

I 【数学①・数学②, どちらも解答】

ア	$\sqrt{3}$	イ	8	ウ	$1-p$	エ	$1-3p$
オ	4	カ	-2	キ	$\frac{2}{9}$	ク	$\frac{5}{9}$

(40点)

II 【数学①・数学②, どちらも解答】

ア	-60	イ	-8	ウ	$68-8n$
エ	$\frac{1}{3}$	オ	2	カ	$\frac{3}{5}$

(30点)

III

【数学①のみ解答】(解答においては、答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1)

(i) $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$ $\frac{dy}{dt} = \sin t$

(ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = 1 \Rightarrow \sin t = 1 - \cos t \Rightarrow \sqrt{2} \sin(t + \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ ($\because 0 < t < \pi$)

(iii) $(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 = 2(1 - \cos t) = 4 \sin^2 \frac{t}{2} \quad \therefore L = \int_0^\pi 2 \sin \frac{t}{2} dt = 4 \left[-\cos \frac{t}{2} \right]_0^\pi = 4$

(2)

(i) $\frac{dy}{dx} = (x^3 e^{-nx})' = (3x^2 - nx^3)e^{-nx} = x^2(3 - nx)e^{-nx}$

(ii)

x	...	0	...	$\frac{3}{n}$...
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	\nearrow	0	\nearrow	$\frac{27}{e^3 n^3}$	\searrow

$n = 1, 2, 3$ のとき $1 \leq \frac{3}{n} \leq 5$ より $x = \frac{3}{n}$ で最大

$n \geq 4$ のとき $\frac{3}{n} < 1$ より $x = 1$ で最大

(40点)

IV

【数学①のみ解答】(解答においては、答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $y = \frac{\log p}{p-1}(x-1)$

(2) $(\log x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$

(3) $S(p) = \int_1^p \left(\log x - \frac{\log p}{p-1}(x-1) \right) dx = \left[x \log x - x - \frac{\log p}{p-1} \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \right]_1^p = \frac{1}{2}(p+1) \log p - p + 1$

(4) $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{S(p)}{T(p)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(p+1) \log p - p + 1}{\frac{1}{2}(p-1) \log p} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{p+1}{p-1} - \frac{2}{\log p} \right) = 1$

(40点)

V 【数学②のみ解答】

ア	7	イ	-12	ウ	$-x^2 + 4x + 1$
エ	9				
オ	4	カ	16		
キ	8	ク	6		

(40点)

VI 【数学②のみ解答】(解答においては、答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $f'(x) = -9x^2 + 36 = -9(x^2 - 4)$

(2)

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	-48	↗	48	↘

$x = 2$ で極大 極大値 48

$x = -2$ で極小 極小値 -48

(3) $g(x) - h(x) = 9px^2 + (-9p^2 + 6p)x + 3p^3 - 3p^2 - 8p - q$

$\therefore A = 9p \quad B = -9p^2 + 6p \quad C = 3p^3 - 3p^2 - 8p - q$

(4) 2次方程式 $g(x) - h(x) = 9px^2 + (-9p^2 + 6p)x + 3p^3 - 3p^2 - 8p - q = 0$ の判別式は

$D = -27p^4 + 324p^2 + 36pq = 9p(-3p^3 + 36p + 4q) = 9p(f(p) + 4q)$

条件より

すべての $p > 0$ に対して $\frac{D}{9p} = f(p) + 4q < 0$

となればよいが、これは

$(p > 0$ における $f(p)$ の極大値) $+ 4q < 0$

と同値、即ち (2) の結果より

$48 + 4q < 0 \quad \therefore q < -12$

(40点)