数学〔数学①(工学部･ロボティクス&デザイン工学部)、数学②(全学部)〕

I 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1) 関数 $f(x)=x^2-2px-2p-3$ の最小値が -2 であるとき，実数 p の値は，

$p=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。このとき，2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解を α，β とすると，

$(\alpha-3)(\beta-3)=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) 実数 k が $3^{2k}+3^{-2k}=7$ を満たすとき，$3^k+3^{-k}=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。

さらに，$3^k<3^{-k}$ であるとき，$3^k=$ $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) m, n は自然数とする。

$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{7}$ かつ $m<n$ のとき，$m=$ $\boxed{\text{オ}}$ である。

また，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{57}$ かつ $m<n$ を満たす組 (m,n) は全部で $\boxed{\text{カ}}$ 個ある。

(4) 10 本のくじの中に当たりくじが 2 本ある。この中から 3 本のくじを同時に引くとき，

当たりくじを少なくとも 1 本引く確率は $\boxed{\text{キ}}$ であり，

当たりくじをちょうど 1 本だけ引く確率は $\boxed{\text{ク}}$ である。

Ⅱ 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 30）

(1) 2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は

$$\begin{cases} a_n + b_n = 2^n + \dfrac{1}{2^n} \\ a_n - b_n = (-2)^n + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \end{cases} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。このとき，$a_1 = \boxed{\text{ア}}$ である。

また，$c_n = 2\,b_{2n-1} - a_{2n}$ （$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）とおくとき，

数列 $\{c_n\}$ は初項 $\boxed{\text{イ}}$，公比 $\boxed{\text{ウ}}$ の等比数列である。

(2) $\triangle$ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，

3 直線 AP，BQ，CR が 1 点 M で交わるとする。

また，$a > 0$ として，AQ : QC $= 2 : a$， BM : MQ $= 1 : 4$ であるとする。

このとき，$\dfrac{\text{AC}}{\text{AQ}}$，$\dfrac{\text{CP}}{\text{BP}}$，$\dfrac{\text{BR}}{\text{AR}}$ をそれぞれ a の式で表すと，

$\dfrac{\text{AC}}{\text{AQ}} = \boxed{\text{エ}}$，　$\dfrac{\text{CP}}{\text{BP}} = \boxed{\text{オ}}$，　$\dfrac{\text{BR}}{\text{AR}} = \boxed{\text{カ}}$ である。

III 【数学 ① のみ解答】

次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) 次の空所を埋めよ。

i を虚数単位とする。複素数 $z=\dfrac{1+4i}{3-5i}$ の絶対値と偏角はそれぞれ，

$|z|=$ $\boxed{\text{ア}}$，$\arg z=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。ただし，$0 \leqq$ $\boxed{\text{イ}}$ $< 2\pi$ とする。

また，z^4 を計算すると，$z^4=$ $\boxed{\text{ウ}}$ は実数であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\boxed{\text{ウ}}\right)^n=$ $\boxed{\text{エ}}$ である。

(2) $A=\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx$，$B=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$ とするとき，次の問いに答えよ。

(i) $A+B$ および $A-B$ を求めよ。

(ii) $a>0$ とし，$I=\displaystyle\int_0^{\pi}\left(a\sin x+\frac{2}{a}\cos x\right)^2 dx$ とする。

I が最小となるときの a の値と，そのときの I の値を求めよ。

Ⅳ 【数学 ① のみ解答】

関数 $f(x)=3\log\left(e^{x}+e^{-2x}\right)$ について，次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) 関数 $y=e^{x}+e^{-2x}$ を微分せよ。

(2) $f(x)$ を微分せよ。また，$f'(x)=0$ を満たす実数 x の値を求めよ。

(3) $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ を求めよ。

$\boxed{\text{V}}$ 【数学 ② のみ解答】

次の空所を埋めよ。

ただし，(2) の $\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ は，最下部の〈選択肢〉1 〜 4 の中からそれぞれ 1 つ選び，その数字を解答欄に記入せよ。同じものを繰り返し選んでもよい。例えば，〈選択肢〉から 2 を選ぶときは，解答欄に 2 と記入せよ。（配点 40）

(1) $\triangle$OAB について，OA $= 5$，OB $= 6$，AB $= 4$ とし，$\angle$ AOB $= \theta$ とおく。

このとき，$\cos\theta = \boxed{\text{ア}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boxed{\text{イ}}$ である。

また，$\triangle$OAB の外接円の半径 R の値は，$R = \boxed{\text{ウ}}$ である。

さらに，辺 OA の中点を M，辺 OB の中点を N，$\triangle$OAB の外心を P とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ が垂直，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ が垂直であることより，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boxed{\text{エ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{\text{オ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表されることがわかる。

(2) x, y を実数とする。

(i) $0 < x \leqq 1$ は，$0 \leqq x < 2$ であるための $\boxed{\text{カ}}$ 。

(ii) $\sqrt{x^2} = x$ は，$x > 0$ であるための $\boxed{\text{キ}}$ 。

(iii) $x > y$ は，$x^2 > y^2$ であるための $\boxed{\text{ク}}$ 。

〈選択肢〉

1. 必要十分条件である
2. 必要条件であるが，十分条件ではない
3. 十分条件であるが，必要条件ではない
4. 必要条件でも十分条件でもない

$\boxed{\text{VI}}$ 【数学 ② のみ解答】

$f(x) = 2x^2 - 3x + 3$ とする。放物線 $C : y = f(x)$ 上の点 $(0, 3)$ における接線を l_1, 点 $(2, 5)$ における接線を l_2 とする。このとき，次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) l_1, l_2 の方程式をそれぞれ求めよ。

(2) 放物線 C および 2 直線 l_1, l_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) $g(x) = (x-3)f(x)$ とするとき，関数 $g(x)$ の極値を求めよ。

(4) (3) で定めた関数 $g(x)$ に対して，方程式 $|g(x)| = k$ が異なる 4 つの実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。