Ⅰ　【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1)　2 つの実数 α，β が，$\begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ \alpha^2+\beta^2=3 \end{cases}$ を満たすとき，

$\alpha\beta=$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，$\alpha=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。ただし，$\alpha>\beta$ とする。

(2)　関数 $f(x)=\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$ について，$f(x)$ の x^{12} の係数は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

また，$f(x)$ の最小値は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3)　直線 $kx-y=2-k$ と円 $x^2+y^2=1$ が接するとき，実数 k の値は

$k=$ $\boxed{\text{オ}}$ である。このとき，接点の x 座標は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(4)　次のデータの平均値が 1.8 であるとき，$p=$ $\boxed{\text{キ}}$ であり，

そのときの四分位範囲は $\boxed{\text{ク}}$ である。

1，2，p，0，5，1，5，1，0，1

$\boxed{\text{II}}$ 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 30）

(1) 平面上に 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。

点 P_1，P_2，$\cdots$，P_7，Q_1，Q_2，$\cdots$，Q_7 を，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}_n} = n\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}_n} = n\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ （$n = 1, 2, \cdots, 7$）によって定める。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \boxed{\text{ア}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}_4} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}_4} = \boxed{\text{イ}}$ であり，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \overrightarrow{\mathrm{AP}_k} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}_k} = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) 底面が 1 辺の長さ 1 の正方形 ABCD で 頂点が O の四角錐 O-ABCD がある。

$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{OD} = 2$ とし，点 A から 辺 OB に下ろした垂線を AM とする。

このとき，$\mathrm{AM} = \boxed{\text{エ}}$ であり，$\cos\angle\mathrm{AMC} = \boxed{\text{オ}}$ である。

また，$\triangle\mathrm{AMC}$ の面積は $\boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{Ⅲ}}$ 【数学 ① のみ解答】（配点 40）

(1) 次の問いに答えよ。 ただし， $i^2 = -1$ とする。

（i） 複素数 $-\sqrt{3}+i$ を極形式 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ で表せ。

ただし， $r>0$，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

（ii） $z = \left(\dfrac{1+i}{-\sqrt{3}+i}\right)^n$ が実数となるような最小の自然数 n を求めよ。

また， そのときの z の値を求めよ。

(2) 関数 $f(x) = xe^{2x}$ について， 次の問いに答えよ。

（i） 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ。

（ii） $g(x) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$ とおくとき， $g(1)$ を求めよ。

$\boxed{\text{IV}}$ 【数学 ① のみ解答】

自然数 n に対して， $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$ とする。

このとき，次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) $\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{A}{(1+x^2)^2} + \frac{B}{1+x^2}$ が x についての恒等式となるとき，

定数 A，B の値を求めよ。

(2) $x = \tan\theta$ とおき， 置換積分法を用いて $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ。

(3) $\frac{1}{(1+x^2)^n} = 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n}$ と考えることにより，I_n に部分積分法を用いて，

I_{n+1} と I_n についての関係式を求めよ。

$\boxed{\mathrm{V}}$ 【数学 ② のみ解答】

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1) 実数 x, y は $x \geqq 2$，$y \geqq 8$，$xy = 64$ を満たすとする。

$\log_2 x = X$，$\log_2 y = Y$ とおくとき，$X + Y =$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，

X の値の範囲は $1 \leqq X \leqq$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

また，積 XY は $x =$ $\boxed{\text{ウ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。

(2) 放物線 $y = x^2 - 2x - 3$ を C とし，点 $(4,\ 0)$ を通る傾き k の直線を l とする。

ただし，k は実数とする。C と l が 異なる 2 つの共有点をもつとき，

k の値の範囲は，$k <$ $\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ $< k$ である。このとき，

2 つの共有点を結ぶ線分の中点 P の x 座標を k を用いて表すと $\boxed{\text{キ}}$ であり，

点 P の軌跡は放物線 $y =$ $\boxed{\text{ク}}$ の一部である。

VI 【数学 ② のみ解答】

座標平面上に 3 点 $A(1,\ 0)$，$P(t,\ 0)$，$Q(t,\ t^2(1-t))$ がある。ただし，$0<t<1$ とする。

曲線 $y=x^2(1-x)$，線分 AP および 線分 PQ で囲まれた図形の面積を S とし，

$\triangle$APQ の面積を T とする。このとき，次の問いに答えよ。

ただし，$\displaystyle\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C$ （C は積分定数）を用いてよい。（配点 40）

(1) S を t を用いて表せ。

(2) T を t を用いて表せ。

(3) $0<t<1$ における T の最大値を求めよ。

(4) $S=2T$ となるような t の値を求めよ。