一般入試前期Ａ日程１日目

数　学

Ⅰ　【数学①・数学②，どちらも解答】

ア	12	イ	$12\sqrt{13}$
ウ	-5	エ	$\sqrt{3}-\sqrt{5}$
オ	2	カ	$2\sqrt{3}$
キ	$\frac{19}{27}$	ク	$\frac{1}{3}$

Ⅱ　【数学①・数学②，どちらも解答】

ア	$2x-6y+6$		
イ	$\sqrt{10}-2$	ウ	$\sqrt{10}+2$
エ	$\frac{3}{4}$		
オ	4	カ	5
キ	$\frac{9}{10}$		

Ⅲ 【数学①のみ解答】(解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) (ⅰ) $z=1$ より $w=\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{1}{2}(1-i)^2=-i$

$|w|=1$，$\arg w=\dfrac{3}{2}\pi$

(ⅱ) $|w|^2=\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|^2=\dfrac{1}{4}$ より $3|z|^2-5i\overline{z}+5iz+3=0$

これを変形して $\left|z-\dfrac{5}{3}i\right|^2=\dfrac{16}{9}$ つまり $\left|z-\dfrac{5}{3}i\right|=\dfrac{4}{3}$

したがって，中心 $\dfrac{5}{3}i$，半径 $\dfrac{4}{3}$ の円.

(2) (ⅰ) 部分積分法による.

$J_1=\int_1^e \log x\,dx=[x\log x-x]_1^e=1$

$J_2=\int_1^e (\log x)^2\,dx=[x(\log x)^2]_1^e-2J_1=e-2$

(ⅱ) $I=\int_1^e 1\,dx+2aJ_1+a^2J_2=(e-1)+2a+a^2(e-2)$

平方完成：$I=(e-2)\left\{a+\dfrac{1}{e-2}\right\}^2-\dfrac{1}{e-2}+e-1$ より，

Iが最小となるのは $a=-\dfrac{1}{e-2}$ のとき.

Ⅳ 【数学①のみ解答】(解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

(2) $f'(x)=0$ のとき $x=\pm1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

$x=-1$のとき極小値$-\dfrac{1}{2}$，$x=1$のとき極大値$\dfrac{1}{2}$

(3) $x^{\frac{1}{3}}=t$ とおくと $dx=3t^2dt$

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}}{1+(\sqrt[3]{x})^2}dx=\int\frac{3t^3}{1+t^2}dt=\int 3\left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt$$
$$=\frac{3}{2}\left(t^2-\log(1+t^2)\right)+C$$
$$=\frac{3}{2}\left(x^{\frac{2}{3}}-\log(1+x^{\frac{2}{3}})\right)+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[3]{\frac{k}{n}}}{1+\left(\sqrt[3]{\frac{k}{n}}\right)^2}$ と変形できる. 区分求積法より，

$$\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x}}{1+(\sqrt[3]{x})^2}dx=\left[\frac{3}{2}\left(x^{\frac{2}{3}}-\log(1+x^{\frac{2}{3}})\right)\right]_0^1=\frac{3}{2}(1-\log 2)$$

Ⅴ 【数学②のみ解答】

ア	2	イ	-1
ウ	$\frac{1}{84}$		
エ	$\sqrt{2}$	オ	$8t(1-t)$
カ	$\frac{16}{3}t^2(1-t)$	キ	$\frac{2}{3}$
ク	$\frac{64}{81}$		

Ⅵ 【数学②のみ解答】(解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $y=\dfrac{3-1}{4-2}(x-2)+1$ より $y=x-1$

(2) BC の中点なので (5, 3)

(3) 放物線を $y=a(x-5)^2+3$ とおくとこの放物線が $y=x-1$ に接するので

$$ax^2-(10a+1)x+(25a+4)=0$$

の判別式：$D=(10a+1)^2-4a(25a+4)=4a+1=0$ より $a=-\dfrac{1}{4}$

よって，$y=-\dfrac{1}{4}(x-5)^2+3=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{5}{2}x-\dfrac{13}{4}$

このとき，グラフの対称性から直線CD でも接する．

$$a=-\frac{1}{4},\ b=\frac{5}{2},\ c=-\frac{13}{4}$$

(4) AD の方程式は $y=1$ なので AD と放物線との交点の x 座標は

$-\dfrac{1}{4}(x-5)^2+3=1$ より $x=5\pm2\sqrt{2}$

面積 S は

$$S=\int_{5-2\sqrt{2}}^{5+2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x-\frac{13}{4}-1\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{12}x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{17}{4}x\right]_{5-2\sqrt{2}}^{5+2\sqrt{2}}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$$