I 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。(配点 40)

(1) 方程式 $1+\log_2 x=\log_2(3-x)$ の解は，$x=$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，

方程式 $\log_2(x-2)^2+2\log_2(x-2)=2\log_2 2x$ の解は，$x=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) 平面上に異なる 4 点 O, A, B, C をとる。$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2,\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1,\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\dfrac{3}{2}$ であるとき，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=1,\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ が成り立つとき，

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=$ $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) 143 と 221 の最大公約数は $\boxed{\text{オ}}$ である。また，$143a+221b=650$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ について，$0\leqq a+b\leqq 50$ を満たすものは全部で $\boxed{\text{カ}}$ 個ある。

(4) 変量 x の 3 個の値 $1,\ 0,\ a$ からなるデータの平均値を $\overline{x}$，分散を s^2 とする。

$\overline{x}<2$ であるとき，実数 a のとりうる範囲は，$a<$ $\boxed{\text{キ}}$ である。

さらに，$s^2<\dfrac{2}{3}$ であるとき，実数 a のとりうる範囲は，$-1<a<$ $\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{II}}$ **【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】**

次の空所を埋めよ。（配点 30）

(1) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = 3 \cdot 2^n - 5$（$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）で定める。

このとき，$b_n = a_{n+1} - a_n$ （$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）とおくと，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\boxed{\text{ア}}$，公比 $\boxed{\text{イ}}$ の等比数列である。また，$\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2} = \boxed{\text{ウ}}\, a_{n+1} - \boxed{\text{エ}}\, a_n$ を満たす。ただし，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ は n を含まない実数とする。

$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を n の式で表すと，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{\text{オ}}$ となる。

(2) 連立方程式 $\begin{cases} 2\sin y = 3\sqrt{3} - 4\sin x \\ 2\cos y = 3 + 4\cos x \end{cases}$ の解 $(x,\ y)$ について考える。

ただし，$0 \leqq x < 2\pi$，$0 \leqq y < 2\pi$ とする。

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ を用いると，$\sqrt{3}\sin x - \cos x = \boxed{\text{カ}}$ であることがわかる。

ただし，$\boxed{\text{カ}}$ は x を含まない実数とする。また，三角関数の合成により，

$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\sin\left(x + \boxed{\text{キ}}\right)$ と表される。ただし，$0 \leqq \boxed{\text{キ}} < 2\pi$ とする。

よって，x の値は，$x = \boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{Ⅲ}}$ 【数学 ① のみ解答】(配点 40)

(1) $i^2=-1$ とし，$z=1+\sqrt{3}\,i$ とする。このとき，次の空所を埋めよ。

(i) $\arg z=$ $\boxed{\text{ア}}$，$|z|=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。ただし，$0\leqq$ $\boxed{\text{ア}}$ $<2\pi$ とする。

また，複素数 w が $|w-z|=1$ を満たすとき，$\arg w$ の値の範囲は，

$\boxed{\text{ウ}}$ $\leqq \arg w \leqq$ $\boxed{\text{エ}}$ である。ただし，$0\leqq$ $\boxed{\text{ウ}}$ $<$ $\boxed{\text{エ}}$ $<2\pi$ とする。

(ii) m,n を $1\leqq m\leqq 30,\ 1\leqq n\leqq 30$ を満たす整数とする。

$\dfrac{z^m}{(1+i)^n}$ が実数になるような整数の組 $(m,\ n)$ は全部で $\boxed{\text{オ}}$ 個ある。

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ について，曲線 $y=f(x)$ と直線 $x=1$ および

x 軸，y 軸で囲まれた図形を A とする。次の問いに答えよ。

(i) A の面積 S を求めよ。

(ii) A の周の長さ L を求めよ。

$\boxed{\text{Ⅳ}}$ **【数学 ① のみ解答】**

関数 $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ について，次の問いに答えよ。（配点　40）

(1) $f'(x)$ を求めよ。また，$f''(x) = 0$ となる x の値をすべて求めよ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ の増減を調べて，極値を求めよ。また，曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べ，変曲点をすべて求めよ。

(4) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$x = \sqrt{3}$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{\text{V}}$ **【数学 ② のみ解答】**

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1) 原点 O を中心とする円 $x^2 + y^2 = 16$ と直線 $y = k$（$2 \leqq k \leqq 3$）の 2 つの共有点を A, B とする。三角形 OAB の面積 S を k を用いて表すと，$S = \sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ である。$S = 2\sqrt{15}$ のとき，k の値は，$k = \boxed{\text{イ}}$ である。また，S が最大となるときの k の値は，$k = \boxed{\text{ウ}}$ であり，このとき，$\angle\text{AOB} = \boxed{\text{エ}}^\circ$ である。

(2) 正八面体 ABCDEF の 8 つの面をそれぞれ赤か白で塗る。

ただし，各面にはその面を囲む 3 本の辺も含めるが，各辺の色は考えなくてよい。

(i) 4 つの面だけが赤となる塗り方は $\boxed{\text{オ}}$ 通りである。

(ii) 4 つの面だけが赤であり，どの赤の面も他の赤の面とは辺を共有しない塗り方は $\boxed{\text{カ}}$ 通りである。

(iii) 3 つの面だけが赤であり，どの赤の面も他の赤の面とは辺を共有しない塗り方は $\boxed{\text{キ}}$ 通りである。

(iv) 2 つの面だけが赤であり，どの赤の面も他の赤の面とは辺を共有しない塗り方は $\boxed{\text{ク}}$ 通りである。

$\boxed{\text{VI}}$ 【数学 ② のみ解答】

実数 $a \geqq 0$ に対して, $S(a) = \displaystyle\int_0^1 \left| x^2 - a^2 \right| dx$ とおくとき，次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) $a \geqq 1$ のとき，$S(a)$ を求めよ。

(2) $0 \leqq a < 1$ のとき，$S(a)$ を求めよ。

(3) $S(a)$ の最小値を求めよ。

(4) $S(a) > \dfrac{1}{3}$ を満たす a の値の範囲を求めよ。