一般入試前期B日程

数　学

Ⅰ　【数学①・数学②，どちらも解答】

ア	1	イ	$3+\sqrt{5}$
ウ	$\frac{11}{8}$	エ	$\frac{5}{2}$
オ	13	カ	8
キ	5	ク	2

Ⅱ　【数学①・数学②，どちらも解答】

ア	6	イ	2
ウ	3	エ	2
オ	$6(2^n-1)-5n$		
カ	2	キ	$\frac{11\pi}{6}$
ク	$\frac{2\pi}{3}$		

Ⅲ 【数学①のみ解答】((2)の解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい)

ア	$\frac{\pi}{3}$	イ	2
ウ	$\frac{\pi}{6}$	エ	$\frac{\pi}{2}$
オ	70		

(2)

(i) $S=\int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^1=\frac{e-e^{-1}}{2}$

(ii) $f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ より $\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ だから

$\int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^1=\frac{e-e^{-1}}{2}$ が曲線部分の長さ

よって 周の長さは $L=1+f(0)+f(1)+\frac{e-e^{-1}}{2}=1+1+\frac{e+e^{-1}}{2}+\frac{e-e^{-1}}{2}=2+e$

Ⅳ 【数学①のみ解答】(解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $f'(x)=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$, $f''(x)=\dfrac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$ より $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}}=2$

(3) 増減表は

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	2

なので $x=0$ のとき極小値 0 をとる。変曲点は $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{2}\right)$ の 2 点。

(4) $x=\tan\theta$ とおくと

$$S=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{2}{\cos^2\theta}-2\right)\,d\theta=\Big[2\tan\theta-2\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{4\sqrt{3}-\pi}{3}$$

Ⅴ 【数学②のみ解答】

ア	$16k^2-k^4$	イ	$\sqrt{6}$
ウ	$2\sqrt{2}$	エ	90
オ	70	カ	2
キ	8	ク	16

Ⅵ 【数学②のみ解答】(解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $a \geqq 1$ のとき　$S(a)=\displaystyle\int_0^1 (a^2-x^2)\,dx = a^2-\frac{1}{3}$

(2) $0 \leqq a < 1$ のとき $x \leqq a$ と $x \geqq a$ で積分区間を分けて

$$S(a)=\int_0^a (a^2-x^2)\,dx+\int_a^1 (x^2-a^2)\,dx=\frac{4}{3}a^3-a^2+\frac{1}{3}$$

(3) $a \geqq 1$ のとき　$S'(a)=2a>0$ より単調増加。

$0 \leqq a < 1$ のとき $S'(a)=4a^2-2a=2a(2a-1)$ となる。増減表をつくると

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(a)$		$-$	0	$+$		$+$
$S(a)$	$\frac{1}{3}$	↘	$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{2}{3}$	↗

よって $S(a)$ は $a=\dfrac{1}{2}$ において最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

(4) $a \geqq 1$ では常に $S(a)>\dfrac{1}{3}$ である。$0 \leqq a < 1$ のとき $4a^3-3a^2>0$ より $a>\dfrac{3}{4}$