数学〔数学①（工学部・ロボティクス&デザイン工学部）、数学②（全学部）〕

I　【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1)　$a > 0$ とする。 $z = \dfrac{(a+i)^3}{i}$ が実数となるような a の値は $\boxed{\text{ア}}$ であり，

このとき， z の値は $\boxed{\text{イ}}$ である。 ただし， $i^2 = -1$ とする。

(2)　$\log_{10} 2 = p$ とおくとき， $\log_{10} 5$ を p の式で表すと $\boxed{\text{ウ}}$ であり，

$\log_{10} 1.25$ を p の式で表すと $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3)　$k > 0$ とする。 3 次方程式 $x^3 + 2x^2 - kx - 2k = 0$ が 2 重解をもつとき，

$k = \boxed{\text{オ}}$ であり， その 2 重解は $x = \boxed{\text{カ}}$ である。

(4)　箱の中に 2 から 11 までの数字が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードが入っている。

この中から 2 枚のカードを同時に取り出し，書かれた数字を確認する。

これら 2 つの数がともに素数である確率は $\boxed{\text{キ}}$ であり，

2 つの数のうち 1 つだけが素数である確率は $\boxed{\text{ク}}$ である。

Ⅱ 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 30）

(1) 初項 $a_1 = 60$ である等差数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\sum_{k=1}^{16} a_k = 0$ を満たすとき，

$a_{16} =$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，公差は $\boxed{\text{イ}}$ である。

よって，一般項は $a_n =$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) $\mathrm{OA} = \mathrm{AB} = 3$，$\mathrm{OB} = 2$ である $\triangle\mathrm{OAB}$ を考える。

このとき，$\cos\angle\mathrm{AOB} =$ $\boxed{\text{エ}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} =$ $\boxed{\text{オ}}$ である。

また，辺 AB を $t : 1-t$ に内分する点を M，辺 OA を $2 : 1$ に内分する点を N とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BN}}$ が垂直であるとき，$t =$ $\boxed{\text{カ}}$ である。ただし，$0 < t < 1$ とする。

Ⅲ 【数学 ① のみ解答】（配点 40）

(1) 媒介変数表示された曲線 $C : x = t - \sin t$，$y = 1 - \cos t$ （$0 \leqq t \leqq \pi$） について，次の問いに答えよ。

（i） $0 < t < \pi$ のとき， $\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$ をそれぞれ t を用いて表せ。

（ii） $0 < t < \pi$ において， $\dfrac{dy}{dx} = 1$ となるような t の値を求めよ。

（iii） 曲線 C の長さ L を求めよ。

(2) n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

（i） $y = x^3 e^{-nx}$ について， $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

（ii） 関数 $f(x) = x^3 e^{-nx}$ （$1 \leqq x \leqq 5$） が最大値をとるときの x の値を求めよ。

$\boxed{\text{IV}}$ 【数学 ① のみ解答】

xy 平面上に 3 点 $\mathrm{A}(1, 0)$，$\mathrm{P}(p, 0)$，$\mathrm{Q}(p, \log p)$ がある。 ただし， $p > 1$ とする。

このとき， 次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) 直線 AQ の方程式を求めよ。

(2) 関数 $y = \log x$ の第 2 次導関数 y'' を求め， 曲線 $y = \log x$ が上に凸であることを示せ。

(3) 曲線 $y = \log x$ と 直線 AQ で囲まれた図形の面積 $S(p)$ を求めよ。

(4) $\triangle$APQ の面積を $T(p)$ とするとき， 極限値 $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{S(p)}{T(p)}$ を求めよ。

$\boxed{\text{V}}$ 【数学 ② のみ解答】

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1) 座標平面上の点 $(5,\ -2)$ に関して，

点 $\mathrm{A}(3,\ 8)$ と対称な点 B の座標は $\left(\boxed{\ \text{ア}\ },\ \boxed{\ \text{イ}\ }\right)$ である。

また，点 P が放物線 $y = x^2 + 2x - 3$ 上を動くとき，

点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ に関して，点 P と対称な点 Q の軌跡は，放物線 $y = \boxed{\ \text{ウ}\ }$ である。

2 つの放物線 $y = x^2 + 2x - 3$ と $y = \boxed{\ \text{ウ}\ }$ で囲まれた図形の面積は $\boxed{\ \text{エ}\ }$ である。

(2) 2 つの集合

$A = \{\, n \mid n$ は 50 以下の自然数のうち，4 で割り切れる数 $\}$，

$B = \{\, n \mid n$ は 50 以下の自然数のうち，6 で割り切れる数 $\}$

について，集合 $A \cap B$ の要素は $\boxed{\ \text{オ}\ }$ 個あり，集合 $A \cup B$ の要素は $\boxed{\ \text{カ}\ }$ 個ある。

(3) 自然数 n，a，b に対して，次の 2 つの命題を考える。

命題 p ： n が 4 の倍数であることは，n が a の倍数であるための必要条件であるが，十分条件でない。

命題 q ： n が 4 の倍数であることは，n が b の倍数であるための必要条件でも十分条件でもない。

このとき，命題 p が真であるような自然数 a のうち最小のものは，$a = \boxed{\ \text{キ}\ }$ であり，

命題 q が真であるような自然数 b のうち，1 以上 10 以下の数は $\boxed{\ \text{ク}\ }$ 個ある。

$\boxed{\text{VI}}$ 【数学 ② のみ解答】

$f(x)=-3x^3+36x$ とし，$g(x)=3x^3+3x^2-8x$ とする。

また，$h(x)=g(x-p)+q$ とおくとき，次の問いに答えよ。

ただし，p，q は定数とする。（配点 40）

(1) 関数 $f(x)$ を微分せよ。

(2) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(3) $g(x)-h(x)=Ax^2+Bx+C$ が x についての恒等式となるとき，
定数 A，B，C を，それぞれ p と q の式で表せ。

(4) すべての正の数 p に対して，2 次方程式 $g(x)=h(x)$ が実数解をもたないような
q の値の範囲を求めよ。必要ならば，(2) の結果を用いてもよい。