{x}-\log x$，$g(x)=x\,e^{f(x)}$ ($x>0$) について，次の問いに答えよ。
（配点 40）

(1) $f(x)$ を微分せよ。

(2) $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(3) $g(a)=3$ となる実数 a の値を求めよ。

(4) a を (3) で求めた値とする。
$\sqrt{x}=t$ とおき，置換積分法を用いて定積分 $\displaystyle\int_1^a g(x)\,dx$ の値を求めよ。

$\boxed{\text{V}}$ 【数学 ② のみ解答】

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ とすると，方程式 $P(x) = 0$ の 3 つの解の和は $\boxed{\text{ア}}$ である。

また， 整式 $Q(x)$ は $x^2 - 3x + 2$ で割ると $8x + 2$ 余り， $x^2 - 5x + 6$ で割ると $10x + k$ 余るとする。 このとき， 定数 k の値は， $k = \boxed{\text{イ}}$ であり，

$Q(x)$ を $P(x)$ で割ったときの余りは $\boxed{\text{ウ}}$ である。

よって， $P(10)$ と $Q(10)$ の最大公約数は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(2) 座標平面上の点 $\mathrm{P}\,(a, b)$ を中心とする円 C が 2 点 $\mathrm{A}\,(1, 3)$，$\mathrm{B}\,(4, 2)$ を通るとする。

このとき，b と AP^2 をそれぞれ a を用いて表すと，

$b = \boxed{\text{オ}}$，$\mathrm{AP}^2 = \boxed{\text{カ}}$ である。

また， 点 P と直線 $l : x - 2y - 5 = 0$ の距離 d を a を用いて表すと，

$d = \boxed{\text{キ}} \times |a - 1|$ である。

よって， 円 C と 直線 l が共有点をもたないような a の値の範囲は，

$\boxed{\text{ク}} < a < \boxed{\text{ケ}}$ である。

$\boxed{\text{VI}}$ 【数学 ② のみ解答】

2 つの放物線 $C_1 : y = x^2 - 2x + 3$ と $C_2 : y = -x^2 + 2x + 3$ について，
次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) C_2 は C_1 を x 軸に関して対称移動し，さらに，y 軸方向に k だけ平行移動したものである。 k の値を求めよ。

(2) C_1 と C_2 の共有点の x 座標 a, b をそれぞれ求めよ。 ただし， $a < b$ とする。

(3) a, b を (2) で求めた値とし，t を $a < t < b$ を満たす実数とするとき，
2 曲線 C_1，C_2 と 2 直線 $x = \dfrac{t}{2}$，$x = t$ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(4) $S(t)$ の増減を調べ， $S(t)$ が最大値をとるときの t の値を求めよ。