一般入試後期D日程

数　学

I　【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

ア	$-\dfrac{5}{3}$	イ	$-\dfrac{10}{3}$
ウ	$\dfrac{7}{6}\pi$	エ	$\dfrac{11}{6}\pi$
オ	-1	カ	2
キ	$(x+1)(x-9)^2$	ク	10

II　【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

ア	$-\dfrac{3}{2}$	イ	$\sqrt{3}$
ウ	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$		
エ	$\dfrac{1}{6}$	オ	$\dfrac{1}{3}$
カ	$\dfrac{2}{3}$		

III 【数学 ① のみ解答】

(1)

(i) $y' = \dfrac{1}{x}$ より接線の傾きは $\dfrac{1}{a}$

よって，接線の方程式は　$y = \dfrac{1}{a}x + \log a - 1$

また，接線の傾きが $\dfrac{1}{a}$ であるから，法線の傾きは $-a$ である。

よって，法線の方程式は　$y = -ax + \log a + a^2$

(ii) $(1, 0)$ における法線は $y = -x + 1$

$y = -ax + \log a + a^2$ とともに x について解くと，

$x = \dfrac{\log a + a^2 - 1}{a - 1}$

よって，$g(a) = \dfrac{\log a + a^2 - 1}{a - 1}$

(iii) $\lim_{a\to 1} g(a) = \lim_{a\to 1} \dfrac{\log a + a^2 - 1}{a - 1} = \lim_{a\to 1}\left(\dfrac{\log a - \log 1}{a - 1} + a + 1\right)$

$= f'(1) + 2 = 3$

(2)

(i) $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \dfrac{\beta}{\alpha} + 1 = 0$

ここで，$\dfrac{\beta}{\alpha} = a + bi$ (ただし，a, b は実数) とおいて解くと，

$\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(ii) $\beta = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{2}\alpha = \left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\alpha$

よって，β は α を 原点を中心に $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 回転させた点

IV 【数学 ① のみ解答】

(1) $\displaystyle\int_a^{a+\pi/2} |\cos x|\,dx = \int_a^{\pi/2}\cos x\,dx - \int_{\pi/2}^{a+\pi/2}\cos x\,dx = [\sin x]_a^{\pi/2} - [\sin x]_{\pi/2}^{a+\pi/2}$

$= 1 - \sin a - \sin\left(a + \dfrac{\pi}{2}\right) + 1 = 2 - (\sin a + \cos a)$

(2) $2 - (\sin a + \cos a) = 2 - \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin a + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos a\right)$

$= 2 - \sqrt{2}\sin\left(a + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$a = \dfrac{\pi}{4}$ のとき最小値 $2 - \sqrt{2}$

(3) $V = 2\pi\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2 x\,dx = 2\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1 + \cos 2x}{2}\,dx = \pi\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$

$= \dfrac{\pi(\pi - 2)}{4}$

$\boxed{\mathrm{V}}$ 【数学 ② のみ解答】

ア	$\sqrt{6}$		
イ	$\dfrac{2}{3}$	ウ	$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
エ	3	オ	$\dfrac{23}{3^{n-1}} - 3$
カ	$\dfrac{81}{2} - 3n - \dfrac{23}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$		

$\boxed{\text{VI}}$ 【数学 ② のみ解答】

(1) $f'(x) = 4x^3 + 2ax + b$

$f'(1) = 4 + 2a + b = 0$ かつ $f(1) = 1 + a + b + 12 = 13$ を解いて,

$a = -4$, $b = 4$

(2) $f'(x) = 4x^3 - 8x + 4 = 4(x-1)(x^2+x-1)$

$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

として増減表を書くと,

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	13	$\nearrow$

(これは $x = 1$ での条件を満たす)

極大値をとるときの x の値は $\beta = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(3) $f'(p) = f'(-p) \Rightarrow 4p^3 - 8p + 4 = -4p^3 + 8p + 4$

$\Rightarrow 8p^3 - 16p = 8p(p^2-2) = 0 \Rightarrow p > 0$ より $p = \sqrt{2}$

$f'(\sqrt{2}) = 8\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 4 = 4$

$f(\sqrt{2}) = 4 - 8 + 4\sqrt{2} + 12 = 8 + 4\sqrt{2}$,

$f(-\sqrt{2}) = 4 - 8 - 4\sqrt{2} + 12 = 8 - 4\sqrt{2}$

点 $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$ における接線は, $y = 4(x-\sqrt{2}) + (8+4\sqrt{2}) = 4x + 8$

点 $(-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2}))$ における接線は, $y = 4(x+\sqrt{2}) + (8-4\sqrt{2}) = 4x + 8$

両点における接線が一致するので l の方程式は $y = 4x + 8$

(4) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (f(x) - (4x+8))\,dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^4 - 4x^2 + 4)\,dx$

$\displaystyle = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 4x\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 4x\right]_0^{\sqrt{2}}$

$\displaystyle = 2\left(\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{8\sqrt{2}}{3} + 4\sqrt{2}\right) = \frac{64\sqrt{2}}{15}$