

関孝和『授時発明（天文大成三条図解）』解説

真貝寿明

情報科学部情報システム学科
(2026 年 7 月 日受理)

Deciphering Seki Takakazu's "Juji Hatsumeï" (*Shoushi Hatsumeï*)

by

Hisaaki SHINKAI

Department of Information Systems, Faculty of Information Science and Technology

Abstract

概要

In the early Edo period, driven by the need for calendar reform, Seki Takakazu studied the Chinese Shoushi Calendar (授時曆). He worked on deciphering *Tianwen Dacheng Guankui Jiyao* 『天文大成管窺輯要』 (1652) by Huang Ding (黃鼎), leaving behind excerpts annotated with reading marks known as the *Seki-tei-sho* 『関訂書』. Furthermore, he provided a detailed explanation of three specific topics from that work in his *Shoushi Hatsumeï* 『授時発明（天文大成三条図解）』 (Illustrated Explanations of Three Items from *Tianwen Dacheng*) (1680). This paper deciphers the full text of Seki's commentary in *Shoushi Hatsumeï* to elucidate the mathematics he employed and to confirm the role of astronomy and calendrical science as a driving force behind Wasan, traditional Japanese mathematics.

キーワード； 数学史, 天文学史, 関孝和, 授時曆

Keyword; History of Mathematics, History of Astronomy, Takakazu Seki, Shoushi Calendar

江戸の初期、改暦の必要性から、中国の授時暦を研究していた関孝和は、黄鼎による『天文大成管窺輯要』(1652 年)の解説をすすめ、『関訂書』と呼ばれる訓点を付けた抜書きを残した。また、そのうちの3つの項目について、『授時發明(天文大成三条図解)』(1680 年)として詳細を解説した。本稿では、『授時發明』にある関の解釈文全文を解説することで、関の使った数学を明らかにし、和算の動機としての天文暦学の存在を確認する。

1 諸言

日本では、江戸時代の初期から独自の数学文化が発展した。吉田光由(1598-1673)が珠算書として出した『塵劫記』(1627 年)は、版を重ねながら、パズル的な問題を含んだり、遺題継承の出題を含むことで、庶民の算数への興味を底上げした。一方、関孝和(1642-1708)や建部賢弘(1664-1739)にはじまる一般化を目指した数学は、いくつかの分野では世界レベルを超えるまでに発展した。これらの両面を含んで「和算」は語られる。

筆者は、最近、江戸時代の科学文化を3つに時代分けすることを提案した[1]。すなわち、西洋科学の要素をまったく含まない前期、中国経由で伝えられた西洋科学を吸収した中期、蘭学者による西洋からの直接的な知識の導入の後期、の3つである。本稿では、前期に位置づけられる、関孝和による『授時發明(天文大成三条図解)』(1680 年)の解説を試みる。

当時の日本では、800 年近く使われてきた宣明暦の予報が天体現象と合わなくなっていることが問題となり、改暦に向けた研究がなされていた。積極的に研究されたのは、かつて中国で使われていた授時暦(1281 年-)と大統暦(1368 年-)だった。両者は、西洋科学が中国に入る前に完成していた、中国独自の太陰太陽暦の到達点であった。日本独自の暦として貞享暦が1685 年に施行されるまでの間に、造暦に関する理論的な研究や天体観測が行われた。

関孝和や渋川春海(1639-1715)は、授時暦の研究に、黄鼎による『天文大成管窺輯要』(1652 年)を参考にした。関は、この中から重要な15 条を抄出し、訓点を施して読みやすく訂正・編集した写本を作成した(本稿 §4)。「関訂書」とされるもので、後書きに貞享3 年(1686 年)とある。おそらくこの訓点は、ずっと以前にできていたと思われる。関の1680 年の作とされる『授時發明』は、黄道・赤道・白道の変換に関する3 条を選び、解釈文と図を交えて計算手順を解き明かしたものである。「黄赤道の差を論す」「黄赤内外の差を論す」「白道と黄赤道の差を論す」と題された章立てで、『管窺輯要』の各文に対して、1 字下げで計算例が示されている。

『授時發明』に関する先行研究は少ない。先駆けとなる広瀬[2, 3]の解釈は、後に杉本[4, 5]によって整合性の問題が指摘されている。しかし、杉本は、全文を詳らかにしたものではなく、また彼の提示した解釈図は、角度の設定などを限定したものにとり過ぎず、暦学への応用を考えた記載になっていない。平山版の『関孝和全集』[7]は翻刻のみ、上野版の『関孝和全集』[6]は読み下し文までの記載であり、内容についての記載はない。和算研究の中で、天文暦学に関する研究は取り残されていると思えるほどである。

本稿では、『授時發明』の関による解釈部分全文を追随する

ことで、関の時代の数学知識と、和算の動機としての天文暦学の存在を確認する。読み下し文は、上野らが2023 年に刊行した『関孝和全集』[6]を用いた。この全集は、(1) 国立天文台附属図書館蔵の「天文大成三条図解」(請求番号 449-S)を底本とし、(2) 天理大学附属天理図書館蔵「天文大成三条図解」(請求番号 440-13-34)、(3) 東北大学附属図書館岡本文庫蔵の「授時發明」(請求番号岡本写 7)、(4) 宮内庁図書寮本の「天文大成三条図解」(請求番号 557-46)、(5) 日本学士院本「天文大成三条図解」(請求番号 6927)との差異も含めて記されている。

なお、天文台本には、最後に1680 年に日本で観測された彗星の記録が記載されているが、写本によってはこの部分はない(当然ながら、彗星の部分は、『関訂書』にはない)。平山らが1974 年に刊行した『関孝和全集』[7]は、岡本文庫本を底本にしているので彗星の記載はない。また、本書の書名が「天文大成三条図解」なのか「授時發明」なのかも写本によって分かれている[7]。また、日本学士院本には、著者が中根元圭であるとの付箋が筆者・田伯兎の名前と1765 年の日付つきで貼られている[6]とのことで、一部の暦算家には、この書の中根元圭のものとする考えがあったようだ。

本稿の構成は、以下の通りである。§2 では、『授時發明』で取り上げられた黄道座標と赤道座標の変換について、その動機となる事柄を説明する。§3 では、計算手法として頻繁に使われている弧術(弧背術、会円術)を説明する。§4 では、授時暦と『関訂書』の背景的な説明を行い、§5 にて、『授時發明』の解説を行う。

2 天測の座標系

天体の位置を記録する座標系には、大きく分けて、地球の自転軸方向を天の北極としそれに対する赤道を用いる赤道座標系(Equatorial Coordinate System) (α, δ) と、太陽の運動を黄道としそれに対する黄極を想定する黄道座標系(Ecliptic Coordinate System) (λ, β) の2 つがある。現代天文学では赤道座標系を用いるが、その創始は16 世紀のティコ・ブラーエとされている。プトレマイオスは黄道座標を用いて天体位置を記載した。これはイスラーム、中世ヨーロッパでも踏襲された。しかし、黄道座標での記載は、星の観測から直接行うのは難しい。インドでは、占星術が先行し、月や太陽が通る黄道座標系を重視し、極黄道座標(極黄経 polar longitude, 極黄緯 polar latitude)と呼ばれる座標を用いた。これは、黄道座標と赤道座標をミックスしたものである(後述する式(4))。

中国では、赤道座標系を用いる方法と、極黄道座標系を用いる方法の両者があった[8, 9]。

恒星の位置を決めるにあたっては、二十八宿とよぶ星座、およびその代表的な星として28 の距星を重要視し、星々の位置は、距星を基準にして(入宿度、去極度)の表記で与えられた。図1 を用いて説明すると、照準とする星 S の赤経・赤緯を (α, δ) 、近くの距星の赤経・赤緯を (α_0, δ_0) とするとき、

$$\text{入宿度} = \alpha - \alpha_0, \quad \text{去極度} = 90^\circ - \delta \quad (1)$$

である。ただし、距星は必ずしも明るい星が選ばれたわけでもないし、赤経で等間隔に配置されたわけでもない。時代によって距星の選び方も若干変化した。このため、中国星座の

同定などは、いまでも研究対象となっている [10, 11, 12].

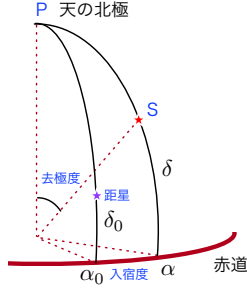


図 1: 赤道座標系 (α, δ) と、中国で使われた距星を基準として測る場合の入宿度 $\alpha - \alpha_0$ と去極度 $90^\circ - \delta$ の定義.

Fig. 1: Definitions of the equatorial coordinate system (α, δ) and, for measurements based on the “determinant stars” (*juxing*) used in China, the “longitude distance” $(\alpha - \alpha_0)$ and the “polar distance” $(90^\circ - \delta)$.

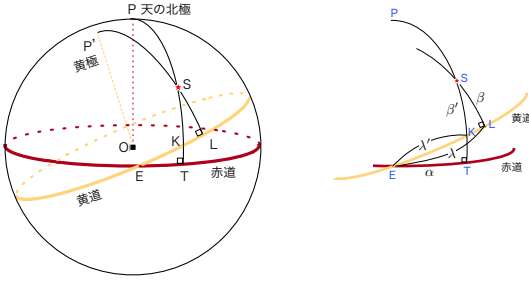


図 2: 黄道座標系 (λ, β) と極黄道座標系 (λ', β') .

Fig. 2: Ecliptic coordinate system (λ, β) and polar ecliptic coordinate system (λ', β')

中国の観測装置である渾天儀は、はじめは赤道環のみであったが、後漢以降は黄道環も加えられた。黄道環をもつ渾天儀では黄経座標の観測が容易である。だが、黄極方向に天体があるわけではないため、渾天儀の設置には天の北極を基準にする方が簡単であろうことは想像がつく。おそらくそのような理由で、極黄道座標が使われた、と考えられる。図 2 で、S を天体、P を赤道極、P' を黄道極とする。大円 PS が赤道および黄道と交わる点をそれぞれ T, K とする。大円 P'S が黄道と交わる点を L とする。春分点を E とすると、

$$\text{赤道座標: 赤経 } \alpha = \widehat{ET}, \text{ 赤緯 } \delta = \widehat{TS} \quad (2)$$

$$\text{黄道座標: 黄経 } \lambda = \widehat{EL}, \text{ 黄緯 } \beta = \widehat{LS} \quad (3)$$

$$\text{極黄道座標: 黄経 } \lambda' = \widehat{EK}, \text{ 黄緯 } \beta' = \widehat{KS} \quad (4)$$

となる。

ただし、黄道座標 1 度の長さ、赤道座標 1 度の長さは差が生じる。そこで、座標変換の問題が生じた。黄道と赤道の傾き ϵ (図 2 で角 KET) は 24 度である (正確には、23 度 26 分 = 23.4 度 = 23.74°, である)。三角形 KET に、球面三角法を用いると、

$$\tan \lambda' \cos \epsilon = \tan \alpha \quad (5)$$

が成立するので、 α と λ' の対応が得られる。 α が 45 度付近で最も差が大きい。球面三角法がなかった中国では、次に述べる特殊な近似「会円術」が使われた。

3 授時暦に用いられた弧術 (会円術)

弧の長さを扱うときに、当時、用いられた用語と近似式について説明する。

三角関数が伝播していなかった中国では、弧・矢・弦という用語を用いて、求積問題が扱われていた [1]。授時暦で使われたのは、北宋時代の沈括 (1031-1095) が『夢溪筆談』 (1088) にて提示した、弧の長さに対する「会円術」である。

変数の定義を図 3 に示す。円の直径と半径をそれぞれ d と r 、矢 CD の長さを c 、弦 AB の長さを a とし、それに対応する弧の長さを弧あるいは弧背と呼んで s とする。また、半弦の長さを p 、半背の長さを ℓ とする。

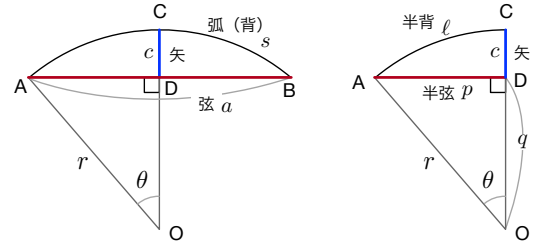


図 3: (左) 沈括『夢溪筆談』の会円術での変数定義図。(右) 半弦・半背としたときの変数定義図。

Fig. 3: (Left) Diagram of variable definitions for the “huiyuan” method in Shen Kuo’s *Mengxi Bitan* (Brush Talks from Dream Brook). (Right) Diagram of variable definitions using half-chord and half-arc lengths.

関が『授時發明』で多用したのは、図 3 (右) の変数である。半背 ℓ 、矢 c 、半弦 p の相互の変換が、「弧術により」と常に言及されて既知のものとされている。

現代数学を使うならば、角 θ をラジアンを単位にすれば、 $\ell = r\theta$ であるから、これらの変換は

$$(\ell, r) \rightarrow c: \quad c = r(1 - \cos(\ell/r)) \quad (6)$$

$$(\ell, r) \rightarrow p: \quad p = r \sin(\ell/r) \quad (7)$$

$$(p, r) \rightarrow c: \quad c = r - \sqrt{r^2 - p^2} \quad (8)$$

$$(p, r) \rightarrow \ell: \quad \ell = r \sin^{-1}(p/r) \quad (9)$$

$$(c, r) \rightarrow p: \quad p = \sqrt{r^2 - (r - c)^2} \quad (10)$$

$$(c, r) \rightarrow \ell: \quad \ell = r \cos^{-1}((r - c)/r) \quad (11)$$

などと容易に対応がつけられる。

沈括の示した近似式は、図 3(左) での弧 ACB の長さ s を

$$\text{会円術} \quad s = \frac{2c^2}{d} + a \quad (12)$$

とするものである。図を半分にしたときの関係は、図 3(右) での半弧 (半背) を ℓ を

$$\text{会円術} \quad \ell = \frac{c^2}{d} + p \quad (13)$$

と表すことに相当する。この近似式の誤差については、筆者が [1] にて触れたが、 θ で線形近似する式よりも広い範囲で実際の弧長をよく近似する。

式 (13) が既知のものとして、半背 ℓ 、矢 c 、半弦 p の相互の変換を表しておこう。まず、準備として図 3 右の三角形 ODA において、三平方の定理を用いると、 $p^2 + q^2 = r^2$ となるが、 $q = r - c$ であることから、

$$(2r - c)c = p^2 \quad (14)$$

が成り立つ。式 (13) に代入すると、

$$\ell = \frac{c^2}{2r} + \sqrt{r^2 - q^2} = \frac{c^2}{2r} + \sqrt{c(2r - c)} \quad (15)$$

となる。これより、

$$(\ell, r) \rightarrow c: \quad (15) \text{ より得られる次の 4 次方程式を解く} \\ c^4 + 4r(r - \ell)c^2 - 8r^3c + 4r^2\ell^2 = 0 \quad (16)$$

$$(\ell, r) \rightarrow p: \quad (16) \text{ で求めた } c \text{ を用いて} \\ p = \sqrt{c(2r - c)} \quad (17)$$

$$(p, r) \rightarrow c: \quad c = r - \sqrt{r^2 - p^2} \quad (18)$$

$$(p, r) \rightarrow \ell: \quad (18) \text{ で求めた } c \text{ を用いて } \ell = \frac{c^2}{2r} + p \quad (19)$$

$$(c, r) \rightarrow p: \quad p = \sqrt{c(2r - c)} \quad (20)$$

$$(c, r) \rightarrow \ell: \quad (20) \text{ で求めた } p \text{ を用いて } \ell = \frac{c^2}{2r} + p \quad (21)$$

などに対応させることができる。

これらの変換は、あくまでも近似である。精度を求める上では、よりよい近似式や、より正確な円周率を求めることが必要になる。関や建部が、円周率の導出や $\sin^{-1}\theta$ の展開式の開発に向かった理由は暦学への興味であったであろうことは、[1] で言及した。

4 授時暦と『関訂書』

4.1 授時暦

中国・元代の郭守敬 (1231-1316)・王恂 (1235-81) らが編纂した授時暦 (1281-1644 年) は、(明末に西洋天文学が導入された時憲暦までの) 中国史上で固有の、また最も精度が高い太陰太陽暦だった。日本の江戸初期の改暦の際、渋川春海や関孝和らによって研究された。

授時暦は北宋の紀元暦や南宋の統天暦を基準にしている、外来天文学の影響はないが、イスラーム天文学の観測技術を取り入れ精密な儀器 (簡儀、高表、渾天象など) を制作し、慎重な観測を行ったことに特徴がある [9, 13]。正確な冬至の観測から 1 年の長さを 365.2425 日とした (統天暦と同じ)。冬至の太陽の位置の測定、月の運動の追跡、二十八宿の距度の測定、日の出・日の入の時刻測定などを行い、天文定数の再検討を進めた。

また、計算方法に関しては、先行する暦法にはなかった次の「五つの新しい創法 (術)」が『元史』巻 164 の郭守敬伝 (暦志) に列挙されている。

1. 太陽の盈縮 (不等速運動) を求める算法
立招差法 (3 次補間法の一様) を用いた。

2. 月の運行の遅疾 (不等速運動) を求める算法
累招差法 (立招差法は、土へんに几十木) (高次の差分法) を用いた。
3. 黄道・赤道差を求める算法
勾股弧矢之法を用いた。
4. 黄道去極度を求める算法
円方直矢接勾股之法 (円と内接する図形の関係を利用した近似算法) を応用した。
5. 白道・黄道交差を求める算法
渾比散法という立体幾何学的手法を用いて算出し、交差する距離を制限・算出した。

また、それまで慣例的に継続されていたいくつかの方法を取りやめた。定朔法における進朔法の廃止、暦元を施行年とする、諸定数の端数を小数記法で表す、1 年の長さに消長法を採用する、などである [14]。

4.2 『関訂書』

中国で 1652 年に黄鼎が授時暦の数理をまとめた全 80 巻の『天文大成管窺輯要』が出版された。関は、この中から重要な 15 条を抄出し、訓点を施して読みやすく訂正・編集した写本を作成した (表 1)。「関訂書」とされるもので、後書きに貞享 3 年 (1686 年) とある。黄鼎は、先行文献をまとめた人物であり、個々の文献は他に辿れる (小林 [15]) という。とくに、関が写本した 15 条のうち、天文総論をのぞく 14 条は、原文が明末の周述学 (?-1583?) による文章であることが小林 [15] によって指摘されている。論日度、論月度、論五星経度、論五星緯度の 4 編は、周述学が中国暦法とイスラム暦法 (回回暦) との比較について言及しており、関は知らずにこれらを写したことになる。

5 『授時發明 (天文大成三条図解)』

1680 年の作とされる『授時發明』は、黄道・赤道・白道の変換に関する 3 条を選び、解釈文と図を交えて計算手順を解き明かしたものである。「黄赤道の差を論す」「黄赤内外の差を論す」「白道と黄赤道の差を論す」と題された章立てで、『天文大成管窺輯要』の各文に対して、1 字下げで計算例が示されている。この 3 編は、授時暦に新たに採用された計算方法 (郭守敬の五新術, §4.1) の最後の 3 つに相当する。本章では、関の記した注釈の全文を解説してゆく。

なお、前提としている数学要素をはじめに列挙しておく。

- 中国での天体観測では、角度座標は、1 周を 365.25 度とする周天度数が用いられた。本稿では周天度数を # と表記する。1 周を 360 度とする現在の角度単位とは、1 度 = 0.986# (1# = 1.015 度) と対応する。
- 1 周を 365.25# とするので、1 象限 (1/4 周) は 91.3125#、半象限は 45.65625#。
- 周天度数を 3 で割った値を天径 (直径) d とする。すなわち円周率を 3 とし、天径を角度と同じ単位で表記すると、 $d = 121.75\#$ となる。半径は $r = 60.875\#$ となる。
- 授時暦では 100 進法が用いられた。1 度 = 100 分、1 分 = 100 秒である。

表 1: 『関訂書』に写本された『天文大成管窺輯要』の箇所とその内容。*印は『授時發明』で解説されているもの。■■は、日+咎
Table 1: Sections of the *Tenmon Taisei Kanki Shūyō* transcribed in the *Sekiteisho*, and their contents. Items marked with an asterisk (*) are those deciphered in the *Juji Hatsume*.

卷之三の内	歳差 論中■■差 論黄赤差* 論黄赤内外差*	(地球の自転軸の首振り運動による) 春分点の移動 各地で測定した正午の影の長さ 黄道と赤道のずれ(黄赤交角)によって生じる太陽の運行のズレや補正 (地球の自転軸が公転面に対して傾いていることで生じる) 季節ごとの昼夜の長さや太陽の出没位置の変化
卷之四の内	天文総論之内	白道・赤道・黄道の対応, 日月食や天体の位置を正確に予測するための幾何学
卷之七の内	日月交食差 論日度	日食や月食の「計算上の予測と実際の観測とのズレ(食の時刻や規模の誤差)」 太陽の天球面上の位置(角度)
卷之八の内	論日躔盈縮差	(地球の公転軌道が楕円であるために生じる) 太陽の運動の速度変化
卷之十の内	論月度 論月離遅疾差 定朔加減差	月の天球面上の位置(角度) 月の天球面上の動き(月離)の速度変化 天体の平均的な動き(平均朔日=経朔)から, 太陽や月の運動の速度変化を計算し, 実際の新月(定朔)の日時を求めるための補正值(加減)
卷之十二	五星常変差 論五星経度 論五星緯度	5つの惑星(水星・金星・火星・木星・土星)が, 規則正しい動き(常)からズレる現象やその計算(変差) 5つの惑星(水星・金星・火星・木星・土星)の位置(黄経) 5つの惑星(水星・金星・火星・木星・土星)の位置(黄緯)

5.1 「黄道・赤道の差を論す」

関の解釈の部分の読み下し文 [6] とその解説を表 2 に添える。黄道とは、太陽の通り道のことである。赤道は天の北極方向(地球の自転軸方向)に対する赤道面である。天球面を表す両者の座標については、§2 にて説明した。

図 4 は、説明に用いる各点の記号を説明した解釈図である(関自身も図を添えているが、立体感をもたずに描いているのでわかりにくい)。図中の弧 BC は、黄道傾斜角に相当するもので、内外極差比とも二至黄赤半弧背とも呼ばれる。ここでの目的は、太陽 A の位置を黄道座標(弧 BA, 長さ l)で測定したとき、赤道座標(弧 CI, 長さ a)を求めることである。その差 $l - a$ の変化を求めることでもある。

関は、例として、弧 BA が 45° の場合で計算例を示している。使われる数学は、会円術(と、それを解くための 4 次方程式の解法)・三平方の定理・方べきの定理・三角形の相似である。

5.2 「黄赤内外の差を論す」

関の解釈の部分の読み下し文 [6] とその解説を表 3 に添える。

ここでは、季節によって変化する太陽の南中高度(求めているのは天の北極からの角度なので、緯度に依存しない)を求めることを動機にして、図 4 での弧 AI (赤道半弧背とも呼ばれる)を求めることを目的とする。使われる数学は「黄道・赤道差」を求めたときと同じである。夏至や冬至のとき以外でも求められる手法になっている。

ここまでの記載は、両者とも現代数学を使う手法に比べ

ば、遠回りで洗練されていないが、関が、授時暦で使われた手法を完全に理解していることがわかる。

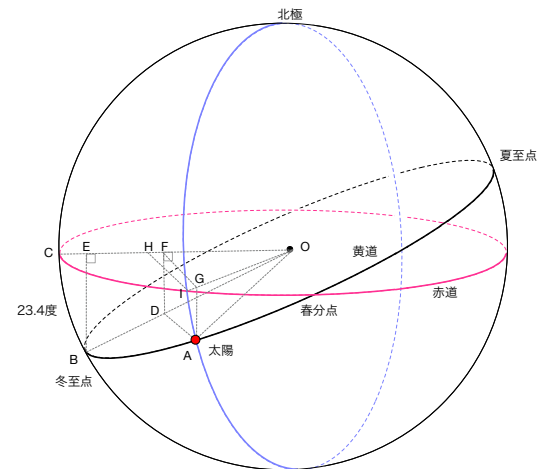


図 4: 『授時發明』の「黄道・赤道差を求める」と「黄赤内外の差を論す」での解釈図。記号は [6] と同じとした。

Fig. 4: Diagrams illustrating the interpretations found in the sections “The difference in length between the ecliptic and the celestial equator (黄赤道の差)” and “Latitudinal difference between the ecliptic and the celestial equator (黄赤内外差)” in *Juji Hatsume* (授時發明). The symbols used are the same as those in [6].

5.3 「白道と黄赤道の差を論す」

関の解釈の部分の読み下し文 [6] とその解説を表 4 に添える。この部分は、前 2 節とスタイルが異なり、段落 5 までの前半は、関の解釈部分のみで読み進められるものの、後半の関

の解釈部分は、数値の導出のみに固執している。『天文大成管窺輯要』の部分も含めないと理解が苦しいので、段落 6 以降は全文を表に記載している。

まずは、基礎知識的な説明から始める。

白道とは、月の通り道のことである。太陽・地球・月はほぼ同一平面上にあり、一直線上にならんだときには日食や月食が生じる。しかし、月の軌道面は、わずかに傾いているため、日食や月食は毎月生じるわけではない。逆に、そのために、日食や月食の予報が暦の作成者にとって重要な問題となった。白道と黄道との傾きは、およそ $5.1^\circ = 5^\circ 8' = 5.17^\circ$ である。中国では、計算上は 6° として扱われていた。

月は太陽から受ける重力により、軌道を黄道面に戻そうとするトルクが作用し、白道は周期 18.61 年で黄道面に対してふらつく動きをみせる。白道と黄道が交わる 2 つの点である「昇交点」（月が黄道面の南側から北側に移り変わる点、図 5 の K 点）と「降交点」は、徐々に西へ移動する。

白道が移動する様子を図 6 に示す。この図では、初期条件に、冬至の日に白道がもっとも南にある、と仮定して描いている。実際には月が最南・最北となる日は、白道の「ふらつき」によって変化する。

『授時發明』でのこの部分の前半では、白道が赤道を横切る位置 M を春分点 X からの差として求めることである。図 5

[a] の弧 MX の長さに相当する。図では、白道と黄道との開き（弧 AX）が春分点 X から測ったときに最大角（ 6° ）であることを仮定しているが、このとき弧 MX は最大の長さになる。本文では段落 6 までで、この長さが 14.66° であることを導いている^{*1}。

白道は黄道に対して約 5° 傾いているが、赤道に対する傾きは、黄道傾角 24° をふくめて、時期によって約 19° から 29° の間で変動する。白道と赤道のずれは、最小で 1.30° 、最大で 3.50° になることを示そうとするのが、後半の目的である。

ただし、当時の知識では、白道の振る舞いの原理的な理解はなされておらず、観測結果を現象論的に説明することが第一義であった。そのため、関の試みた数値の解釈には、論理が飛躍していてフォローできない箇所もある（段落 6a–c, 7a, 8a など）。また、後半では『天文大成管窺輯要』の一文ごとに関自身の解釈文が入っていないことも不思議である。段落 9 では、自身の注釈は何もない。

そして、『授時發明』の最後の段落は、脈絡なく 1680 年の彗星（キルヒ彗星, Kirch's comet, C/1680 V1）観測についての記述がなされている。ここは、『関訂書』にはない箇所である。

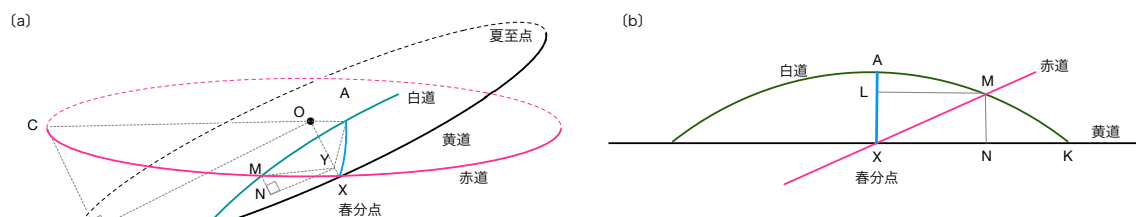


図 5: [a] 白道（月の通り道）と黄道（太陽の通り道）、天の赤道の配置の例。図の見易さを優先して白道と黄道の角度は広くとっている。白道と黄道との開き（弧 AX）が春分点 X から測ったときに最大角（ 6° ）であることを仮定した図。弧 MX を求めるのが目的であるが、この図の配置の場合に弧 MX は最大の長さになる。[b] 中心 O にいる観測者から見た図。白道が黄道よりずれている部分（弧 KAK'）を大円の一部と見なすと、その大円の半径は、AX を矢とし、OX を弦とする関係から求められる（表 4 の段落 1）。赤道と黄道のなす角が 24° であることを用いると、AX が 6° に対して、MN（容闊と呼ぶ、表 4 の段落 3）が 5.7° 、XN（容半長）が 13.4782° となる。

Fig. 5: [a] An example of the arrangement of the lunar orbit (the Moon's path), the ecliptic (the Sun's path), and the celestial equator. To make the diagram easier to read, the angle between the lunar orbit and the ecliptic is depicted as wider than it actually is. A diagram illustrating the case where the separation between the lunar orbit and the ecliptic (arc AX) reaches its maximum angle (6°) when measured from the vernal equinox (point X). The objective is to determine the length of arc MX; in this specific configuration, arc MX attains its maximum length. [b] A view from an observer located at the center O. If the section where the lunar orbit deviates from the ecliptic (arc KAK') is treated as part of a great circle, the radius of that circle can be determined based on the relationship where AX serves as the sagitta (矢) and OX as the chord (Table 4, paragraph 1). Given that the angle between the celestial equator and the ecliptic is 24° , and with AX set at 6° , MN (referred to as youkatsu (容闊); Table 4, paragraph 3) becomes 5.7° , and XN (youhancho, 容半長) becomes 13.4782° .

^{*1} このような解釈図を広瀬 [2, 3] や杉本 [4, 5] も試みているが、両者とも、白道と黄道との交点 K を冬至点にしたり、広瀬は角 KOM を 45° に、杉本は角 KOX を 45° に限定する図になっている。

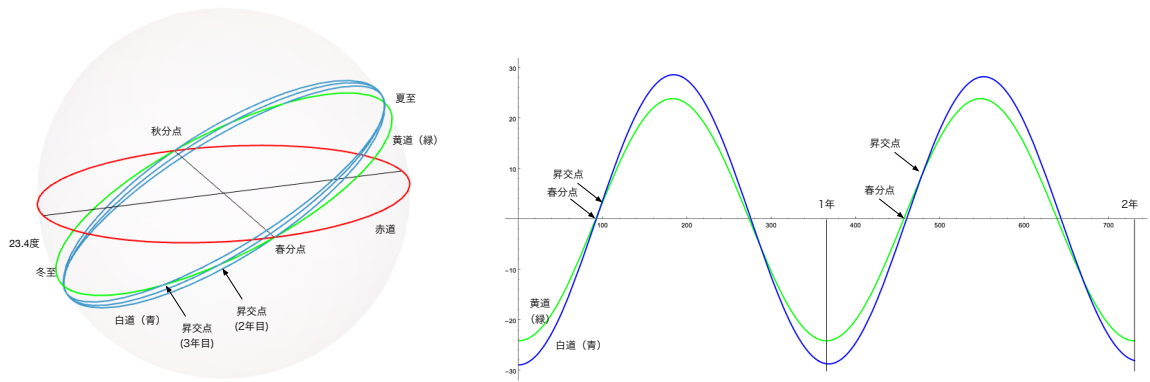


図 6: (左) 天球面上の赤道、黄道（太陽の通り道）、白道（月の通り道）を描いたもの。月は、冬至のときに最も南側にいるもの、として、3 年分を描いた。（月は 1 恒星月=27.3 日で周回する。）(右) 黄道と白道の赤道面からの上下を日数（黄道上を動く太陽位置）を横軸に、赤道面からのずれの角度を縦軸に 2 年分描いたもの。左の図と同様に、白道は冬至の位置に最も南側にいるものとして描いた。昇交点や降交点は、毎年ずれてゆき、18.6 年で 1 周する。この図の場合、1 年目の昇交点は、春分点から 4.19 日ずれているが、2 年目は 21.5 日になる。

Fig. 6: (Left) A depiction of the celestial equator, the ecliptic (the Sun's path), and the lunar orbit (the Moon's path) on the celestial sphere. The Moon's path is illustrated over a three-year period, assuming it is at its southernmost point at the winter solstice. (The Moon completes an orbit in one sidereal month, i.e. 27.3 days.) (Right) A plot showing the vertical displacement of the ecliptic and the lunar orbit relative to the celestial equator over two years; the horizontal axis represents time in days (based on the Sun's position along the ecliptic), and the vertical axis represents the angle of deviation from the celestial equator. As in the left figure, the lunar orbit is depicted with its southernmost point aligned with the winter solstice. The ascending and descending nodes shift each year, completing a full cycle every 18.6 years. In this specific plot, the ascending node in the first year is offset by 4.19 days from the vernal equinox, whereas in the second year, the offset is 21.5 days.

表 2: 『授時發明』「黄赤道の差」の関による説明書き。左列は段落番号。読み下し文は岩波本 [6] のもの。

Table 2: Seki's explanatory notes on the “The difference in length between the ecliptic and the celestial equator (黄赤道の差)” in *Juji Hatsumeï* (授時發明). The left column indicates paragraph numbers. The transcribed text follows the Iwanami edition [6].

	『授時發明』読み下し文	解説	備考
1.	たとへば 仮如、黄道の半弧背四十五度を以てこれを求む。 天元の一を立て黄道の矢と為す。 これを自して天径に因る黄道半弧背弦の差と為す。 左に寄す。 黄道半弧背を列し、天径一百二十一度太を以てこれに乗じて得る内、左に寄せたるを減じて、余りこれを自して、天径冪に因る黄道半弧弦冪と為す。 再び寄す。 天径を列し、内、黄道の矢を減じて、余りを黄道の矢を以てこれに乘じ、黄道半弧弦冪と為す。 天径冪を以てこれに相乗して得る数と再び寄せたるとを相消して開方の式を得る。 以て三乗の方にこれを開き、黄道の矢一十七度三十二分五十三秒を得る。	黄道の弧の長さ (半弧背 BA) を $\ell = 45^\#$ とする。 求めたい「黄道の矢 BD」を x と置く。 x を 2 乗して、直径 d で割った値は、黄道半弧背弦 (AD, 長さ p_1) との差 $\ell - p_1$ と等しくなる。 $\frac{x^2}{d} = \ell - p_1$ $x^2 = d(\ell - p_1)$ とする。 ℓ に対して、$d = 121.75^\#$ を乗じ、先の x^2 を減じ、その差を 2 乗して d^2 で割る式の値は、p_1^2 となる。 $(d\ell - x^2)^2/d^2 = p_1^2$ $(d\ell - x^2)^2 = d^2 p_1^2$ (式 1) d に対して x との差をとり、x をかけた値は、p_1^2 と等しくなる。 $p_1^2 = x(d - x)$ d^2 を両辺にかけて $d^2 p_1^2 = d^2 x(d - x)$ とする。先に得た (式 1) と等しいと置く (相消す)。 $(d\ell - x^2)^2 = d^2 x(d - x)$ これより、解くべき式が得られる。 この 4 次方程式を解くと、実数解として $x = 17.3253^\#$ を得る。黄道の矢 BD が求められた。	太陽が黄道の位置 A (弧 BA の長さ ℓ) にある。これに対応する赤道の弧の長さ CI を求めるのが目的。 (天元術による変数立て) 会円術の式 (13) $\ell - p = \frac{x^2}{d}$ を適用。 太は $3/4$. 円の幾何学的性質 (方べきの定理) を適用。半弦の 2 乗は「矢」と「直径から矢を引いた残り」の積に等しい。 以下の 4 次方程式が導かれる。 $x^4 + (d^2 - 2d\ell)x^2 - d^3x + (d\ell)^2 = 0$ 「三乗の方」とは 4 次方程式 (最高次が x^4) のこと。
2.	黄道の矢を列し、これを自乗して得る数を実と為す。天径を以てこれを除し、黄道の半弧背弦の差二度四十六分を得る。	x^2 を d で割り、 $\ell - p_1$ を得る。 $\ell - p_1 = 2.46^\#$ を得る。	
3.	黄道の半弧背弦の差を以て黄道の半弧背を減じて、余り四十二度五十四分を黄道の半弧弦と為す。	$\ell = \ell$ の両辺から $\ell - p_1 = 2.46^\#$ を減じること、 $p_1 = 42.54^\#$ を得る。	$p_1 = \ell - 2.46 = 42.54^\#$ を得る。
4.	黄道の矢を以て天の半径六十零度八十七分半を減じ、余り四十三度五十四分半を黄赤道の小弦と為す。	半径 $r = d/2 = 60.875^\#$ より、矢 x を引き、余りを黄赤道の小弦 (DO, 長さ q_1) が得られる $q_1 = r - x = 43.545^\#$ 。	ここで黄道面上での話が終わる。
5.	黄赤道の小弦を列し、黄赤道の大股五十六度零六分半 (二至出入する赤道の内外二十三度九十分を以て半弧背と為す。術に依りて黄赤道の大弧矢四度八十一分を求め得て、これを以て天の半径を減ずるの余りなり) を以てこれに相乗して得る数を実と為す。黄赤道の大弦六十零度八十七分半を以てこれを除し、黄赤道の小股四十零度零九分を得る。	(夏至または冬至のとき、黄道と赤道の間は $23.90^\#$ の弧の長さ BC がある。先の術をここでも用いて、黄赤道の大弧矢 (CE, 長さ x_0) を $x_0 = 4.81^\#$ と求め、天の半径 r から x_0 を引いた余りで得られる $r - x_0 = 56.065^\#$ を黄赤道の大股 (EO, 長さ q_0) とする。) 黄赤道の小弦 (DO) q_1 と、黄赤道の大股 q_0 を乗じたものを黄赤道の半径 $r = 60.875^\#$ で割ること、黄赤道の小股 (FO, 長さ ω) $\omega = 40.09^\#$ を得る。	夏至または冬至のとき、原点と黄道面と赤道面で囲まれる円弧の話になる。三角形 OEB と三角形 OFD の相似を用いて、黄赤道の小股 (FO, 長さ ω) を求める。

表 2: 続き. Table 2: (continued)

6.	黄赤道の小股を列し、これを自乗して得る数と、黄道の半弧弦これを自乗して得る数とを二位相併せて共に得る数を実と為す。平方にこれを開き、赤道の小弦五十八度四十五分三十秒を得る。	黄赤道の小股 (FO, ω) の 2 乗と黄道の半弧弦 (AD) を 2 乗して加えた数を実とする。平方にこれを開き、赤道の小弦 (GO) を得る。 赤道の小弦 (GO) $= \sqrt{(\text{小股 (FO)})^2 + (\text{黄道半弧弦 (AD)})^2}$ $= \sqrt{40.09^2 + 42.54^2} \approx 58.455^\#$	三角形 OFG に三平方の定理を適用。AD=GF を用いている。
7.	黄道の半弧弦を列し、天の半径を以てこれに相乗して得る数を実と為す。赤道の小弦を以てこれを除し、赤道の大股四十四度三十零分四十三秒を得る。就いて赤道の半弧弦と為す。	黄道の半弧弦 (GF) × 天の半径 (OI) を計算する。赤道の小弦 (OG) を得る。44.3043 [#] となる。この弦 IH (長さ p_3) が求められたので、弧 IC (長さ a) が求められることになる。	三角形 OGF と三角形 OIH が相似なので、OG : GF = OI : IH。
8.	黄赤道の小股を列し、黄赤道の大弦を以てこれに相乗して得る数を実と為す。赤道の小弦を以てこれを除し、赤道の横の大鉤四十一度七十五分を得る。	黄赤道の小股 OF _(40.09) × 大弦 OI _(60.875) より、赤道の大鉤 OH を得る。41.75 [#] 。	三角形 OGF と三角形 OIH が相似なので、OF : OG = OH : OI。
9.	赤道の横の大鉤を以て天の半径を減じ、余り一十九度一十二分半を赤道の横の弧矢と為す。	赤道面での弧 OIC にて、弧矢 (CH) を求める。 (半径) - (大鉤 OH) = (弧矢 CH) = 19.125 [#]	赤道面の OIC にて、会円術を適用する準備。
10.	赤道の横の弧矢を列し、これを自乗して得る数を実と為す。天径の如く而も一にして、赤道の半弧背弦の差三度零零四十二秒を得る。	CH ² /直径 = 3.0042 [#] となる。これは、弧 IC (長さ a) - 弦 IH (長さ p_3) に等しい。	会円術を適用。 $a - p_3 = \text{CH}^2/d$
11.	赤道の半弧弦に去加して赤道の半弧背と為す (去は当に以て作るべし)。赤道の半弧背弦の差を以て赤道の半弧弦を加入して、赤道の半弧背四十七度三十零分八十五秒を得る (余はこれに倣へ)。図に云く (朱を以て経を見、墨を以て緯を見る)	得られた値 3.0042 [#] に、弦 IH (長さ $p_3 = 44.3043^\#$) を加えることで、弧 CI (長さ a) が求められる。47.3085 [#]	これにより、「黄道上で冬至点から 45 度の位置にある太陽は、赤道上では 47.3085 [#] の位置にあたる」
12.	赤道の半弧背を列し、内、黄道の半弧背を減じて、余り二度三十零分八十五秒を黄赤道の極差と為す。	黄道との差は、2.3085 [#] となる。	
13.	稍庚午より減ず。この術、循弧宛転、実まことに天道と ^{ふんごう} 合す。( は、月十勿十口) 最も微妙 ^た なり。古今に冠絶すと謂ふべし。	(赤道の値が) わずかに庚午の値から減じられる。この算法は、曲線を巧みに扱い、実に天体の運行 (天道) とぴたり合致している。極めて精密で奥深い。古今に比類なき優れた術であると言ふべきだろう。	

表 3: 『授時發明』「黄赤内外差」の関による説明書き。左列は段落番号。読み下し文は岩波本 [6] のもの。

Table 3: Seki's explanatory notes on the “Latitudinal difference between the ecliptic and the celestial equator (黄赤内外差)” in *Juji Hatsume* (授時發明). The left column indicates paragraph numbers. The transcribed text follows the Iwanami edition [6].

	『授時發明』読み下し文	解説	備考
1.	仮如、黄道の半弧背四十五度を以てこれを求む。前術に依りて、黄道の矢一十七度三十三分を得る。赤道の小弦五十八度四十五分三十秒を求め到り、以て天の半径を減じて、余り二度四十二分二十秒を赤道の大小弦の差と為す。又た、黄赤道の小弧の矢と為す。又た、内外の矢と為す。	例えば、黄道の半弧背 (BA) を $\ell = 45^\circ$ とする。先の術により、黄道の矢 (DB) $x = 17.33^\circ$ となる。また、赤道の小弦 (GO) $p = 58.4530^\circ$ となる。GO を天の半径 (IO) r から引くことにより、赤道の大小弦の差 (GI) 2.4220° が得られる。これを、黄赤道の小弧の矢とも、内外の矢とも呼ぶ。	DB, GO の長さは、「黄赤道の差」の解釈で得られているもの。
2.	天の半径を列し、内、黄道の矢を減じて、余り四十三度五十四分半、黄赤道の小弦と為す。	天の半径から、黄道の矢 DB (x) を減じて、 43.545° となる。黄赤道の小弦 DO とする。	
3.	黄赤道の小弦を列し、二至黄赤道の内外の半弧弦二十三度七十一分三十秒 (黄赤道の大弧の矢四度八十一分を置きこれを自し、天径の如く而も一にして、半背弦の差一十九分を得、以て内外の極差二十三度九十零分三十秒を減じた余りなり) を以てこれに乘じて得る数を実と為す。黄赤道の大弦を以てこれを除し、一十六度九十六分二十三秒を得、黄赤道の小弧弦と為す。又た、黄赤道の小鈎と為す。	黄赤道の小弦 DO に対し、二至黄赤道の内外の半弧弦 (BE) 23.7130° (その求め方は、黄赤道の大弧の矢 (CE) 4.81° を 2 乗し、天の直径で割り、半背弦の差 0.19° を得て、これより求められる内外の極差 BC 23.9030° を減じた余りである) に、これに乘じて得る数を分子 (実) とする。黄赤道の小弦 DO $\times$ 半弧弦 BE / 黄赤道の大弦 r より 16.9623° を得、黄赤道の小弧弦 DF とする。また、黄赤道の小鈎ともいう。	半弧弦 (BE) を求める箇所は、会円術を用いている。その後は、三角形の相似を用いて、BE:BO = DF: DO より DF を求めている。「天径の如く而も一にして」は「直径で割る」。
4.	黄赤道の小弧の矢を列し、これを自して得る数を実と為し、天径を以てこれを除し、半弧背弦の差四分八十二秒を得る。	黄赤道の小弧の矢 (GI) を 2 乗し、天径 d で割り、半弧背弦の差 (弧 AI - 弦 AG) 0.0482° を得る。	会円術。
5.	半弧背弦の差を以て黄赤道の小弧弦に加入して一十七度零一分零五秒を得て、黄赤道内外の度と為す。又た、黄赤道の小弧半背と為す (余はこれに倣へ)。	半弧背弦の差に、黄赤道の小弧弦 (FD) を加え、 17.0105° を得て、黄赤道内外の度 (弧 AI), あるいは、黄赤道の小弧半背とする。これで、冬至のときとの南中高度の差が計算できる。	FD=GA を用いている。
6.	冬至の前後の二象の盈初、縮末は黄赤道の内外の度を以て象限九十一度三十一分四十三秒を加へ、黄道極を去るの度及び分秒と為す。夏至の前後の二象の縮初、盈末は黄赤道の内外の度を以て象限を減じて、余りを黄道極を去るの度及び分秒と為す。	冬至の前の ^{えいしょ} 盈初から冬至の後の ^{しくまつ} 縮末までは、太陽の位置の、黄道極を去るの度及び分秒 (去極度、天の北極からの角度) は、「 $91.3143^\circ + \text{弧 AI}$ 」によって、夏至の前後は「 $91.3143^\circ - \text{弧 AI}$ 」によって与えられる。	

表 4: 『授時發明』の「白道と黄赤道との差」の部分。左列は段落番号。読み下し文は岩波本 [6] のもの。段落 5 までは、字下げされた箇所のみ。段落 6 以降は、字下げされていない文も含めた。

Table 4: The section on “the difference between the lunar orbit and the ecliptic/celestial equators (白道と黄赤道との差)” in *Juji Hatsumeï* (授時發明). The left column indicates paragraph numbers. The transcribed text follows the Iwanami edition [6]. For paragraphs 1 through 5, only indented paragraphs are included; from paragraph 6 onwards, non-indented sentences are also included.

	『授時發明』読み下し文	解説	備考
1.	天の半径を列し、自乗して得る数を実と為す。矢六度を以てこれを除し、股弦の和六百一十七度六十二分を得る。矢六度を加へて大円径六百二十三度六十二分を得る。	天の半径を 2 乗した数を分子（実）とする。これを矢である $6^\#$ で割り、股（底辺）と弦（斜辺）の和として $617.62^\#$ を得る。これに矢の $6^\#$ を加えると、大円の直径である $623.62^\#$ を得る。	天の半径 $r = 60.875^\#$ を用いている。
2.	大股五十六度零六分半を列し実と為す。大鈎二十三度七十一分を以てこれを除して、二度三十六分四十六秒を得る。就いて秒を分に整へ、二度三十七分を得て度差と為す。	大股 (OE) $56.065^\#$ を分子（実）とする。大鈎 (CE) $23.71^\#$ でこれを割ると、 $2.3646^\#$ を得る。これについて、秒の単位を四捨五入（または切り上げ）して分に揃え、 $2.37^\#$ として、これを「度差」とする。	股は直角三角形の底辺、鈎（勾）は直角三角形の高さ。黄道と赤道がなす角度を θ として、 $1/\tan \theta$ を「度差」とする。
3.	容闊を列し、度差二度三十六分四十六秒を以てこれに乘じて、一十三度四十七分八十二秒を得て、容半長と為す。	容闊 (MN) の長さ $5.7^\#$ に、先ほどの度差 $2.3646^\#$ をこれに乘じて、 $13.4782^\#$ を得る。これを「容半長」(XN) とする。	容闊 (MN) の求め方は、図 5 [b] 参照。
4.	大弦六十零度八十七分半を列し、小鈎五度七十分を以てこれに乘じて、得る数を実と為す。大鈎二十三度七十一分を以てこれを除し、小弦一十四度六十三分四十秒を得る。又た、白道と赤道との正交より黄赤道の正交に距る半弧弦と為す。	大弦 (OC) $60.875^\#$ を並べ、小鈎 (MN) $5.70^\#$ を乗じて、得られた数を分子（実）とする。これを大鈎 (CE) $23.71^\#$ で割ると、小弦 (YM) $14.6340^\#$ を得る。また、これは「白道と赤道の交点（正交）」M から「黄道と赤道の交点」X までの距離の半弧弦にあたる。	直角三角形の相似比、大弦 OC : 大鈎 CE = 小弦 YM : 小鈎 MN
5.	小弦を列し、これを自して得る数、以て天の半径の冪を減じ、余りを実と為す。平方にこれを開き五十九度零九分を得て、これを以て天の半径を減じ、余り一度七十八分を小矢と為す。これを自して、天径の如く而も一にして、半背弦の差二分六十秒を得る。小弦を加入して半弧背一十四度六十六分を得て、白赤道の正交より黄赤道の正交に距る極数と為す。 図に云く	小弦 YM を 2 乗する。天の半径 OM の 2 乗（冪）からこの値を引き算し、残った数を分子（実）とする。この平方根を求めると OY $59.09^\#$ を得る。天の半径 OX からこれを引き算し、残りの $1.78^\#$ を小矢 (YX) とする。この小矢 YX を 2 乗し、天の直径で割ると、半背弦の差（弧の長さと弦の長さの差 MX-MY）である $0.0260^\#$ を得る。これに小弦 ($14.6340^\#$) を足し合わせることで、半弧背 MX として $14.66^\#$ を得る。これが白赤道の交点から黄赤道の交点に距る「極数（天文学的な計算の基準値）」MX となる。	「天径の如くにして一にする」は直径で割るという意味。

表 4: 続き. Table 4: (continued)

	『授時發明』読み下し文	解説	備考
6	朔後の平交日分を以て月の平行度分に 乗じて、距後の度分を得る。経朔加時 の中積を加へて、黄道の冬至より正交 に距る定積度分と為す。視るに、半歳 周已下に在るは、冬至の後と為す。已 上は半歳周に満つるはこれを去りて退 き、余りを夏至の後と為す。その二至 の後、象限已下に在れば初限と為し、 已上は半歳周を減去して末限と為す。 初末限を以て極差一十四度六十六分に 乗じ、象限の如く而も一にして、定差 度分と為す。 二十四を以てこれに乗じて、極差の如 く而も一にして得るところ、交、冬至 の後に在れば減と為し、夏至の後は加 と為す。皆、黄赤道の定限度九十八度 に加減して定限度と為す。	新月（朔）の後に、平均的な交点（平交）を通過して からの経過日数に、月の 1 日あたりの平均移動速度 （平行度分）を掛け合わせることで、交点からどれだ け進んだかという移動角度（距後の度分）を求める。 計算上の新月の時刻（経朔加時）における冬至からの 移動量（中積）を先ほどの値に加算する。これにより、 「黄道の冬至から、昇交点（正交）までの正確な累積 角度（定積度分）」を算出する。 定積度分が 1 年の半分（半歳周）以下であれば、その 位置は「冬至の後」と判定する。もし半歳周を超えて いる場合は、そこから半歳周を引き算し、その残りを 「夏至の後」の位置として扱う。位置が、1 象限以下で あれば「初限」とする。それを超えている場合は、半 歳周からその値を差し引いた残りを「末限」とする。 初限または末限の値に、黄道と赤道の最大のズレ である「極差（14.66[#]）」を掛け算し、それを象限 （91.3125[#]）で割る（＝比例配分を行う）。この値を 「定差度分」と呼ぶ。 得られた定差度分に 24 を掛け、さらに極差（14.66[#]） で割ることで、最終的な補正値を求める。そして、求 めた交点（交）の位置が「冬至の後」の区間にあるな らば引き算（減）、「夏至の後」の区間にあるならば足 し算（加）と判定する。加減（プラスかマイナスか） に従って、黄道と赤道の位置関係の基準値である「定 限度（98 度）」に対して足し引きを行う。こうして最 最終的に補正された値を、その計算で用いる「（真の）定 限度」として確定させる。	段落 6 は、字下げのな い文。6a,6b,6c は字下 げされている文。 定積度分＝年間の任意 の日付における黄道上 の位置 冬至から 1 年を 4 つに 分けて、初限・末限・初 限・末限 赤道の位置を求める 定差度分＝その位置に おける基本補正量 24、98 の導出は段落 6a, 6b にある（が、そ の導出は理解し難い）。
6a	いはゆる 所謂二十四を求むる術に日く、夏至の 内、冬至の外に在る月道と赤道との差 三度五十分を置き、内、夏至の外冬至 の内に在る月道と赤道との差一度三十 分を減じ、余り二度二十分、分を通じ て子を内れ、位を進めて度と為し、二 千二百度を得て、象限の如く而も一に して二十四を得るなり。	いわゆる「24」を求める計算手順は次の通りである。 「夏至の内側・冬至の外側」における月道（白道）と赤 道の交差の差「3.50[#]」から、「夏至の外側・冬至の内 側」における差「1.30[#]」を引き算する。残りは 2.20[#] となるが、これを「分」の単位に直して（220 分）さら に小数点を移動させ（位を進めて）「2200」という数 値にする。これを象限（91.3125[#]）で割り算すると、 目的の定数である「24（正確には約 24.09 だが、整数 に丸めたもの）」が得られる。	3.50 度、1.30 度の導 出は段落 7a, 8a にあ る（が、その導出は理 解し難い）。 $\frac{(3.50-1.30) \cdot 1000}{91.3125} = 24.09 \text{ としている。}$
6b	いはゆる 所謂九十八度を求むる術に日く、半象 限四十五度六十五分を列し、内、二十 四を減じ、余り二十一度六十五分、半 象限を以てこれに相乗して、九百八十 八度三十二分二十五秒を得て、位に寄 す。夏至の内、冬至の外に在る月道と 赤道との差三度五十分を列し、分を通 じて子を内れ、位を進めて度と為し、 三千五百度を得て、位に寄せたるに加 入して共に四千四百八十八度三十二分 二十五秒を得て、実と為す。半象限の 如く而も一にして九十八度を得る。	いわゆる「98[#]」を求める計算手順は次の通りである。 半象限（45.65[#]）を置き、そこから先ほど求めた「24」 を引き算すると、残りは 21.65[#] となる。これに再び 半象限（45.65[#]）を掛け算すると、988.3225[#] にな り、この数値を残す（位に寄す）。次に、先ほどの差 「3.50[#]」を分の単位（350 分）にして位を進め 3500 とする。これを先に残した数値に足し合わせると、合 計で 4488.3225[#] となり、これを分子（実）とする。 これを半象限（45.65[#]）で割り算すると、目的の 98 度（約 98.32[#]）が得られる。	(45.65 - 24) · 45.65 = 988.3225. $\frac{3.5 \cdot 1000 + 988.3225}{45.65} = 98.32 \text{ としている。}$

表 4: 続き. Table 4: (continued)

6c	またの術、半象限を列して二十四を加へ、六十九度六十五分を得て、半象限を以てこれに乘じ、三千一百七十八度三十八分一十二秒半を得る。位に寄す。夏至の外、冬至の内に在る月道と赤道との差一度三十分を列し、分を通じて子を内れ、位を進めて度と為し、一千三百度を得る。位に寄せたるを加入して、共に四千四百七十八度三十八分一十二秒半を得て、実と為す。半象限の如く而も一にして、亦た、九十八度を得るなり。	もう一つの手順では、半象限 (45.65[#]) に「24」を足して 69.65[#] とし、これに半象限 (45.65[#]) を掛け算して 3178.38125[#] を得てこの数値を残す (位に寄す)。次に、もう一つの差「1.30[#]」を分の単位にして位を進め 1300 とする。これを先に残した数値に足し合わせると、合計で 4478.38125[#] となり、これを分子 (実) とする。これを半象限 (45.65[#]) で割り算すると、こちらの手順でも同じく 98[#] (約 98.10[#]) が得られる。	$(45.65 + 24) \cdot 45.65 = 3178.38125.$ $\frac{1.3 \cdot 1000 + 3178.38125}{45.65} = 98.32$ としている。
7	また、定差度分を以て 反て極差を減じ、余りを距差度分と為す。視るに、夏至の後に在る初限は減じ、末限は加ふ。秋正赤道の宿度に加減して、冬至の後に在る初限は加へ、末限は減ず。春正赤道の宿度に加減して、月離白赤道の正交の宿度分と為す。 月離白赤道の正交の宿度分を以て、春秋二正の赤道の当たるところの宿全度分を去減して、余りを正交後の積度と為す。赤道の宿次を以てこれに累加して、象限に満つるはこれを去りて、半交後と為す。再びこれを去りて、中交後と為す。また、これを去りて半交後と為す。 各交後の積度を視るに、半象限已下に在れば初限と為し、已上は象限を去減して、余りを末限度分と為す。 初末限の度分と定限の度分とを以て相減、相乗して定差と為す。正交、中交の後は加へ、半交の後は減ず。定差を以て交後の赤道の積度に加減し、月離白道の定積度と為す。 白道前宿の定積度を以てこれを減じて、各月離白道の宿次度分を得る。これ、赤道の変に係りて白道と為す。 夏至、陰暦の内に在り、冬至、陽暦の外に在り。月道と赤道との差ふところは多きこと三度五十分に至る。	極差 14.66[#] から基本補正量 (定差度分) を差し引いた残りを「距差度分」と定義する。夏至の後の場合：初限は引き算 (減)、末限は足し算 (加) として、「秋分 (秋正)」の赤道宿度に加減する。冬至の後の場合：初限は足し算 (加)、末限は引き算 (減) として、「春分 (春正)」の赤道宿度に加減する。これによって得られた位置が、月と赤道が交わる点である「月離白赤道正交 (昇交点)」M の正確な宿度となる。 求めた正交 (昇交点) の宿度から、基準点 (春秋二正の赤道) の宿度を引き算し、その残りを「正交後の積度」とする。赤道座標上の変化を順に足していき、1 象限に達するごとにその値を引き去る (リセットする)。1 回目のリセット後を「半交後」、2 回目のリセット後を「中交後」、3 回目のリセット後を「半交後」とする。 以下、$\Theta \equiv 91.3125$ とする。昇交点から n 日後の積度を $\theta(n) \equiv (n\Delta\theta - \theta_{\text{昇交点}})(\text{mod } \Theta)$ とする。 $\Theta \leq (n\Delta\theta - \theta_{\text{昇交点}}) \leq 2\Theta \text{ を半交後}$ $2\Theta \leq (n\Delta\theta - \theta_{\text{昇交点}}) \leq 3\Theta \text{ を中交後}$ $3\Theta \leq (n\Delta\theta - \theta_{\text{昇交点}}) \leq 4\Theta \text{ を半交後}$ 各交点 (正交・半交・中交) からの積度をみて、半象限以下であればそれを「初限」とする。それを超えている場合は、1 象限からその値を差し引いた残りを「末限度分」とする。 初末限の度分と、前段で求めておいた「定限の度分」を使って、「引き算 (相減) した結果」と「掛け算 (相乗) した結果」を組み合わせ、最終的な補正值 (定差) を作る。この定差を、正交・中交の後は足し算 (加) し、半交の後は引き算 (減) することで、赤道上の角度を白道上の正しい累積角度である「月離白道の定積度」へと変換する。 最後に、月の位置に関しては、一つ手前の星宿の白道上の累積度数を引き算して、月が今どの星宿の何度何分に位置しているかという「月離白道の宿次度分 (白道基準の月位置)」が得られる。これが、赤道の座標系を変換して白道の座標系を求めた結果である。 夏至のとき月は陰暦 (北側) の内側に位置し、冬至のとき月は陽暦 (南側) の外側に位置する。このように、月道 (白道) と天の赤道との間のズレ (交点から最も離れた場所での傾き・幅) は、最大で「3 度 50 分」に達する。	段落 7 は、字下げのない文。7a は字下げされている文。 正交後の積度=昇交点からの累積角度 中交後=降交点を通過後 初限=交点に近い前半 末限度分=次の交点に近い後半

表 4: 続き. Table 4: (continued)

	『授時發明』読み下し文	解説	備考
7a	いはいゆる 所謂三度五十分を求むる術に曰く（黄赤道の差を求める術に準ず）、半象限四十五度六十五分を以て月道の半弧背と為す。月道の矢一十七度八十分。月道の半背弦の差二度六十分。月道の半弧弦四十三度。 月赤道の小弦四十三度。月赤道の大股五十三度三十分（月道、赤道を去る二十九度九十分を以て半弧背と為し、矢七度五十分を求め得て、これを以て天の半径を減じた余りなり）。月赤道の小股三十七度七十分。赤道の小弦五十七度二十分。赤道の半弧弦四十五度七十分。赤道の大鈎四十零度一十分。赤道の矢二十零度七十分。赤道の半背弦の差三度五十分。赤道の半弧背四十九度二十分、内、月道の半弧背を減じて、余り差三度五十分を得る。 図に云く（朱を以て経を見、墨を以て緯を見る。）	いわゆる「差 3.50 度」を求める手順は次の通りである（これは黄道と赤道の差を求める手順と同じである）。半象限の「45.65[#]」を月道の半弧背とする。このとき、以下ようになる。月道の矢：17.80[#]，月道の半背弦の差（弧と弦の長さの差）：2.60[#]，月道の半弧弦：43.00[#] 月赤道の小弦：43.00[#]，月赤道の大股：53.30[#]（※これは、月道が赤道から最も離れる「29.90[#]」を半弧背として、対応する矢「7.50[#]」を求め、それを天の半径から引き算した残りである），月赤道の小股：37.70[#]，赤道の小弦：57.20[#]，赤道の半弧弦：45.70[#]，赤道の大鈎：40.10[#]，赤道の矢：20.70[#]，赤道の半背弦の差：3.50[#]，赤道の半弧背：49.20[#] この「赤道の半弧背 49.20[#]」から、最初に設定した「月道の半弧背 45.65[#]（端数処理で 45.70[#] とする）」を引き算すると、求めたい「差 3.50 度」が得られる。	
8.	夏至、陽暦の外に在り、冬至、陰暦の内^{たが}に在り。月道と赤道との差ふところは少なきこと一度三十分以下らず。	（月の軌道の向きが変わると）先ほどとは逆に、夏至のときに月が陽暦（南側）の外側に位置し、冬至のときに陰暦（北側）の内側に位置するようになる。この配置のとき、月道（白道）と天の赤道との間のズレ（交点から最も離れた場所での幅）は、最も小さくなった場合でも「1 度 30 分」を下回ることはない。	段落 8 は、字下げのない文。8a は字下げされている文。
8a	いはいゆる 所謂一度三十分を求める術に曰く、半象限を以て月道の半弧背と為す。月道の矢一十七度八十分。月道の半背弦の差二度六十分。月道の半弧弦四十三度。月赤道の小弦四十三度。月赤道の大股五十八度二十分。（月道、赤道を去る一十七度九十分を以て半弧背と為し、矢二度六十分を求め得て、これを以て天の半径を減じた余りなり）。月赤道の小股四十一度一十分。赤道の小弦五十九度四十分。赤道の半弧弦四十四度一十分。赤道の大鈎四十二度。赤道の矢一十八度八十分。赤道の半背弦の差二度九十分。赤道の半弧背四十七度、内、月道の半弧背を減じて、余り差一度三十分を得る。 図に云く（朱を以て経を見、墨を以て緯を見る。）	いわゆる「（月道と赤道の差である）1 度 30 分を求める計算方法」では次のようにする。象限の半分を、月道（白道）の「半弧背」とする。このとき、月道の矢は 17.80[#] である。月道の「半背弦の差（弧の長さと弦の長さの差）」は 2.60[#] である。月道の「半弧弦」は 43[#] である。 月と赤道の関係において、小弦は 43[#] である。月と赤道の関係において、「大股」は 58.20[#] である。（これは、月道が赤道から最も離れる角度である 17.90[#] を「半弧背」とし、そこから計算して「矢」の長さ 2.60[#] を求め、これを天球の半径から差し引いた残りの数値である）。 月と赤道の関係において、「小股」は 41.10[#] である。赤道の「小弦」は 59.40[#] である。赤道の「半弧弦」は 44.10[#] である。赤道の「大鈎」は 42[#] である。赤道の「矢」は 18.80[#] である。赤道の「半背弦の差」は 2.90[#] である。これにより、赤道の「半弧背」は 47[#] となる。この 47[#] から、最初に設定した月道の「半弧背」である 45[#] を差し引くと、その残りの差として（目的の数値である）1 度 30 分が得られる。	

表 4: 続き. Table 4: (continued)

	『授時發明』読み下し文	解説	備考
9.	蓋し白道の二交に斜有り、直有り、陰陽二曆に内有り、外有り。直なるものは密にして狭く、斜なるものは疎^そにして闊^{ひろ}し。その差も亦た、従ひて異なる。 旧法、白道の交周、差を以て黄道を損益して、変じて白道と為す。斜を以て斜を求む。己れが臆見^{まか}に任するに過ぎざるのみ。若思立渾を用いて比量^{へだ}し、白道と黄赤道の正交との東西相距たる極差一十四度三分度の二を得る。 擬して以て法と為し、逐月毎交二十八宿の度分をす。実^{まこと}に天体円転の妙を得たること、最も精詳^たなり。	そもそも、白道が他の軌道と交わる二つの交点には、斜めに交わる部分と、直角に交わる部分があり、陰曆・陽曆の二つの地点（または軌道の北側と南側）には、内側に入り込む部分と、外側へ出る部分がある。直角に交わる部分は両者の軌道は密で範囲が狭く、斜めに交わる部分は疎で範囲が広い。そのため、それらのズレ（差）もまた、それぞれ異なってくる。 従来の古い方法では、白道が交差する周期のズレ（差）を用いて黄道の度数を足し引き（損益）し、それを變形させて白道の度数としていた。これは斜めのデータから別の斜めのデータを求めようとするものであり、作り手の単なる思い込み（臆見）に任せているに過ぎなかった。そこで私は、「立渾（立体的な天球模型・渾天儀）」を用いて実際に天体の運行を比較・計測し、白道と黄道・赤道が直交（正交）する位置から東西に最も離れる最大のズレ（極差）が「14 度と 3 分の 2（約 14.67[#]）」であることを突き止めた。 これを基準として新しい計算規則（法）を定め、毎月、月が交差するごとに二十八宿を通過する度分を細かく算出した。これこそが、誠に天体が円を画いて美しく回転する仕組み（円転の妙）の本質を捉えたものであり、最も精密で詳細なものである。	段落 9 は、字下げのない文のみ（天文大成の本文のみ）。

表 5: 『授時發明』「白道と黄赤道との差」の最後にある彗星に関する記述。読み下し文は岩波本 [6] のもの。

Table 5: The description regarding comets in the section “the difference between the lunar orbit and the ecliptic/celestial equators (白道と黄赤道との差)” in *Juji Hatsume* (授時發明). The transcribed text follows the Iwanami edition [6].

『授時發明』読み下し文	解説
延宝八庚申歳九月下弦後晨、東方に彗星見ゆ。光芒^{なほ}を指し長さ三十許度。二十七日（癸未）に至りても猶見ゆ。二十八日（甲申）に至りて晨伏、見えず。九月二十九日（乙酉）合伏、房初度。十月朔（丙戌）昏西方に唯光芒見ゆ。二日（丁亥）夕、星体見ゆ。光芒東を指し長さ五十許度。十一月二十七日（壬午）彗徐して室北星に没さんと欲す。適合距合五十七日。積行一百一十度。十二月望後、光芒、星体共に没して見えず。室宿を越へず。	延宝 8 年（1680 年）^{かのえさる}庚申の年の 9 月、下弦の月が過ぎた後の夜明け（晨）、東の空に彗星が現れた。その光芒（彗星の尾^{しん}）は西の方向を指しており、長さは 30[#] ほどであった。9 月 27 日（癸未^{みずのとひつじ}）になっても、彗星はなおも見えていた。9 月 28 日（甲申^{きのえさる}）になると、朝方に太陽に近づきすぎて見えなくなった（晨伏）。9 月 29 日（乙酉）には、太陽と完全に重なった（合伏）。その位置は房宿の最初の度数であった。10 月 1 日（丙戌^{ひのえいぬ}）の夕方（昏^{こん}）、西の空に尾の光だけが見えた。10 月 2 日（丁亥^{ひのとい}）の夕方、彗星の本体（核）が見えた。その光芒は今度は東の方向を指しており、長さは 50[#] ほどであった。11 月 27 日（壬午^{みずのえうま}）、彗星は移動し、室宿の北側にある星の付近で消え去ろうとしていた。これらを合わせると、最初に見えてから見えなくなるまでの期間（距合）はちょうど 57 日間であり、その間に移動した角度（積行）は 110[#] に及んだ。12 月の満月（望）が過ぎた後、光芒も本体も共に消えて見えなくなった。彗星が室宿を越えて進むことはなかった。
或いは右の彗星を以て金星と為すはこれにあらず。	この彗星のことを「金星」だと言う者がいるが、それは間違いである。
金星晨伏六月三十日丁亥 入縮三十一度八七三	金星は 6 月 30 日（丁亥^{ひのとい}）に、朝の東の空で太陽に近づきすぎて見えなくなった（晨伏）。このときの太陽は縮（秋分から冬至に向かう軌道区間）の 31.873[#]
合伏八月十日丙寅 入縮七十九度五一二三	金星は 8 月 10 日（丙寅^{ひのえとら}）に、太陽と完全に重なった（合伏）。このときの太陽は縮の 79.5123[#]
夕疾初閏八月十九日乙巳 入縮百二十七度一五二三	金星は閏 8 月 19 日（乙巳^{きのとみ}）に、「夕方の明星」として現れ、太陽から急速に離れていく動きを始めた（夕疾初）。このときの太陽は縮の 127.1523[#]
夕疾末十月十二日丁酉 入盈七度五六三五	金星の夕方の急速な離脱動きは、10 月 12 日（丁酉^{ひのととり}）に終わりを迎えた（夕疾末）。このときの太陽は盈（春分から夏至に向かう軌道区間）の 7.5635[#]
夕次疾初十二月朔日丙戌 入盈六十六度二三七五	金星は 12 月 1 日（丙戌^{ひのえいぬ}）に、夕方の空で次にやや速い速度で動く期間に入った（夕次疾初）。このときの太陽は盈の 66.2375[#]

5.4 結語

本稿では、関孝和による授時暦の研究書『授時発明（天文大成三条図解）』の解説を試みた。「黄赤道の差を論す」「黄赤内外の差を論す」「白道と黄赤道の差を論す」と題された全3章のうち、はじめの2章については、関が完全にその理論を理解していたことがわかる。ただし、授時暦で使われていた弧の長さを求める数学は、会円術と呼ばれる近似式にすぎず、観測と対比させて検討するには、より高度な数学が必要となることが実感されたことと考えられる。また、「白道と黄赤道の差を論す」については、元にした『天文大成管窺輯要』の記載自体が現象論的であり、その論理を追う関の考察にも数秘術的で理解し難い部分があった。

関自身は翌年に『授時暦経立成之法』を執筆しており、弟子の建部賢弘も1681-84年に『授時暦解議』、建部の弟子とされる中根元圭も『授時暦図解發揮』（1707年）を著すなど、和算家の系譜の中で授時暦研究が継続されてゆく[16]。また、関は、円周率や円弧・球の体積求積問題など「円理」と呼ぶ数学を創始し、弧背術に補間公式を導入（ニュートンの補間公式に相当）するなど関連した研究へと向かい、和算の流れをつくった[17]。これら個別の著作の歴史的検討は将来の課題としたい。

一方で、この時期、天体観測に基づいて宣明暦の誤りを指摘し授時暦の重要性を指摘した小川正意（生没年不詳、『新勘授時暦経及立成』1673年の著がある）や、歴史文献の調査から宣明暦の不正を指摘した安藤有益（『東鑑暦算改補』1676年など）などもいた。観測に基づいて、異国の暦を改良する必要性に気づいた渋川春海が、授時暦を改良して貞享暦（1685年-）という和暦を実現させた話はよく知られたところである。

謝辞

本研究は、科研費 挑戦的研究（開拓）24K21170 『天文文化学の新展開：数理的手法の導入で文化史と科学論から自然観を捉える研究の加速』 のサポートを受けました。定期的な議論の場をいただいていることに感謝します。

参考文献

- [1] 真貝寿明「三角法の伝播：江戸前期に存在した2つの三角関数表」大阪工業大学紀要投稿中。
- [2] 広瀬秀雄「授時暦の研究-1-」, 東京天文台 編『東京天文台報』14 (1969) 499-511.
- [3] 広瀬秀雄「関孝和と天文暦学」数学史研究 56 (1973) 1-11.
- [4] 杉本敏夫「関孝和の天文暦学研究」数理解析研究所講究録 1513 (2006) 104-111.
- [5] 杉本敏夫『解説 関孝和 天才の思考過程』（海鳴社, 2008）
- [6] 上野健爾, 小川 東, 小林龍彦, 佐藤賢一（編）『関孝和全集』（岩波書店, 2023）
- [7] 平山 諦, 下平和夫, 広瀬秀雄（編）『関孝和全集』（大阪教育図書, 1974）
- [8] 藪内 清「中国科学の伝統と特色」, 藪内清編『世界の名著 12 中国の科学』（中央公論社, 1979）
- [9] 藪内 清『中国の天文暦法』（平凡社, 1969）が初版。ここでは、訂正などが宮島一彦によってなされた『定本 中国の天文暦法』（藪内清著作集第1巻（臨川書店, 2017）所収を参考にした。
- [10] 真貝寿明「星座図の統計比較 (1): 『欽定儀象考成』に描かれた星座」大阪工業大学紀要 70-1 (2025) p.1-34
- [11] 真貝寿明「星座図の統計比較 (2): 『天文瓊統』に描かれた星座」大阪工業大学紀要 70-1 (2025) p.35-69
- [12] 真貝寿明「星座図の統計比較 (3): 『儀象法要』に描かれた星座」大阪工業大学紀要 70-2 (2025) p.41-72
- [13] 山田慶児『授時暦の道』（みすず書房, 1980）[山田慶児著作集第3巻（臨川書店, 2021）に所収]
- [14] 竹迫 忍「渋川春海の貞享暦の研究」数学史研究 233(2019) p.1-46 (2019)
- [15] 小林博行「『関訂書』に見られる明代後期の中国・回回暦法研究について」科学史研究 53 (2014) 85-98.
- [16] 日本学士院編『明治前日本天文学史 新訂版』（臨川書店, 1979）
- [17] 日本学士院編『明治前日本数学史 第2巻』（岩波書店, 1956）