I 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。(配点 40)

(1) 2 次方程式 $x^2 - 8x + 19 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき，

$\alpha\beta(\alpha + \beta) =$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，$\alpha^3 + \beta^3 =$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $\displaystyle\int_0^2 \left|x^2 - 1\right| dx =$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。

また，関数 $f(x) = \left|x^2 - 1\right| + \left|x + 1\right|$ の最小値は，$\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^s = 243$ となる実数 s の値は，$s =$ $\boxed{\text{オ}}$ である。

また，$3^{t^2-9t+3} < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2t-3}$ が成り立つような実数 t の値の範囲は，

$0 < t <$ $\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 1 個のさいころを 2 回続けて投げて出た目の数を順に a, b とする。

$\dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{5}$ が自然数となる確率は $\boxed{\text{キ}}$ であり，$\dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{4}$ が自然数となる確率は

$\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\mathrm{II}}$ 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 30）

(1) 座標空間内の 3 点 O (0, 0, 0), A (2, 1, 1), B (1, 0, 2) を考える。

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると，$\cos\theta = \boxed{\text{ア}}$ である。

また，点 P $(a, 7, -1)$ が 3 点 O, A, B の定める平面上にあるような実数 a の値は，

$a = \boxed{\text{イ}}$ である。さらに，直線 AB 上の点 Q が $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たすとき，

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{\text{エ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。a_n と S_n が

$$S_n = \frac{n+3}{2}a_n - 6 \ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとき，$a_1 = \boxed{\text{オ}}$ である。また，$S_{n+1} - S_n$ を計算することによって，

$\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{\text{カ}}$ であることがわかる。

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot a_{k+1} = \frac{4}{3}\left(\boxed{\text{キ}}\right)$ である。ただし，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ は n の整式である。

$\boxed{\text{Ⅲ}}$ 【数学 ① のみ解答】(配点 40)

(1) 次の空所を埋めよ。ただし，$i^2 = -1$ とする。

0 でない複素数 α, β は $4\alpha^2 - 6\alpha\beta + 9\beta^2 = 0$ を満たし，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の偏角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とする。

このとき，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の値は，$\dfrac{\alpha}{\beta} = \boxed{\text{ア}}$ であり，$\theta = \boxed{\text{イ}}$ である。

また，$|\beta| = 4$ のとき，$\alpha - \beta = \beta\left(\dfrac{\alpha}{\beta} - 1\right)$ を用いると，$|\alpha - \beta|$ の値は，

$|\alpha - \beta| = \boxed{\text{ウ}}$ であり，複素数平面上の 3 点 O(0)，A(α)，B(β) を頂点とする

三角形 OAB の面積を S とすると，$S = \boxed{\text{エ}}$ である。

(2) 次の問いに答えよ。

(i) $f(x) = A(x-2)(x-3) + B(x-3)(x-1) + C(x-1)(x-2)$ とおく。

$f(1) = f(2) = f(3) = 1$ のとき，定数 A, B, C の値を求めよ。

(ii) 不定積分 $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right) dx$ を求めよ。

(iii) 定積分 $\displaystyle\int_4^5 \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\, dx$ を求めよ。

Ⅳ 【数学 ① のみ解答】

関数 $f(x)=e^{3x}$ について，次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) $f'(x)=6$ となるような x の値を求めよ。

(2) a を正の定数とし，$g(x)=3ax-f(x)$ とおく。
関数 $g(x)$ の増減を調べ，$g(x)$ の最大値 $G(a)$ を a の式で表せ。

(3) b を定数とし，(2) で求めた $G(a)$ の式を用いて，$h(x)=3bx-G(x)$（$x>0$）とおく。
関数 $h(x)$ の増減を調べ，$h(x)$ の最大値 $H(b)$ を b の式で表せ。

(4) (3) で求めた $H(b)$ について，$\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx=\frac{H(b)}{4}$ を満たす b の値を求めよ。

$\boxed{\text{V}}$ 【数学 ② のみ解答】

次の空所を埋めよ。(配点 40)

(1) $f(x) = \log_2(7x+1)$ とする。関数 $f(x)$ の定義域は, $x > \boxed{\text{ア}}$ である。

$f(1) = \boxed{\text{イ}}$ である。$\log_4 y = f(2)$ のとき,正の実数 y の値は, $y = \boxed{\text{ウ}}$ である。

また,自然数 $m,\ n$ が $f(m) = 2\log_2 3 + \log_2 n$ を満たすとする。

自然数の組 (m, n) のうち, $1 \leqq m \leqq 100$ を満たすものは全部で $\boxed{\text{エ}}$ 組ある。

(2) 円 C_1: $x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$ の中心 A の座標は $\left(\boxed{\text{オ}},\ 0\right)$ であり,

半径 r の値は, $r = \boxed{\text{カ}}$ である。また, θ を $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし,

円 C_2: $(x - \cos\theta)^2 + (y - \sin\theta)^2 = 1$ が C_1 と接しているとき, $\cos\theta = \boxed{\text{キ}}$ である。

このとき,円 C_2 の中心を B とすると,原点 O を通る直線 $y = mx$ が

$\angle$AOB を二等分するような定数 m の値は, $m = \boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{VI}}$ 【数学 ② のみ解答】

関数 $f(x) = x^2 + 4x + \sqrt{5}$ について，次の問いに答えよ。（配点　40）

(1)　曲線 $y = f(x)$ について，傾きが 2 であるような接線の方程式を求めよ。

(2)　a を定数とし，$g(x) = 2ax - f(x)$ とおく。関数 $g(x)$ を微分し，$g(x)$ の増減表をつくれ。また，$g(x)$ の最大値 $G(a)$ を a の式で表せ。

(3)　b を定数とし，(2) で求めた $G(a)$ の式を用いて，$h(x) = 2bx - G(x)$ とおく。関数 $h(x)$ を微分し，$h(x)$ の増減表をつくれ。また，$h(x)$ の最大値 $H(b)$ を b の式で表せ。

(4)　(3) で求めた $H(b)$ について，$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = 3H(b)$ を満たす b の値をすべて求めよ。