大阪工業大学紀要 71 (2026) 掲載決定稿

三角法の伝播：江戸前期に存在した2つの三角関数表

真貝寿明

情報科学部情報システム学科
(2026年11月5日受理)

History of trigonometry functions: Two different tables in the early Edo period

by

Hisaaki SHINKAI

Department of Information Systems, Faculty of Information Science and Technology

Abstract

Trigonometry and trigonometric functions are closely related to astronomy and navigation, and their prototypes were invented as early as ancient Greece. The first appearance of trigonometric functions in Japanese mathematics is believed to be in 『八線表算法解義 (Hachisen Hyo Sanpou Kaigi)』 (circa 1727) by NAKANE Genkei (中根元圭). Furthermore, the first trigonometric function table in Japan is attributed to 『算暦雑考 (Sanreki Zakkou)』(circa 1722?) by TAKEBE Katahiro (建部賢弘). While both authors were active around the same time and shared a teacher-student relationship, their works differ completely in terms of variables and derivations. We report the results of an investigation into this point from the perspective of the dissemination of trigonometry.

The definition diagram of trigonometric functions (eight lines) appearing in Nakane Genkei's work is based on the Chinese text 『暦算全書 (Reisan Quanshu)』. This diagram can be traced back to Abū'l Wafā', an Islamic mathematician in 10th century. Japan is at the end of the dissemination route of trigonometry as described in the history of mathematics. On the other hand, Takebe Katahiro's idea was likely motivated by research on the 授時暦 (Shoushi Calendar), and aimed at improving the accuracy of the "会円術 (arc-length formula)" for converting between ecliptic and equatorial coordinates. This means that mathematical cultures with different origins met in Japan at a very close time difference.

キーワード； 数学史，天文学史，天文文化学，建部賢弘，中根元圭

Keyword; History of Mathematics, History of Astronomy, Cultural Studies of Astronomy, Katahiro Takebe, Genkei Nakane

三角法・三角関数は天文学や航海術と密接に関係しており，すでに古代ギリシャ時代に原型が発明されていた．和算に三角関数がはじめて登場するのは，中根元圭による『八線表算法解義』(1727 年頃) とされる．また，日本で初めて三角関数表を作成したのは建部賢弘の『算暦雑考』(1722 年頃?) とされる．二人は同時期に活躍し，師弟関係でもあったが，両書は変数も導き方も全く異なっている．三角法の伝播という視点から，この点を調べた．

中根元圭の書に登場する三角関数（八線）の定義図は，中国書の『暦算全書』が元になっている．同図は，イスラムの数学者 Abū'l Wafā' (940–998) に遡ることができる．日本は，いわゆる数学史で語られる三角法発展および伝播経路の末端である．一方，建部賢弘の書は，関孝和が取り組んだ授時暦研究を動機とし，黄道/赤道座標変換に使われていた「会円術」の精度を上げることが目的と考えられる．ルートの異なる数学文化が，時間的僅差で日本で邂逅したことになる．

1 Introduction & Summary

三角法が，幾何学の構成で重要な位置を占めるのは言うまでもない．天文学（暦学）や天測航海術での必要性から，三角法・球面三角法は古代ギリシャの頃に発明されている．プトレマイオスが『アルマゲスト』にて，ヒッパルコスやメネラウスの業績を踏まえて，三角関数表（角度と弦の表，詳しくは，§3.1）を著している．

三角法は「ギリシャで生まれ，インドで育ち，アラビアで発展した」[1] とも称される．どのような文献がギリシャからインドへ伝えられたかは不明であるが，インドで作られた数表がヒッパルコスのものに類似しているものから始まっていた[1)]ということは，すでに文化交流があったことを窺わせる．実際，西暦 50 年頃には，貿易風「ヒッパロスの風」が発見され，地中海の商人がインドと交流をはじめていたことが知られている．ギリシャで定義された「弦 (chord)」は，5 世紀のインドでは，その対応角度を半分にした「半弦 (Jyā)」として（誰が始祖かは不明である），計算方法が整えられていった．現在，我々が使う「正弦 (sin)」である．そして，後の時代には，計算の簡略化から，「余弦 (cos)」「正矢 (versine) $(1-\cos\theta)$」「余矢 (coversine) $(1-\sin\theta)$」なども定義された．

古代ギリシャの科学知識は，ローマ帝国の崩壊とともに，イスラーム圏に引き継がれ，イスラームではインド科学と融合する形で科学が発展した．イスラーム圏では，ギリシャの「弦」をインドの「正弦」へ置き換え，さらに日時計の影の計算から「正接 (tan)」と「余接 (cot)」を定義した．また，各地域から祈りを捧げるメッカの方角を知る必要性から，球面三角法が発展した．現在使われる三角関数が 6 種揃ったのも，イスラームだった．（インドより早く，現在使われている三角関数が揃った．）

イスラーム科学は，中世ヨーロッパに伝えられて現代西洋科学の発展につながる．三角法は，航海術への応用のために，独立した 1 つの分野として確立してゆき，三角関数の計算を簡便にするために，対数を用いた計算法が早くから導入された．

日本で，三角法を紹介したのは中根元圭 (1662-1733) とされる．中根は中国暦算書『暦算全書』(1723) に訓点を付けて将軍吉宗に献上するとともに，中国書『崇禎暦書』(1631-1634) にある三角関数（八線）を『八線表算法解義』(1727 頃) として紹介した．八線とは，三角関数 6 種に正矢と余矢を加えたものである（後述する図 2.1 と表 2.1 参照）．八線の数表が入手できたのは，1727 年であり，これが『数学史事典』[6] にも記載されている記録である[2)]．『崇禎暦書』は中国，明代末に徐光啓 (1562–1633)・李子藻(1565–1630) らがイエズス会宣教師アダム・シャール (Johann Adam Schall von Bell, 湯若望，1591–1666) らの協力のもとに編纂した，西洋暦法の解説書である．したがって，伝えられた三角法は，ヨーロッパ起源，ひいてはイスラーム経由のギリシャ・ローマ数学と考えられる．本稿では，この系譜を軸に，三角関数の定義図と，三角

1) ヒッパルコスの数表そのものは失われているが，24 の角度についての数表を求めようとした，という点では類似している．

2) 小曽根は，1650 年にオランダ特使が測量法伝授のために，アストロラーベや三角関数表を持ち込んだことを指摘している [2]．ユリアン・スケードルが幕臣北条氏長らに三角測量法を教え，実演させたようだが，その知識が理解され，定着したかどうかは定かではない．小曽根はその三角関数表がピティスクスの 1630 年版の『A Canon of triangles』であろう，と結論している [3, 4]．後述する八線表輸入稟議の顛末 [5] を考えると，和算家には伝わっていなかったものと考えられる．

関数表の作成方法の 2 つを比較することで，数学文化の伝播を追う（§2, 3）．

その一方で，日本で初めて三角関数表を作成した文献として，建部賢弘 (1664-1739) の『算暦雑考』（1722 頃?）が挙げられる．建部が表にしたのは，弧の長さ（半背），矢，半弦の 3 つの量（後述する図 4.1）の角度に関する一覧である（§4）[3]．独自の数表で，その導出方法も独自である．動機は江戸初期の改暦を目指した研究で，渋川春海や関孝和が取り組んだ授時暦研究であった．授時暦では，北宋時代の沈括が導いた「会円術」（弦と矢から弧の長さを導く近似式）を用いて黄道・赤道の変換を行っていた．建部の表は，この近似の精度を格段にあげる式として考案されていたようである．

すなわち，数学文化の伝播プロセスとして，中根に至る「ギリシャ発インド・イスラム・ヨーロッパ・中国経由日本着」というルートと，建部に至る「中国発日本着」という 2 つのルートが存在した．そして，時間的僅差で江戸前期に両者が邂逅したことになる．そして，この時期を境に，江戸の数学文化は，中国経由で西洋の学問に触れる時代になっていった．

本稿の構成は以下のとおりである．第 2 章では，中根元圭の紹介した三角関数表のルーツをイスラームまで遡る．第 3 章では，三角関数表の作成方法の進展をギリシャ・インド・中国の順で見る．第 4 章は，建部賢弘の取り組んだ三角関数表のルーツを，中国で弧田問題・弧長問題として扱われた事例と造暦の必要性に求める．第 5 章では，数学文化の伝播図を提示する．

2　三角関数の定義図の由来

2.1　八線の定義図

中根元圭が『八線表算法解義』で紹介したのは，「正弦・余弦・正切・余切・正割・余割・正矢・余矢」の八線である．八線の定義を図 2.1 と表 2.1 で示す．

図 2.1 に示すように，半径 1 の円を原点 O を中心に 90 度分だけ描き，角度 θ の方向に直線 OPST を取る．点 P はこの直線と円との交点である．$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ はそれぞれ PR，PD，AT となる．図の OT，BS，OS が，$\sec\theta, \cot\theta, \csc\theta$ になることは，次の式から確認できる．

$$\mathrm{OT} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{AT}^2} = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \quad (1)$$

$$\mathrm{BS} = \tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta} \quad (2)$$

$$\mathrm{OS} = \sqrt{\mathrm{OB}^2 + \mathrm{BS}^2} = \sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\theta}} = \sqrt{\frac{1+\tan^2\theta}{\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sin\theta} \quad (3)$$

図 2.1 は，現代数学で基本とされる 6 つの三角関数を表現したコンパクトな図である．実は，この図と酷似した図が，『数学史事典』[6] 三角法の項に，10 世紀イスラムのアブ・ワファー (Abū'l-Wafā', 940–998) による三角関数の定義図として紹介されている．本章の目的は，このリンクを確かめることである．

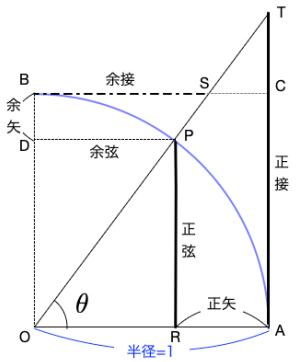


図 2.1: 三角関数の定義図．中根元圭の描いた図（本稿の図 2.2）を（角 θ が現代風に横軸からの角度となるように）描き直したもの．

Figure 2.1: Definition of trigonometry functions. Copied from the figure by Genkei Nakane (see Fig. 2.2 of this article) as the angle θ is from the horizontal axis which we are using now.

表 2.1: 図 2.1 における八線の定義．

Table 2.1: Definitions of eight trigonometry functions in Figure 2.1.

正弦	せいげん	$\mathrm{PR} = \sin\theta$
余弦	よげん	$\mathrm{PD} = \cos\theta$
正接（正切）	せいせつ	$\mathrm{AT} = \tan\theta$
正割	せいかつ	$\mathrm{OT} = \sec\theta = 1/\cos\theta$
余割	よかつ	$\mathrm{OS} = \csc\theta = 1/\sin\theta$
余接（余切）	よせつ	$\mathrm{BS} = \cot\theta = 1/\tan\theta$
正矢	せいし	$\mathrm{AC} = 1 - \cos\theta$
余矢	よし	$\mathrm{BD} = 1 - \sin\theta$

3)　当時まだ関数という概念はなかった．

表 2.2: 和算における三角関数表（数学史事典 [6]「数表：和算」の項，『和算史年表』[7] から作成）．
Table 2.2: List of the Table of Trigonometry functions in the Mathematics of Japan Edo period. (References: [6], [7])

中国，オランダ	日本	
梅文鼎『暦算全書』(1723) 西洋の天文数学書，八線表は含まず	⇒ 1726 年輸入される 中根元圭が訓点を付け，建部賢弘が序文を書き 1733 年に吉宗に献上	
徐光啓『崇禎暦書』(1634) 西洋の天文学書，八線表あり	⇒ 1727 年輸入される 割円八線表が渡来 中根元圭『八線表算法解義』(1727 頃)	
	戸板保佑『関算四伝書前伝』(-1780)	1 度=60 分
	建部賢弘『算暦雑考』(1722?)　日本初の三角関数表	半背/矢/半弦
	松永良弼（よしすけ）『割円十分標』(1736)	1 度=100 分
	安倍泰邦『（宝暦）暦法新書』(1760s)	1 度=60 分
『暦象考成』1 度=60 分，1 分=60 秒 八線表は含まず		
	石黒信由『八線表製法捷術』(1823)	
戴進賢『暦象考成続編』(1742) 八線表は含まず	⇒ 山路徳風，安倍泰栄『（寛政）暦法新書』(1838)	1 度=60 分
	渋川景佑，足立信行『新法暦書続編』(1844)	1 度=60 分
	福田理軒『測量集成』(1855)	1 度=100 分，10 分ごと正弦，正接
	森七蔵正門『割円表』(1857)	
Pibo Steenstra, *Grondbeginsels der Meetkunst*, Amsterdam, 1803	⇒ 輸入され，蘭学者・吉雄俊蔵 (1787-1847) が所蔵した [8]．『暦算全書』と同じ三角関数定義図がある．	

2.2 『崇禎暦書』と『暦算全書』

文献 [6, 7] などを参考に，江戸期和算における三角関数に関する代表的な文献を表 2.2 に示す．

建部賢弘と，彼の弟子である中根元圭は，将軍吉宗の改暦に対する意思に応えるため，中国からの暦算書の解読に関わっていた．その過程で『暦算全書』が 1726 年に輸入された．そして中根元圭は『暦算全書』の訓点和訳（返り点と送り仮名を施す）を行い，建部賢弘が序文をつけて 1733 年に紅葉山文庫に献上された．その後に，中根は『八線表算法解義[4]』に，図 2.1 を示している．これが，日本に三角関数を紹介した初めてのもの，とされる．

中根元圭の図は，『崇禎暦書[5]』(1634) と『暦算全書[6]』(1723) に掲載されているものと同じである（図 2.2）．輸入された順は『暦算全書』の方が先のようだが，ここでは二書を編纂された順に見てゆく．

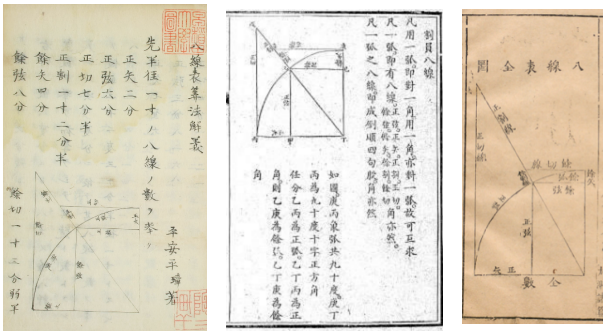


図 2.2: 三角関数の定義図（八線図）．出典：『八線表算法解義』は早稲田大学古典籍データベース（請求記号 ニ 02 00708 0033），『暦算全書』『崇禎暦書』は国書データベース（書誌 ID 100238563，および 100240353）から．
Figure 2.2: Definitions of trigonometry functions in the literatures.

『崇禎暦書』の編纂者である徐光啓と李子藻は，中国に初めて宣教師として入ったマテオ・リッチ (Matteo Ricci, 利瑪竇, 1552–1610) の教え子である [9]．イエズス会の到着以前から中国では改暦の必要性が認識されていたが，リッチは西洋科学の優位性を示すことで布教を進める足掛かりを築くことに

4) 例えば，早稲田大学古典籍データベース から取得できる．請求記号 ニ 02 00708 0033
https://www.wul.waseda.ac.jp/kotenseki/html/ni02/ni02_00708_0033/index.html
5) 例えば，国書データベースから取得できる．書誌 ID 100240353
https://kokusho.nijl.ac.jp/biblio/100240353/1?ln=ja
6) 例えば，国書データベースから取得できる．書誌 ID 100238563
https://kokusho.nijl.ac.jp/biblio/100238563/21?ln=ja

した.『崇禎暦書』は 1631-1634 年に明帝に献上されたが，明から清へ時代が変わっても改暦のプロジェクトは続けられ，1644 年に時憲暦に改暦されることになる．その後,『崇禎暦書』は『西洋新法暦書』と名称を変えている．

表 2.3: 『崇禎暦書』の構成.
Table 2.3: Table of Contents of 『崇禎暦書 (Chongzhen Calendar)』.

1. 採用：導入・歴史・公式記録	
奏疏・題疏	改暦の経緯と組織
新法暦引	全体のガイドブック
暦法西伝	西洋天文学の歴史
学暦小弁	疑念を解くための Q&A 集
新法表異	西洋式と中国式の計算結果の比較
2. 法原：数学・理論の基礎	
幾何要法	ユークリッド幾何学
大測	球面三角法
測量全義	測量術
割円八線表	三角関数表
籌算	ネイピアの棒（骨）の使用法
3. 暦指：天文学の理論的背景と天体ごとの運行理論	
測天約説	宇宙構造論と観測法の概説
日躔暦指	太陽の運行理論
月離暦指	月の運行理論
交食暦指	日食・月食の理論
五緯暦指	五惑星の運行理論
恒星暦指	恒星の位置理論
4. 暦表：計算用の数値データ集	
日躔表	太陽の運行データ
月離表	月の運行データ
交食表	日食・月食のデータ
五緯表	五惑星の位置データ
距緯度表	恒星の位置データ
5. 暦器：観測機器と計算の実践	
渾天儀説	観測機器の構造と使い方
遠鏡説	望遠鏡の構造と使い方
比例規解	計算定規の使い方
測食	日食・月食の計算・観測法
古今交食考	過去の日食・月食データの検証

『崇禎暦書』は 135 巻からなる．基礎理論・計算されたデータ・観測機器の解説・測量法までをカバーした内容である（表 2.3）．宇宙の構造（太陽系の構造）を説明する箇所は，地球中心説に固執したチコ・ブラーエの体系が採られているが，相対的な位置関係は太陽中心説と同じなので暦作成の点では問題にはならない．

『崇禎暦書』から約 90 年後に，梅文鼎 (1633-1721) が西洋天文学・数学と中国伝統の知識を折衷し，自身の著作をまとめて『暦算全書』とした.『暦算全書』は，暦学（天文学）と数学に関する 75 巻の書として知られているが，雍正元年 (1723) の初版には，三角関数表（八線表）は掲載されていなかった（「割円八線之表一巻　続出」となっている [10]）．雍正二年版には，二巻ものとして総目に記載されている．中根元圭と建部賢弘が 1726 年に手にした『暦算全書』には八線表がなかった．そこで，八線表の取り寄せが急務となり，幕府の「御用本」として [5]，1727 年に改めて八線表が輸入されることになった.『船載書目』によれば，このときの八線表は，梅文鼎著のもの（上下巻），徐光啓奉・〓玉函（ヨアンネス・テレンティウス, Ioannes Terrentius, 1576–1630，〓は登＋おおざと）撰のもの，および八線表用法の巻の 3 つであったという [5]．中根と建部が献上した訓点付きの『暦算全書』には，八線表が付けられていて，その表は『崇禎暦書』のものと考えられている [12, 13].

2.3　宣教師が手にした欧州の数学書

『崇禎暦書』には，詳細な三角関数表がある．正弦，正切，正割，余弦，余切，余割の 6 つについて，0 度から 45 度まで，1 分角ごとに最大 7 桁の値が記されている（小数点の表記が導入されるまでは，表の精度を決める桁数を多くするためには，半径を大きくする必要があった.『崇禎暦書』では基準円の半径を 10 万としている）．ただし，6 桁までの使用を推奨している．45 度から 90 度までは同じ表で異なる箇所を参照すれば 6 種の値が得られることも承前とした表である．宣教師と徐光啓・李子藻らがこの表を作成した折には，参考とした表があったはずである．宣教師らが自ら計算した可能性もあるが，必ずしもそう信じる必要もない（中国に古代より伝わる星座を，宣教師が西洋星図を用いて同定したが，その際には詳細な観測をしたわけではなかったことが竹迫 [11] によって確認されている）．ここでは参照元となる本を探ることにする．主な登場人物や著作の表記は表 2.4 を参照されたい.

7）明朝 (1368-1644) の末期から清朝 (1644-1911) の最盛期まで，といえる

16 世紀に誕生したキリスト教イエズス会は，中国への布教活動を 1582 年から 1773 年まで行った[7]．もともとイエズス会は，グレゴリオ暦への改暦に従事したクラヴィウス（1538–1612）が数学を教える教育体制を取るなど，基礎となるカリキュラムが存在していた [9]．リッチは布教の最初の数十年の間に，クラヴィウスの著作である『エウクレイデス原論』『アストロラビウム』『実用幾何』『天球論註解』『実用算術要綱』などを徐光啓や李子藻と漢訳している [9].

このうち，『実用幾何』は測量・建築などへの応用を念頭にした数学書で，アストロラーベや四分儀などの利用法も含み，簡易な正弦表が添えられている．『アストロラビウム』は，アストロラーベの構造・原理およびその使用法（時刻の測定、星の位置計算、測量など）を詳細に解説した書である．0 度から 45 度まで，2 分角ごとに 7 桁の正弦表（円の半径は 10^7）があり，45 度から 90 度までは同表を参照して値を探し出せるような構造になっている．『崇禎暦書』の表と構造は似ているが，正弦以外の値はないし，八線の定義図と同じ図はないようだ．

李迪 [14] は，『崇禎暦書』のうち『大測』は，ドイツのピティスクス (1561-1613) の『三角法』と，フランドルのステヴィン (1548-1620)『三角法』を編訳したもの，との説を紹介している．

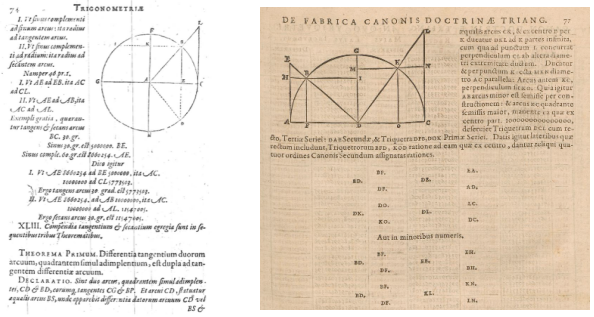
ピティスクスとその時期の三角法については，Miura[15] に詳しい．ピティスクスの書によって英語とフランス語に trigonometry （三角法）という言葉が生まれた．半径 10^5 あるいは 10^7 の円に対して計算された sin, tan, sec の三角関数表[8]が，10 秒角ごとに描かれている．三角関数を紹介するものとしては，当時の最新版だったといえる．ピティスクスの書[9]にも八線の定義図（欧州では三角関数の定義図というべきか）が掲載されている（図 2.3）．

レティクスはコペルニクスの弟子である．10 秒角ごとの 6 つの三角関数表の作成に着手したが，半ばで亡くなった．その計算は，弟子のオットー (Valentinus Otho, 1545-1603) に引き継がれ，『三角法（Opus Palatinum de triangulis)』として 1596 年に出版された．700 ページ以上の数表である．定義図も同じものが見つかる（図 2.3）．レティクスは三角関数を直角三角形の辺の比として定義し，以下の 3 つのグループに分けている．

- 斜辺 (Hypotenusa) を 1 とした場合の垂直辺 (Perpendiculum) が sin , 底辺 (Basis) が cos
- 底辺を 1 とした場合の斜辺を sec，垂直辺を tan
- 垂直辺を 1 とした場合の斜辺を csc，底辺を cot

なお，オットーの数表には誤りがあることをピティスクスが指摘し，ピティスクスは究極の表として『数学宝典』を作る．これが，ヨーロッパで 20 世紀はじめまで長く使われるものとなった．

レギオモンタニウス（ヨハン・ミュラー）は，プトレマイオスの『アルマゲスト』を再発見し，ギリシャ語原典から読み解き，三角法を用いてその内容を批判的に紹介した天文学者である．活字印刷がはじまった初期の頃，科学書を多く出版したことでも知られている．その批判がコペルニクスの発想につながった，とされる．



B. ピティスカス『Trigonometriae』(1612)　レティクス『Opus Palatinum de triangulis』(1596)

図 2.3: 三角関数の定義図．出典：ピティスクスは，ExLibris（Identifier DIGITOOL165495）．レティクスは，スイス中近世の貴重書デジタルアーカイブ（DOI 0.3931/e-rara-9112）．

Figure 2.3: Definitions of trigonometry functions in the literature.

8) なぜ，sin, tan, sec の 3 種か，という点については，Miura[15] の「天文学者が必要としたのは sin，測量士が必要としたのは tan，航海士が必要としたのが sec だった」というコメントが推察の根拠となろう．

9) ピティスクスが書中に言及した [15] 数学者・天文学者は，コペルニクス，レギオモンタニウス，プトレマイオス，ルーメン (Adriaan van Roomen, 1561 - 1615)，ラムス (Petrus Ramus, 1515-1572)，ショーン (Lazarus Schonerus, 1543-1607)，レティクス，アピアヌス (Petrus Apianus, 1495 - 1552), ソクラテス，ユークリッドである．

表 2.4: ルネサンスのヨーロッパでの三角法の発展.

Table 2.4: Development of trigonometry in the renaissance Europe.

名前と生没年	代表著書と数学的な貢献	三角関数表	文献
レギオモンタヌス 1436-1476 (Regiomontanus; Johannes Müller)	『すべての三角形について (De Triangulis Omnimodis)』(1464, 刊行は 1533 年) 三角法を天文学から独立した分野にした．正弦を用いた．正弦定理，球面余弦定理を示した.	半径 60000 の sin	[16]
コペルニクス 1473-1543 (Nicolaus Copernicus)	『天球の回転について (De revolutionibus orbium coelestium)』(1543) 球面三角法を詳述して，地動説を提案.	半径 10^5，10 分角ごとの正弦表	
レティクス 1514-1574 (Georg Joachim Rheticus)	『三角形理論のカノン（Canon doctrinætriangulorum）』(1551)『三角法（Opus Palatinum de triangulis）』(1596) 三角関数を「円の弦」ではなく「直角三角形の辺の比」として初めて定義.	半径 10^4，10 秒角ごと．6 種の三角関数	[17]
クラヴィウス 1538–1612 (Christoph Clavius)	グレゴリオ暦への改暦，イエズス会での教育指導. 『エウクレイデス原論 (Euclidis elementorum)』(1574)『アストロラビウム (Astrolabium)』(1593)『実用幾何 (Geometrica practica) 』(1604)『天球論註解 (In sphaeram Ioannis de Sacro Bosco commentarius)』(1570)『実用算術要綱 (Epitome arithmeticae practicae)』(1583)	半径 10^7，2 分角ごとに 7 桁の正弦表	[9]
ヴィエト 1540-1603 (François Viète)	『数学的表（Canon mathematicus）』(1579) 和積の公式，n 倍角公式	半径 10^5，1 分角ごと．6 種の三角関数	[18]
ピティスクス 1561-1613 (Bartholomäus Pitiscus)	『三角法（Trigonometria）』(1595/1600/1612 の各版あり)『数学宝典 (Thesaurus Mathematicus)』(1613) Trigonometry という用語を創案．和積の公式（prosthaphaeresis, プロスタパエレシス）を用いて表計算．レティクスの遺稿を整理・修正し普及させた.	半径 10^{15}，10 秒角ごと，sin, tan, sec	[15, 16, 3]
ステヴィン 1548-1620 (Simon Stevin)	『三角法 (De Driehouckhandel)』（1605）十進小数の記法を考案し，三角関数の値を小数で扱う．測量への応用を詳述.	sin, tan, sec	

2.4 イスラームの三角法

この節は，文献 [19, 20, 21, 22, 23] を参考にした.

イスラームの科学が，ヨーロッパに伝えられたのは，主に 12 世紀とされる.

そのルートの 1 つは，キリスト教勢力がイベリア半島で進めた，後に国土回復運動（レコンキスタ，914–1492）と呼ばれる運動の結果である．とくに都市トレドが奪還されると，アラビア語の膨大な文献の翻訳が始められた．この他に，両文化の接点であったシチリア王国パレルモや，北アフリカとイタリアの貿易ルートも窓口となった．ユークリッド幾何学，プトレマイオスの天動説，ヒポクラテスやガレノスの医学，アリストテレスの哲学などのギリシア文化やヘレニズム文化が伝わり，12 世紀ルネサンスと呼ばれる欧州文化の変革が生じた．この時期に，数学の分野では，インド・アラビア数字，ゼロの概念，代数学，三角法も伝わった．どのルートで，どの書籍がヨーロッパに紹介されていったのかは未調査であるが，文化の伝播経路はイスラームへ辿れることは確かである.

イスラームの知識は，もともと，ギリシア・ローマ時代の学術文献が，5 世紀のローマ帝国の崩壊によって，アラビア地域にもたらされたものを含んでいる．サーサーン朝ペルシア (226-651) の時代では，知識収集のための翻訳活動が進められ，同時にインドからの科学も蓄積された．セーボーフト (Severus Sebokht, 575 頃-666) は，プトレマイオスの『簡便表』をまとめた『星座について』をシリア語で著すとともに，インド天文学・数学の優位性に言及している．アッバース朝 (750–1258) の 2 代目最高権力者（カリフ）のマンスール（在位 754-774）の時代には，書物のアラビア語への翻訳振興が進んだ．プトレマイオスの『アルマゲスト』(827 頃のハッジャージュ訳が現存)，ユークリッドの『数論入門』などはこの頃に訳されている．フワーリズミー (780 頃-850 頃) が，インドで使われていた数字を導入したため，現在それが（インド・）アラビア数字と呼ばれていることはよく語られる話である.

三角法は，イスラームで大きく発展した．関係した数学者を表 2.5 に示す.

表 2.5: イスラームでの三角法の発展．[19, 22] を参考に作成．大文字で始まる三角関数は半径を乗じた値（Sin θ は $60\sin\theta$ など）．

Table 2.5: Development of trigonometry in Islam. Trigonometric functions that begin with a capital letter are obtained by multiplying them by the radius (e.g., Sin θ is $60\sin\theta$). References : [19, 22]

名前		主な貢献・特徴	三角関数表
アル＝フワーリズミー al-Khwārizmī	780-850	代数学の体系化，地理学的座標の改訂．アルゴリズムの語源．日時計，観象儀（アストロラーベ）なども作成したとされる．（フワーリズミーは「ホラズム出身の人」の呼称）	Sin θ (1° ごと, 3 桁), $12\cot\theta$ (1° ごと，少数 1 桁)
ハバシュ・ハーシブ Ḥabash al-Ḥāsib	? -864 頃	太陽・月の距離と大きさに関してアラビア語で初めて言及．弦ではなく正弦を使うインド数学を用いるが，インド数学にはない球面三角表や 60 進法を用いるプトレマイオス天文学を中心にする．	Sin θ (15′ ごと，4 桁)，Tan θ(30′ ごと，小数 2 桁), Cot θ, Vers θ，Csc θ (1° ごと，3 桁)
アル・バッターニー Al-Battānī	853–929	三角法・球面三角法の発展．緯度差と経度差からキブラ (Qibla) を求める手法の提案．私立天文台を設けて観測し，489 個の恒星表作成．	Sin θ (30′ ごと，3 桁)，$12\cot\theta$ (1° ごと，小数 1 桁)
アル・ナイリージー Abū al-'Abbās al-Faḍl ibn Ḥātim al-Nayrīzī	875-940	球面三角法を適用してキブラを求める手法を提案．	
アブル・ワファー・ブーズジャーニー Abū al-Wafā' al-Būzjānī	940-998	三角関数の概念と計算法，円の分割，負数の研究，象限儀の考案．ギリシア科学文献の翻訳・注釈を行い，特にプトレマイオスの『アルマゲスト』の翻訳で名を残す．$R=1$ で三角関数定義．正弦に対する加法定理．	Sin θ (1′ ごと，3 桁)
クーシュヤール・イブン・ラッバーン Kūshyār ibn Labbān	971–1029	『天体の距離と大きさに関する論文』	Sin θ (1′ ごと，3 桁)，Tan θ (1° ごと，3 桁)，$7\cot\theta$, Vers θ (1° ごと, 3 桁)
アル＝ビールーニー・アル＝フワーリズミー al-Bīrūnī al-Khwārizmī	973-1048	数学，測地学，天文学に多くの業績．歴史書『過去の足跡』，地理書『インド誌』，精密科学書『占星術要約』，百科全書『マスウード宝典』，地球の計測．『天文表』に正矢，60 進法の採用	Sin θ (10′ ごと，4 桁，表差 2 種)，Tan θ (1° ごと，5 桁，表差 2 種).
ナスィールッディーン・トゥースィー Nasīr al-Dīn al-Tūsī	1201-1274	神学者，哲学者，数学者，天文学者．非ユークリッド幾何学の基礎，三角法の独立．正弦定理．（トゥースィーは「トゥース生まれの人」の呼称）	Sin θ, Vers θ, Tan θ (1′ ごと，3 桁)
ウルグ・ベク Ulug Beg	1394–1449	サマルカンドに天文台を設立，1,018 の恒星表作成．	Sin θ, Tan θ (1′ ごと，5 桁)

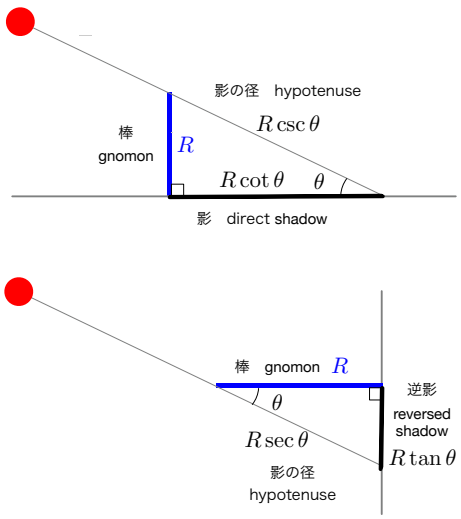


図 2.4: 日時計の影の長さと影の径．

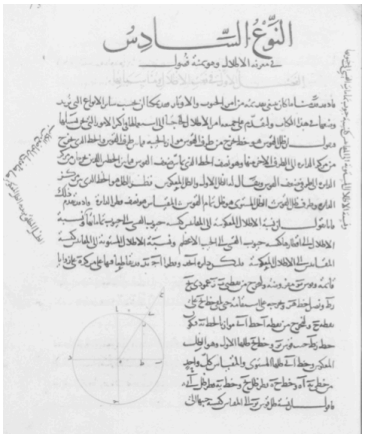
Figure 2.4: Length and path of a sundial's shadow.

イスラームで三角法が発展した理由が 2 つある，とされている．1 つは，日時計の影の長さを表すためである．図 2.4 に示すように，日時計には地面に棒 (gnomon) を立てるものと，壁に棒を水平に打ちつけるものの 2 種類ある．どちらも太陽を見込む角を θ とすれば，影の長さはそれぞれ $\cot\theta$，$\tan\theta$ になる．イスラームでは，棒の先端から影の先端までを「影の径」という．その長さはそれぞれ $\csc\theta$, $\sec\theta$ になる．

もう一つは，1 日に 5 回礼拝するときに，メッカにあるカアバ神殿の方角（Qibla，キブラ）を知る必要があったことである．自分の位置とメッカの位置の緯度差と経度差を既知として，どちらがキブラか．バッターニーは，座標値の差から方向を導く方法を提案した．ナイリージーは，地球表面に球面三

角法を適用した方向決めを提案している．球面三角法の上手い使い方である．

10 世紀に書かれたワファーの『アルマゲスト（完備の書）』は，プトレマイオスの『アルマゲスト』の注釈書や改訂版としての側面を持っているが，平面・球面三角法の改良（正弦定理の証明など）を含めた独自の進展を含んでいる，という．ワファーは三角関数 6 種を統合して説明した．それが，本章で追跡してきた三角関数の定義図である（図 2.5）．そして，三角関数を半径 1 の円に対応する辺の比で表すことを提案した（すぐには主流にならなかったようだが）．また，数表も用意した．プトレマイオスの弦の表が 60 進法で小数点以下 2 桁相当（10 進法換算で 5 桁相当）の精度だったのに対し、彼は小数点以下 8 桁（現代の 10 進法換算）に相当する精度で，sin と tan の表を 15 分角刻みで作成している．その際，独自の増分法や，半角の公式・倍角の公式を用いている．



アブ・ワファー『Kitab al Kamil』（10c）

図 2.5: 三角関数の定義図．出典：フランス国立図書館 (Identifiant: ark:/12148/btv1b100374763).
Figure 2.5: Definition of trigonometry functions in Abū al-Wafā's book.

このようにして，中根元圭の八線定義図が，その原型が作られたイスラーム科学まで辿れることができた．

3　三角関数表の作成史

本章では，三角関数表の変遷を軸にして，数学文化の伝播を見る．すでに述べたように，『崇禎暦書』経由で日本に伝えられた三角法のルートは，イスラーム発ヨーロッパ・中国経由であったが，三角関数表の作成方法についても類似していることを確認する．ここでは，プトレマイオス『アルマゲスト』の弦の数表，インドでの数表作成，そして『崇禎暦書』での数表作成方法について紹介する．

3.1　プトレマイオス『アルマゲスト』の弦の表

2 世紀のギリシャ人天文学者プトレマイオスは，『メギステ・シンタクシス（最も偉大な数学的集成）』という書にて，数式と幾何学で説明する天文学を確立した．惑星の順行逆行運動を離心円と周転円を用いて説明する地球中心説は，その後中世ヨーロッパでコペルニクスが太陽中心説を唱えて以降も長く支持されることになる．この書はイスラームにて定冠詞「アル」が付されて『アルマゲスト』と呼ばれるようになった．『アルマゲスト』書 [24, 25] には，ヒッパルコスの業績が引用されている．ヒッパルコスは三角関数表（弦の表）も作成したと考えられているが，現存しておらず，『アルマゲスト』中の三角関数表が最も古いものとされる．

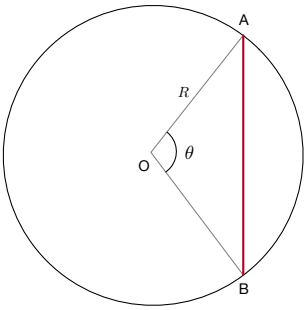


図 3.1: 角度 θ と弦 AB .
Figure 3.1: The angle θ and the chord AB.

『アルマゲスト』の数表は，図 3.1 にあるような，角度 θ と弦 (chord) AB の関係を 60 進法にて表記したものである．現代表記にすれば，半径を R とし

て，（弦を無次元量として），

$$R\,\mathrm{crd}\ \theta = 2R\sin(\theta/2) \tag{4}$$

となる．すぐにわかる値は

$$R\,\mathrm{crd}\ 60^\circ = R \tag{5}$$

$$R\,\mathrm{crd}\ 90^\circ = \sqrt{2}R \tag{6}$$

である．

角度も弦も小数点以下は 60 進法で表記する．プトレマイオスは半径 R を 60 とした表としており，例えば，

$$\begin{aligned} R\,\mathrm{crd}\ 90^\circ &= \sqrt{2}R = 84.85281374\cdots \\ &= 84 + \frac{51}{60} + \frac{10}{60^2} + \frac{8}{60^3} + \cdots \end{aligned} \tag{7}$$

となる場合，$84;51,10,8$ などとして表記する．

さて，弦の定義と三平方の定理から

$$R\,\mathrm{crd}\ (180^\circ - \theta) = \sqrt{(2R)^2 - (R\,\mathrm{crd}\ \theta)^2} \tag{8}$$

の補角の関係が導かれる．また，半角の公式

$$\begin{aligned} &R\,\mathrm{crd}\ \frac{\theta}{2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\left\{(2R)^2 - 2R\sqrt{(2R)^2 - (R\,\mathrm{crd}\ \theta)^2}\right\}} \end{aligned} \tag{9}$$

が導かれる．この関係は，ヒッパルコスも導いていたようだ．

crd 60° と crd 90°，そして上記の補角の関係と半角の公式が既知であれば，0° から 180° まで 24 の角度に対する弦を求めることができる（図 3.2）．

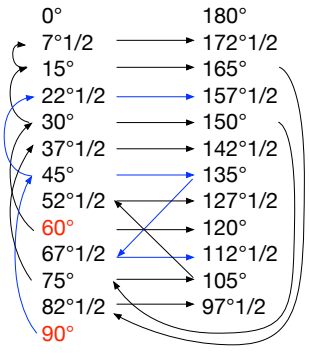


図 3.2: 60° と 90° の弦の値と，補角の関係と半角の公式が既知であれば，24 の角度の値での数表が作成できる．
Figure 3.2: If the chord of 60° and 90°, the relationship between supplemental angles, and the formula for half-angles are known, then a numerical table can be created for 24 angle values.

プトレマイオスは，0.5° 刻みの弦の値を求めるため，36° と 54° の弦の値を幾何学的に求めている．現代数学での $\sin\theta$ で説明する [26] と次のようになる．

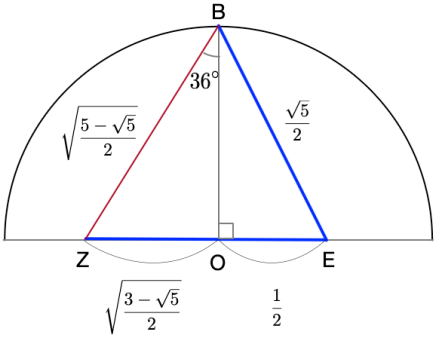


図 3.3: $\sin 36^\circ, \sin 54^\circ$ を求める図．
Figure 3.3: A way to obtain $\sin 36^\circ$ and $\sin 54^\circ$.

$\sin 36^\circ$ は，次のように求めている．図 3.3 のような，O を中心とする半径 1 の円を考える．OE=1/2 となる点 E と，点 B を結ぶ直線 BE の長さは $\sqrt{5}/2$ である．点 E より，BE と同じ長さをとった点 Z を考えると，BZ は，半径 1 の円に内接する正五角形の辺の長さ $\sqrt{(5-\sqrt{5})/2}$ に等しくなる．したがって，角 OBZ は 36° となるので，

$$\sin 36^\circ = \sqrt{(5-\sqrt{5})/8}$$

となる．角 OZB は 54° となるので，$\sin 54^\circ$ も求められる．

$\sin 30^\circ$ と $\sin 36^\circ$ がわかったことから，加法定理を用いることで，6° 刻みの三角関数を作ることができる．さらに，半角定理，倍角定理を用いることで，3° 刻み，1.5° 刻み，0.75° 刻みの三角関数を求めることができる．さらに，

$$\frac{\sin 0.75^\circ}{0.75^\circ} < \frac{\sin 1^\circ}{1^\circ} < \frac{\sin 1.5^\circ}{1.5^\circ}$$

の関係から間の $\sin 1^\circ$ を求めるなどを繰り返し行っていった．

さらに，詳細な角度に対応するため，プトレマイオスは，sixtieth とよぶ補正値も出している．これは，

$$\text{sixtieth}\ \theta^\circ = \frac{\mathrm{crd}\ (\theta+1)^\circ - \mathrm{crd}\ \theta^\circ}{60} \tag{10}$$

とした値である．

数式処理ソフトウェア Mathematica を用いて，同じ表を作成すると，表 3.1 のようになる．

表 3.1: Mathematica にて再現したアルマゲストの三角関数表（部分）.
Fig. 3.1: Ptolemy's table (partially), calculated using Mathematica.

degree	Chord	Sixties	degree	Chord	Sixties	degree	Chord	Sixties
0°30	0 ; 31, 25	0 ; 1, 2, 50	30.	31 ; 3, 30	0 ; 1, 0, 37	40.	41 ; 2, 33	0 ; 0, 58, 57
1.	1 ; 2, 50	0 ; 1, 2, 50	30°30	31 ; 33, 49	0 ; 1, 0, 33	40°30	41 ; 32, 3	0 ; 0, 58, 51
1°30	1 ; 34, 15	0 ; 1, 2, 49	31.	32 ; 4, 7	0 ; 1, 0, 28	41.	42 ; 1, 30	0 ; 0, 58, 45
2.	2 ; 5, 39	0 ; 1, 2, 49	31°30	32 ; 34, 22	0 ; 1, 0, 24	41°30	42 ; 30, 54	0 ; 0, 58, 39
2°30	2 ; 37, 4	0 ; 1, 2, 49	32.	33 ; 4, 35	0 ; 1, 0, 19	42.	43 ; 0, 15	0 ; 0, 58, 34
3.	3 ; 8, 28	0 ; 1, 2, 48	32°30	33 ; 34, 46	0 ; 1, 0, 15	42°30	43 ; 29, 33	0 ; 0, 58, 28
3°30	3 ; 39, 53	0 ; 1, 2, 48	33.	34 ; 4, 55	0 ; 1, 0, 10	43.	43 ; 58, 49	0 ; 0, 58, 22
4.	4 ; 11, 17	0 ; 1, 2, 47	33°30	34 ; 35, 1	0 ; 1, 0, 5	43°30	44 ; 28, 1	0 ; 0, 58, 15
4°30	4 ; 42, 40	0 ; 1, 2, 46	34.	35 ; 5, 5	0 ; 1, 0, 0	44.	44 ; 57, 10	0 ; 0, 58, 9
5.	5 ; 14, 4	0 ; 1, 2, 46	34°30	35 ; 35, 6	0 ; 0, 59, 55	44°30	45 ; 26, 16	0 ; 0, 58, 3
5°30	5 ; 45, 27	0 ; 1, 2, 45	35.	36 ; 5, 5	0 ; 0, 59, 50	45.	45 ; 55, 19	0 ; 0, 57, 57
6.	6 ; 16, 49	0 ; 1, 2, 44	35°30	36 ; 35, 1	0 ; 0, 59, 45	45°30	46 ; 24, 19	0 ; 0, 57, 50
6°30	6 ; 48, 11	0 ; 1, 2, 43	36.	37 ; 4, 55	0 ; 0, 59, 40	46.	46 ; 53, 16	0 ; 0, 57, 44
7.	7 ; 19, 33	0 ; 1, 2, 42	36°30	37 ; 34, 47	0 ; 0, 59, 35	46°30	47 ; 22, 9	0 ; 0, 57, 37
7°30	7 ; 50, 54	0 ; 1, 2, 41	37.	38 ; 4, 36	0 ; 0, 59, 30	47.	47 ; 50, 60	0 ; 0, 57, 31
8.	8 ; 22, 15	0 ; 1, 2, 40	37°30	38 ; 34, 22	0 ; 0, 59, 24	47°30	48 ; 19, 47	0 ; 0, 57, 24
8°30	8 ; 53, 35	0 ; 1, 2, 38	38.	39 ; 4, 5	0 ; 0, 59, 19	48.	48 ; 48, 30	0 ; 0, 57, 17
9.	9 ; 24, 54	0 ; 1, 2, 37	38°30	39 ; 33, 46	0 ; 0, 59, 14	48°30	49 ; 17, 11	0 ; 0, 57, 10
9°30	9 ; 56, 13	0 ; 1, 2, 36	39.	40 ; 3, 25	0 ; 0, 59, 8	49.	49 ; 45, 47	0 ; 0, 57, 4
10.	10 ; 27, 31	0 ; 1, 2, 34	39°30	40 ; 33, 0	0 ; 0, 59, 3	49°30	50 ; 14, 21	0 ; 0, 56, 57

3.2 インドの三角法

この節では，文献 [19, 27] を参考にした．主な登場人物や著作の表記は表 3.2 を参照されたい．

インドで三角法が登場する文献は，6 世紀には見られる．最古とする文献は，アールヤバタ (476-?) の著書『アールヤバティーヤ』(499 頃) とも，ヴァラーハミヒラ (Varāhamihira, 505-587) の著作『パンチャ・シッダーンティカー』で言及された『パイターマハー・シッダーンタ』とも言われ，断定できないが，どちらも「半弦（Jyārdha, Jyā)」を用いている．これが現代数学で使われる「正弦」(sine, dorjyā) である[10)]．

アールヤバタは『アールヤバティーヤ』にて，円周率を 3.1416 とした．そして，半径 $R = 3438$ 分[11)] とした正弦の 3°45′ ごと（225 分角ごと）の差分を表にして示している．手法はヒッパルコスの計算方法と同様 [19] であり，$R\sin 90° = R$, $R\sin 30° = R/2$, および余角の関係式

$$R\sin(90° - \theta) = \sqrt{R^2 - (R\sin\theta)^2} \tag{11}$$

と半角公式

$$R\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\left(\frac{R - R\sin(90° - \theta)}{2}\right)^2 + \left(\frac{R\sin\theta}{2}\right)^2} \tag{12}$$

を用いた（図 3.4）．このことは，ギリシャ数学のヒッパルコスの時代の成果がインドに伝わっていたことを示唆しているが，同時に，プトレマイオスの著作は伝わっていなかったことも示唆している．

10） よく知られる「正弦」の由来は，次のようである．サンスクリット語で「弦」を意味する「jya-ardha」が 8 世紀にアラビア語に翻訳されたとき，音訳でジーブ (jiba) となった．通常は母音を記載しないアラビア語では，jb となり，「湾、入り江、曲面」を意味する言葉ジャイブ (jayb) と混同されるようになった．12 世紀にラテン語に翻訳される際には，sinus（湾、湾曲、懐）へと誤訳された．この sinus が省略され，現在の記号 sin となった．

11） 360 度を分表示にして, 円周を求めると, $360\times60 = 21600$ min だが, これに相当する半径は, $21600/2/3.1416 = 3437.7\cdots \sim 3438$ となる．$R = 3438$ とすることは，インド数学で，標準となった [27].

表 3.2: インドでの三角法の発展．[19, 27] を参考に作成．大文字で始まる三角関数は半径を乗じた値（Sin θ は $3438\sin\theta$ など）．

Table 3.2: Development of trigonometry in India. Trigonometric functions that begin with a capital letter are obtained by multiplying them by the radius (e.g., Sin θ is $3438\sin\theta$). References : [19, 27]

名前と生没年	主な貢献・特徴	三角関数表
アールヤバタ 476–? (Āryabhata)	『アールヤバティーヤ (Āryabhatiya)』(499 頃)．ヒッパルコスと同様の方法で，余角の関係式と半角公式から 24 の角度の正弦差分表を作成．	Sin θ ($R = 3438$，24 の角度，3°45′ ごと) の正弦差分表，円周率 3.1416
ヴァラーハミヒラ 505–587 (Varāhamihira)	『パンチャ・シッダーンティカー (Pañcasiddhāntikā)』で言及された『パイターマハー・シッダーンタ (Paitāmahā-siddhānta)』が弦の半分の「半弦 (Jyā)」を用いた（現代の正弦）．	Sin θ ($R = 120$，24 の角度，3°45′ ごと)，円周率 $\sqrt{10}$
ブラフマグプタ 598–665 (Brahmagupta)	『ブラーフマスプタ・シッダーンタ (Brāhmasphuta-siddhānta)』(628)．正矢 (Utkramajyā) を定義．半角公式が簡単になる．	Sin θ ($R = 3270$，24 の角度，3°45′ ごと)
バースカラ 1 世 600?–680? (Bhāskara I)	『アールヤバティーヤ』の注釈書『マハブハスカーリヤ (Mahabhaskariya)』，正弦の有理数による近似公式	
バースカラ 2 世 1114–1185 (Bhāskara II)	「角度」を用いて正弦・正矢を再定義．余弦・余矢を導入．差の半分の正弦の公式で 3° ごとの正弦を計算し，加法定理から 1° ごとの正弦表を作成．	Sin θ (1° ごと)

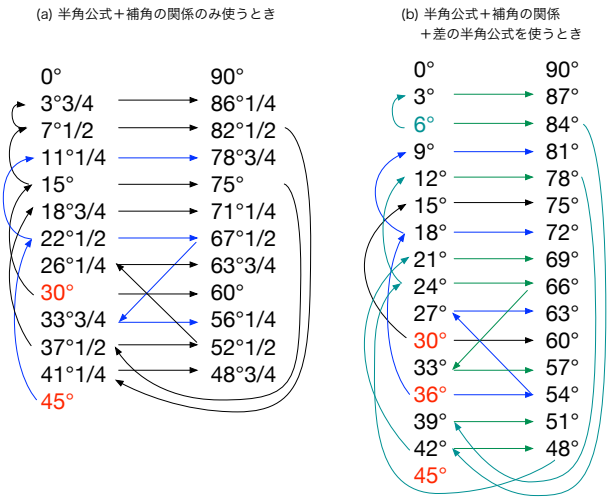


図 3.4: 60° と 90° の正弦と，補角の関係，半角の公式が既知であれば，24 の角度の値での数表が作成できる（図 3.2 と原理は同じ）．さらに差の半分の正弦を求める公式 (20) が既知であれば，30 の角度での数表が作成できる．右図は，27° と 15° の正弦から 6° の正弦を求めたときの例．

Figure 3.4: If the sine of 60° and 90°, the relationship between supplemental angles, and the formula for half-angles are known, a numerical table can be created for 24 angle values (the principle is the same as in Figure 3.2). Furthermore, if the formula for finding the sine of half the difference [eq.(20)] is known, a numerical table can be created for 30 angles. The figure on the right shows an example of finding the sine of 6° from the sine values of 27° and 15°.

ブラフマグプタ (598-665) は『ブラーフマスプタ・シッダーンタ』にて，「正矢（せいし）」(versed sine, Utkramajyā)

$$R\,\mathrm{vers}\,\theta = R - R\sin(90^\circ - \theta) \tag{13}$$

も定義した．正矢を用いると計算式が簡単になる．例えば，半角公式 (12) は

$$R\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{(R\sin\theta)^2 + (R\,\mathrm{vers}\,\theta)^2}{4}} \tag{14}$$

となる．

バースカラ 1 世 (600 頃-680 頃) は，正弦の近似公式として，度数表記 θ°（現代表記のラジアン x）に対して

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{4\theta(180-\theta)}{40500 - \theta(180-\theta)} \\ &= \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}\end{aligned} \tag{15}$$

という式を提示している．実際の値との相対誤差は，1.8%未満の式である．バースカラがどのようにこの近似式を導いたのかは不明であり，導出方法についての議論が Gupta[28] や Joseph[27] によってなされている．

12 世紀になると，バースカラ 2 世 (1114-1185) が「角度」を用いて正弦・正矢を定義しなおし，同時に「余弦」(cosine, kotijyā)，「余矢（よし）」(coversed sine, koty-utkramajyā) を新たに導入した．図 3.5 の記号

を用いると，

$$\text{正弦} \quad \mathrm{AB} = R\sin\theta, \tag{16}$$

$$\text{余弦} \quad \mathrm{AE} = \mathrm{BO} = R\cos\theta = R\sin(90^\circ - \theta), \tag{17}$$

$$\text{正矢} \quad \mathrm{BC} = R\ \mathrm{vers}\ \theta = R - R\cos\theta, \tag{18}$$

$$\text{余矢} \quad \mathrm{DE} = R\ \mathrm{covers}\ \theta = R - R\sin\theta \tag{19}$$

である．

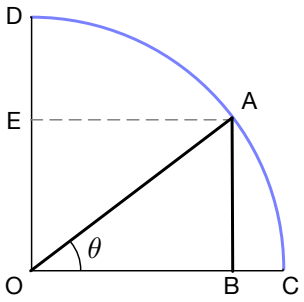


図 3.5: バースカラ 2 世による 4 つの三角関数の定義．
Figure 3.5: Definition of the four trigonometric functions by Bhaskara II.

余角の関係は余弦と正弦で $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$ のようになる．三平方の定理は $(R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2 = R^2$ となる．関係式も対称性よく書かれることになる．バースカラ 2 世は，角度差の半分の正弦を与える公式

$$R\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(R\sin\alpha - R\sin\beta)^2 + (R\cos\alpha - R\cos\beta)^2} \tag{20}$$

を示し，これを用いて，3° ごとの正弦が計算できることを述べている（図 3.4）．さらに加法定理を導いて 1° ごとの正弦表を作成している．

ただし，加法定理はすでにプトレマイオスが示していたし，バースカラの時代にはイスラームではより精密な三角関数表が作られていた．したがって，インドでは初期に正弦を定義したことが数学史上で重要であり，その後は独自の発展を続けていたことがわかる．

3.3 『崇禎暦書』の三要法と二簡法

『崇禎暦書』で紹介されている三角関数表の作成は，次のようである．基本的には，西洋で使われた方法である．

『崇禎暦書』の『大測』第 2 巻には，三要法と二簡法と呼ぶ公式がある．

要法一（原文）前後両弦．其能等于半径

（書き下し）前後の両弦，其の能（のう）は半径に等し．

（解釈）円において，ある弧の正弦と余弦（前後両弦）を二乗して足したものは，半径の二乗（単位円なら 1）に等しい．すなわち，

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{21}$$

要法二（原文）有各弧之前後両弦．求倍本弧之正弦

（書き下し）各弧の前後の両弦有り，本弧を倍する正弦を求む．

（解釈）ある角（弧）の正弦と余弦が分かっているときに，その 2 倍の角（倍本弧）の正弦は，

$$\sin 2\theta = (2\sin\theta)\cos\theta. \qquad \text{(倍角の公式)} \tag{22}$$

要法三（原文）各弧之全弦上方與其正半弦上，偕其矢上，両方并等

（書き下し）各弧の全弦の上方は，其の正半弦の上と，其の矢の上と偕（とも）に，両方并（あわ）せたるに等し．

（解釈）

$$(2\sin\theta)^2 = (\sin 2\theta)^2 + (1-\cos 2\theta)^2. \tag{23}$$

これは，半角の公式と等価である．

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \tag{24}$$

簡法一（原文）両正弦之較．與六十度左右距等弧之正弦等

（書き下し）両正弦の較（こう）は，六十度の左右，距（はか）ること等しき弧の正弦に等し．

（解釈）

$$\sin(60^\circ + A) - \sin(60^\circ - A) = \sin A \tag{25}$$

簡法二（原文）有両弧不等之各正弦．又有其各餘弦．而求両弦相加，相減弧之各正弦．其法有二．一相加．一相減．相加者．以前弧之正弦．乗後弧之餘弦．以後弧之正弦．乗前弧之餘弦．各得

数．并之為實．以半径為法．而一．得両弧相加為總弧之正弦．相減者．亦如前法互乗，得各數．相減，餘為實．以半径為法．而一．為両弧相減弧之正弦

（書き下し）不等なる両弧の各正弦有り．又，其の各余弦有り．而して両弦相加え，相減ずる弧の各正弦を求む．其の法二有り．一は相加え，一は相減ず．相加うるは，前弧の正弦を以て後弧の余弦に乗じ，後弧の正弦を以て前弧の余弦に乗ず．各数を得，之を并せて実と為す．半径を以て法と為し，而して一す．両弧相加ふを得，総弧の正弦と為す．相減ずるは，亦前法の如く互いに乗じ，各数を得．相減じ，余を実と為す．半径を以て法と為す．而して一す．両弧相減ずる弧の正弦と為す．

（解釈）これは加法定理を説明している．

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \quad (26)$$

したがって，倍角・半角の公式や加法定理を用いる方法が伝えられていたことがわかる．

4　建部賢弘による三角関数表

4.1　建部の三角関数表

多くの書物で，建部賢弘 (1664-1739) は，『算暦雑考』[12] にて，日本で初めての三角関数表を作成した，とされている．平山 [30] は，建部賢弘が『弧率（弧背密術）』（東北大学平山文庫 MA/6300070302132）にて半弦表と半背表を示していることを紹介している．しかし，『算暦雑考』も『弧率』も確かな制作年代は不明である．研究者間では，『算暦雑考』も『弧率』も，序文の内容から考えて，『綴術算経』（1722）と近い頃ではないか，とされている．本稿の付録 A にて，本章で登場する $\sin^{-1}\theta$ の展開式を用いて，この年代順について考察するが，結論からいうと，『算暦雑考』『綴術算経』『弧率』の順の可能性が高い．

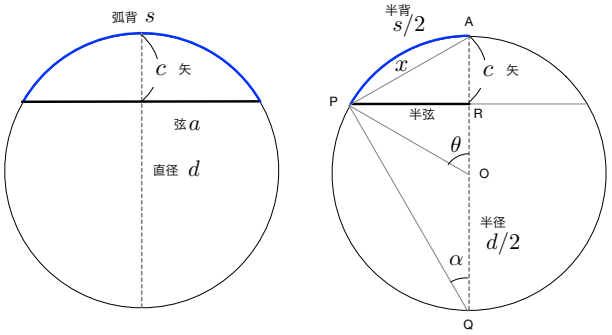


図 4.1: 建部が作成した三角関数表は，角度と半背，矢，半弦の 3 つの量の数表である．

Figure 4.1: The trigonometric function table created by Takebe is a numerical table of angle, half-arc, arrow, and half-chord.

図 4.1 左のように，直径 d の円を考え，上部から矢 c のところで切り取られる円弧（弧背という）s を取る．s の半分を半背 $s/2$ とし，その中心角を θ とする．建部が作成した三角関数表は，角度 θ と半背 $s/2$，矢 c，半弦（$a/2$ とする）の 3 つの量の数表である．建部は，直径を $d = 10$ 寸とし，0 度から 90 度の角 1 度ごとに対し，3 つの量を 11 桁まで計算した表を作成している．

建部の問題設定は，矢 c の長さを与えたときに，弧背 s はいくらになるか．あるいは，s を与えたときに c はいくらになるか，というものだった．現代の表記では，角度を θ [radian] とすれば，

$$\text{半背} \quad \frac{s}{2} = \frac{d}{2}\theta, \quad (27)$$

$$\text{矢} \quad c = r(1-\cos\theta) = d\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad (28)$$

$$\text{半弦} \quad \frac{a}{2} = \frac{d}{2}\sin\theta \quad (29)$$

となる．矢の式から $\theta = 2\sin^{-1}\sqrt{c/d}$ である[13]から，c/d が小さいものとして逆三角関数を展開することになる．

建部は，$(s/2)^2$ の展開式（$(\sin^{-1}\theta)^2$ の展開式）を与えている．付録 §A に，『算暦雑考』で記載した 3 つの展開式（[29] の解説にある式）と，『綴術算経』(1722) 弧数第十二に登場している 3 つの展開式（[32] の註にある式），および『弧率』に登場する 2

12）佐藤 [29] に翻刻と印影がある．水戸彰考館にあったものを撮影したものを元にしている．原著は昭和 20 年に戦災で消失．

13）あるいは，図 4.1 右のように，補助線を引き，三角形 PQA と三角形 RPA が相似であることから，$d : x = x : c$，すなわち $x^2 = cd$ となる．これより，$\sin\alpha = \frac{x}{d} = \sqrt{\frac{c}{d}}$ となる．扇形 OAP の弧（半背 $s/2$）の長さは，中心角が $\theta = 2\alpha$ であることから，同じ式が得られる．

つの展開式を記載し，それらの収束性を比較した報告を載せる．厳密に展開した場合と比較すると，最も良い式で，矢 c の 7 次の展開項の係数まで一致している．

逆三角関数の展開式の導出は，ヨーロッパでは，オイラー（Leonhard Euler）とヨハン・ベルヌーイ 1 世（Johann I Bernoulli）の 1737 年の書簡に登場する [31] ものであり，年代的に 15 年はやい．また，このような無限級数で表記される数があることについて，『綴術算経』にて建部は「数に盡（つく）るあり，不盡（つきず）あり」（数には尽きるものと尽きないものがある [32]）との感慨を記している．

ところで，このような高次の展開式で半背の値が得られたとしても，角度が大きなところでは必ず収束性が悪くなる（図 A.1）．おそらくその点に建部も気づいたのだろうか．『算暦雑考』で数表を作成する際には，これらの近似式を使わず，角度を倍にしたときの弦と矢の関係式「倍術」（倍角の公式），余角を利用した関係式「折術」，3 倍の角についてなりたつ「三双術」（3 倍角の公式），そして加法定理に相当する「併接術」を開発し，三角関数表（表 4.1）を作成した．

このような方針転換の動機はわからない．この種の公式を見出すきっかけが『崇禎暦書』に記載された計算法と考えれば説明できるが，そうだとすれば，『算暦雑考』の成立は，『崇禎暦書』が日本に輸入された 1727 年以降ということになる．しかし，この考えでは『綴術算経』執筆よりも後に『算暦雑考』執筆を想定することになってしまう．

表 4.1: 『算暦雑考』にある三角関数表（角度 θ と半背 $s/2$，矢 c，半弦（$a/2$ とする）の 3 つの量の数表）の始まり部分と最後の部分．横書きにして表示したもの．

Table 4.1: The beginning and the ending parts of the trigonometric function table (a numerical table of three quantities: angle θ, half-arc $s/2$, arrow c, and half-chord $(a/2)$) found in『算暦雑考 (Sanreki Zakkoh) 』. Displayed horizontally. 零 $= 0$，乙 $= 1$，参 $= 3$．割 $= 1/10$，分 $= 1/100$，厘 $= 1/10^3$，毫 $=$ 毛 $= 1/10^4$, and 絲 $=$ 糸 $= 1/10^5$.

限数	半背	矢	半弦
一限	八厘七二六六四 六二六〇〇	七絲六乙五二四 二乙八〇五	八厘七二六二〇 参二乙八七
二限	乙分七四五参二 九二五二〇	参毫〇四五八六 四九〇四五	乙分七四四九七 四八参五乙
三限	二分六乙七九九 参八七八〇	六毫八五二参二 六二二七二	二分六乙六七九 七八乙二二
四限	参分四九〇六五 八五〇四〇	乙厘二乙七九七 四八七乙	参分四八七八二 参六八七二
五限	四分参六参参二 参乙参〇〇	乙厘九〇二六五 〇九五四乙	四分参五七七八 七乙参七四
⋮	⋮	⋮	⋮
八十七限	七寸五九二乙八 二二四六二	四寸七参八参二 〇二乙八八	四寸九九参乙四 七六七参八
八十八限	七寸六七九四四 八七〇八八	四寸八二五五〇 二五六乙五	四寸九九六九五 四乙三五乙
八十九限	七寸七六六七乙 五乙七乙四	四寸九乙二七参 七九六七八	四寸九九九二参 四七五八
九十限	七寸八五参九八 乙六三四〇	五寸	五寸

建部の「矢と弧と弦」の関係に対する研究の目的は，天文暦学への応用であった．『算暦雑考』の後半には，赤道（地球の自転軸を南北にしたときの天球面上の赤道）から黄道（天球面上の太陽の通り道）への変換，およびその逆変換を述べた後，年間の任意の日の昼と夜の時間，年間の任意の日の太陽南中時の影の長さなどが述べられている．これらは，関孝和の授時暦研究を引き継ぐものである [33].

授時暦では会円術と呼ばれる弧長の近似公式が用いられていた．また，当時の和算書では「矢と弧と弦」の関係を用いた問題が散見される．まず，関連する中国書から見ていくことにする．

4.2 『九章算術』の弧田問題

中国の古算書の代表格のものに，後漢 (25-220) の頃に現存する形でまとめられた『九章算術』がある（大矢真一による訳が [34] にある）．この書の撰者は不明であるが，263 年に魏の劉徽(りゅうき)が註釈を施している（川原秀城による訳が [35] に，また，諸研究を含めた一連の解説が大阪産業大学のグループで報告 [36] されている）．『九章算術』は官吏の実務に必要な数学を解説したものである（表 4.2）．

表 4.2: 『九章算術』の内容．([34] をまとめた)
Table 4.2: The contents of 『九章算術 (Nine-Chapter Arithmetic)』(extracted from [34]).

	章題	問題数	主な内容
1	方田(ほうでん)	38	分数の計算，面積計算
2	粟米(ぞくべい)	46	穀物の換算，両替問題
3	衰分(しぶん)	20	配分比例，算術・幾何級数
4	少広(しょうこう)	24	面積から辺の長さを求める，平方根・立方根の計算
5	商功(しょうこう)	28	土木工事の体積計算，立体の体積
6	均輸(きんゆ)	28	税の公平な分配，旅の行程問題
7	盈不足(えいふそく)	20	鶴亀算
8	方程(ほうてい)	18	連立一次方程式（最大 5 元），負の数の計算
9	句股(こうこ)	24	三平方の定理（勾股弦）の応用，測量術

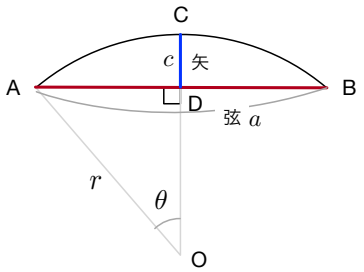


図 4.2: 『九章算術』の弧田問題（方田の第 35・36 問）．
Figure 4.2: Arc-field problem in 『九章算術』.

『九章算術』は，8 世紀頃には日本に伝わったとされる．大宝律令 (701) には役人を養成する大学寮に「算道」という学科があり，中国の数学書「算経十書」が指定されていた．しかし，その後の日本における『九章算術』の具体的な享受状況については明らかでない点が多く（現存資料・記録によって確認することができず），江戸時代に再び中国数学書がさかんに受容されることになる．『九章算術』は，問題を提示した後，「答えて曰く」「術曰く」の形で解説が続くが，これが吉田光由 (1598-1673) の『塵劫記』(1627) で採られ，以降の和算での基本スタイルになったと言われる．

『九章算術』では円周率を 3 としている（方田章の第 31/32 問）．円周率を使って円周を求める問題の次に，円の一部の面積を求める問題（第 35/36 問）がある．弧田（あるいは弧形田）問題と呼ばれるが，図 4.2 にあるように，弦 a と矢 c を与えて，弧 ACB と弦 ADB の囲む面積 S（以下，弧田の面積とよぶ）を求めさせるもので，答えは，

$$\text{弧田面積}\quad S=\frac{1}{2}(ac+c^2) \tag{30}$$

としている．また，この円の直径を d とすれば

$$d=\frac{(a/2)^2}{c}+c \tag{31}$$

が成り立つことを述べている．式 (31) は，三角形 OAD に三平方の定理を用いれば導かれるが，式 (30) は正しくない．形状が半円のとき，かつ円周率を 3 とするときのみ正しい．このことは，劉徽も指摘している [35, 37] が，正解を導出していない．

弧田面積式 (30) の妥当性を見るために，実際の面積と，近似式を求めてみる．角 AOD を θ として，$\sin^{-1}\theta$ の展開が必要になる．すなわち，円の半径を $r(=d/2)$ として，三角形 AOD に三平方の定理を用いると $r^2=(r-c)^2+(a/2)^2$ より，

$$r=(a^2+4c^2)/8c. \tag{32}$$

扇 OAC の面積 $\pi r^2\times(\theta/2\pi)=r^2\theta/2$ から，三角形 OAD の面積 $(r-c)a/4$ を引いて 2 倍することで，弧田の面積 S が

$$S=r^2\theta-(r-c)a/2 \tag{33}$$

となる．θ を求めるには，$\theta=\sin^{-1}(a/2r)$ が必要である．展開して 3 次までの近似をすると，

$$S=\frac{1}{2}ac+\frac{a^3c}{6(a^2+4c^2)} \tag{34}$$

となるが，半円に近い場合にはさらに高次の近似が必要となる．式 (30) と式 (34) を比較したものが図

4.3 である．式 (30) は意外にもよい近似になっている．

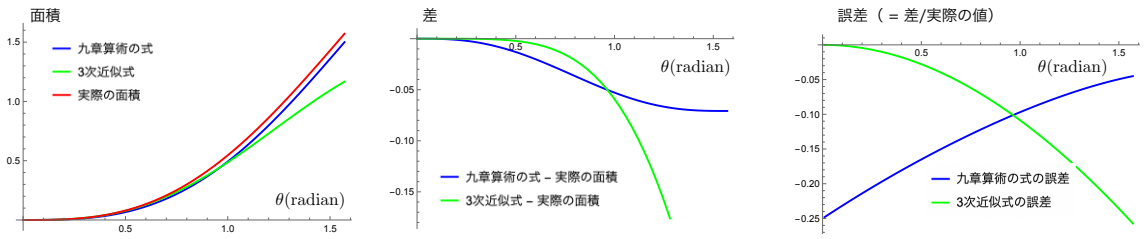


図 4.3: 『九章算術』の弧田面積式 (30) と 3 次近似式 (34) を実際の面積と比較したもの．半径 1 の円を想定した．横軸は角度 (radian) で $\pi/2$ まで．

Figure 4.3: Comparison of the arc-field area formula (30) and the linear approximation (34) with the actual area. The horizontal axis represents angle (radians) up to $\pi/2$.

『塵劫記』(1627, 1641 他) に弧田問題はない．村松茂清『算俎』(1663) には，第 3 巻に径弧矢弦の章があり，円闕図（弧田の図）が示され，16 問が掲載されている [38]．直径が 1 尺，矢が 1 寸，半弦が 3 寸という限定された設定のみの問題で，直径と矢と弧の長さを与えたときの円闕の面積を求めさせたり，直径と弦を与えたときの矢の長さを求めさせたりするようなものである．3：4：5 の直角三角形の存在と，扇の面積 S と弧の長さ L が直径 d を用いて $S = Ld/4$ となることを知っていれば解ける問題である．

関孝和や建部賢弘の研究動機が天文暦学研究にあったことを §4.4 にて述べるが，それ以外にも，当時の和算にて，このような弧田問題の流行があり，それらの一般化を試みたことも背景にあると考えられる．

中国では，弧の長さに対する近似式も見出された．それを次に見る．

4.3 『夢溪筆談』の会円術

北宋時代，沈括(1031-1095) は，さまざまな分野に及ぶ随筆集『夢溪筆談』(1088) にて，数学に関するものも記載している．第 18 巻（[39] に所収）には，隙積術という積分（区分求積法）と，「会円術」という円の弧長を近似計算する式が提示されている．設定を『九章算術』の図 4.2 と同じ文字で表すことにして，円の直径を d，矢 CD の長さを c，弦 AB の長さを a とすると，弧 ACB の長さ s は

$$\text{会円術} \quad s = \frac{2c^2}{d} + a \tag{35}$$

となる，というものである．証明はないが，その後長く使われた近似式だという．

この式の有効性を見るために，実際の長さと，逆三角関数を用いた近似式とを比較してみる．半径 r は，b, c を用いて式 (32) で表されるので，弧の長さ s は，

$$s = 2r\theta = 2r\,\sin^{-1}\frac{a/2}{r} \tag{36}$$

これを $r \gg a$ として近似すると

$$\begin{aligned} s &= 2r\theta \simeq 2r\left(\frac{a}{2r} + \frac{1}{6}\left(\frac{a}{2r}\right)^3\right) \\ &= a + \frac{a^3}{24r^2} \simeq a + \frac{8c^2}{3a} \end{aligned} \tag{37}$$

となる．この第 2 項を d を用いて表しても式 (35) にはならない．しかし，図 4.4 のように，比較すると，式 (35) は，$\theta \sim \pi/2$ 付近では 3 次近似式よりも実際に近い値を与える式であることがわかる．

ところで，会円術に似た近似式が和算でも開発されていた．今村知商 (生没年不詳) の『竪亥録』(1639) にて，「径矢弦の術」として導出された

$$s^2 = 4cd + 2c^2 \tag{38}$$

である [40]．これは円周率を $\sqrt{10}$ として求められたものだが，意外によく合う．比較のために図 4.4 に入れた．

当然ながら，建部が導出した展開式から弧長 s を計算すると，格段に実際の長さに合う．比較のため，付録 A にて列挙した『綴術算経』の展開式から得られた弧長を，図 4.4 と同じスケールで描いたものを図 4.5 に用意した．

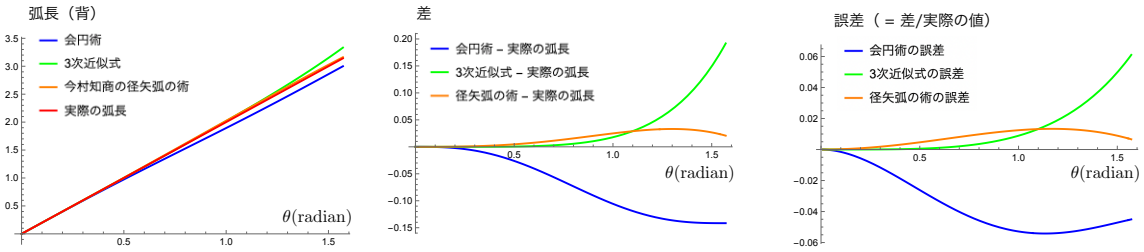


図 4.4: 『会円術』の弧長 (35) と 3 次近似式 (37) を実際の弧長と比較したもの．今村知商『竪亥録』径矢弦の術による弧長も示す．横軸は角度 (radian) で $\pi/2$ まで．

Figure 4.4: Comparison of the arc-length formula (35) and the linear approximation (37) with the actual length. The result of Tomoaki Imamura's formula is also shown. The horizontal axis represents angle (radians) up to $\pi/2$.

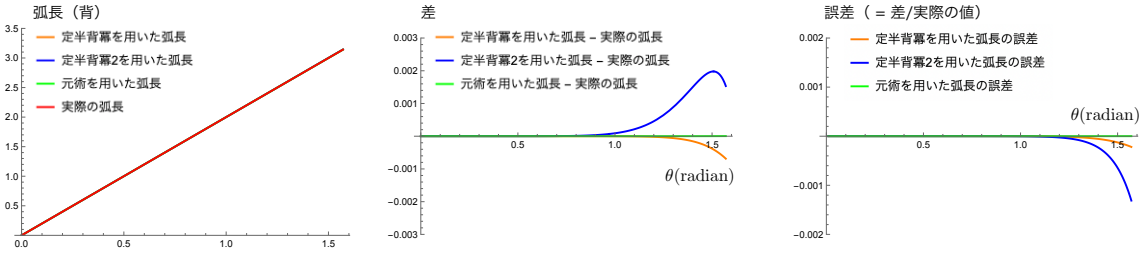


図 4.5: 弧長を建部の展開式から導出したもの．横軸は角度 (radian) で $\pi/2$ まで．

Figure 4.5: Comparison of the arc-length formula by Katahiro Takebe with the actual length. The horizontal axis represents angle (radians) up to $\pi/2$.

4.4 江戸初期の改暦

建部の三角関数表導出の動機となった，天文暦学の背景について紹介する．

中国では太陰太陽暦が使われ，それが周辺諸国にも共有された．暦を作る際には，精密な天体観測が必要となる．太陽の見かけの位置は背景の星に対して日々動いていくが（地球の公転が楕円運動であることから）一定速度ではない．月の場合も同様である．また，近日点の移動による日出・日入の時刻変化や，歳差や章差による恒星の位置の移動，1 年や 1 日の長さの長期的な変化など，観測技術が向上するにしたがって，考慮すべき数学的な要素も精密さを要求された．

中国での天体観測は，距星を基準にした（入宿度，去極度）の座標を使う方法と，極黄道座標系を使う方法の 2 つが使われた．後者は，黄経と赤緯を用いる座標系である（図 4.6）．そこで必要となるのが，黄経 EK と赤経 ET の対応である．球面三角法を知っている現代では簡単に求められる対応であるが，元の時代にできた授時暦（1281–1367）では会円術が使われた．授時暦は，イスラームでの天体観測技術も導入して，精密な観測結果にもとづく中国固有の最高峰とも呼ばれる暦である．1 年=365.2425 日として，定朔の計算法（毎月の始まりを決める計算）に 3 次補間を取り入れたものである．明の時代に使われた大統暦（1368–1644）は，授時暦の消長法（歳実消長法）を省いたものにすぎない．

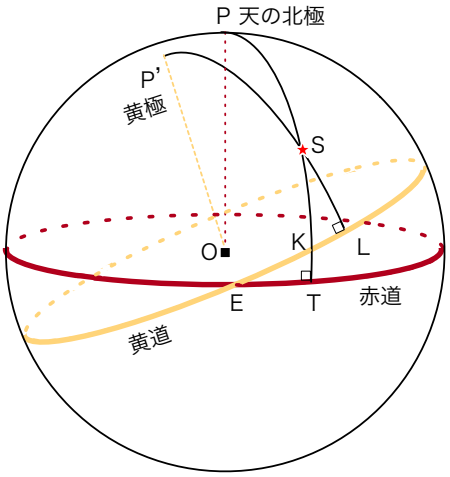


図 4.6: 星 S の位置を表すのに，赤道座標系は（ET, TS），黄道座標系は（EL, LS）を用いる．極黄道座標系は（EK, KS）を用いる．
Figure 4.6: To represent the position of star S, the equatorial coordinate system uses (ET, TS), the ecliptic coordinate system uses (EL, LS), and the polar ecliptic coordinate system uses (EK, KS).

日本では，唐で 9 世紀に作られた宣明暦が 800 年近く使われていた．宣明暦は 1 年を 365.2446 日，授時暦は 365.2425 日とした．宣明暦を 800 年使い続けた日本では，江戸初期には，この差が 2 日の違いとなってしまい，日食の予報がずれることになり，改暦が必要とされた．そこで，積極的に研究されたのが，授時暦と大統暦だった．このあたりの話は冲方丁の小説『天地明察』(2009)（とその映画化）でお馴染みである．

関は 1680 年頃の書とされる『天文大成三條図解（授時発明)』にて，「黄赤道の差を論す」「黄赤内外の差を論す」「白道と黄赤道の差を論す」と題された章立てで，授時暦に使われた数学を解読している [33]．これは，中国で 1652 年に黄鼎(こうてい)が授時暦の数理をまとめた全 80 巻の『天文大成管窺輯要(かんきしゅうよう)』の中にあるものを，一行ずつ解読したものである．（のちの貞享 3 年 (1686）に，『管窺輯要』のうち 15 条について，関が訓点を加えた写本『関訂書』が残されている [41])．

こうした授時暦の研究の成果が，渋川春海（安井算哲）が編纂した日本独自の暦である貞享暦として 1685 年から使われることになる．数学の視点から授時暦の解明に取り組んだ関にとって，おそらく円周率の詳しい計算の必要性と，会円術の近似の悪さが問題視されたに違いない．そして，その研究が，建部賢弘による「$\sin^{-1} x$ の展開式の構築」と「三角関数表の作成」に向かわせた．実際，建部の『算暦雑考』に後半にある「黄道を以って赤道を求める本術」の章の内容は，関の『天文大成三條図解（授時発明)』中の「黄赤道の差を論す」と実質的に同一である．建部の導出した弧長の近似式（本稿付録 A）を適用すると，会円術よりも誤差の少なくなることは，図 4.5 に示した通りである．

5　数学文化の伝播経路

伊東俊太郎 [19] や Joseph[42] に数学文化の系譜図があるが，本稿で議論したものと，天文学史的な内容を含めた図として，図 5.1 を作成した．江戸期に結ばれる A, B, C の線が江戸の科学文化を前期・中期・後期を分けることになる．すなわち，（A による）西洋科学の要素をまったく含まない前期，（B による）中国経由で伝えられた西洋科学を吸収した中期，（C による）蘭学書による西洋からの直接的な知識導入の後期，の 3 つである．

建部の挑んだ「半背・矢・半弦」の表は，江戸期に結ばれる A の線による文化経路である．中国で発展した数学が授時暦の造暦に結びつき，それらが関や渋川春海によって研究された，という歴史があった．中根の紹介した「八線表」は，B の線による文化経路である．中国から伝えられた西洋科学であるが，三角法の伝播史を考えると，それはヨーロッパ・イスラーム・インドを経由していた経路であることがわかる．イスラームはローマとインドから，インドはギリシャからの文化を引き継いでいたはずである．建部と中根のいた 1700 年前後，両者は日本で邂逅した．

授時暦研究をもとに，貞享(じょうきょう)暦が採用されるに至ったが，中国（清）では，西洋天文学を取り入れた時憲暦が 1645 年には始まっていた．日本では，1755 年に宝暦(ほうりゃく)暦，1798 年に寛政暦，1844 年に天保暦と改暦を行う．いずれも西洋天文学を取り入れる方向で行われ（宝暦暦は貞享暦を少しだけ手直ししたものにすぎなかった)，建部の三角関数表は，残念ながら日本の次の改暦に活かされることはなかった．

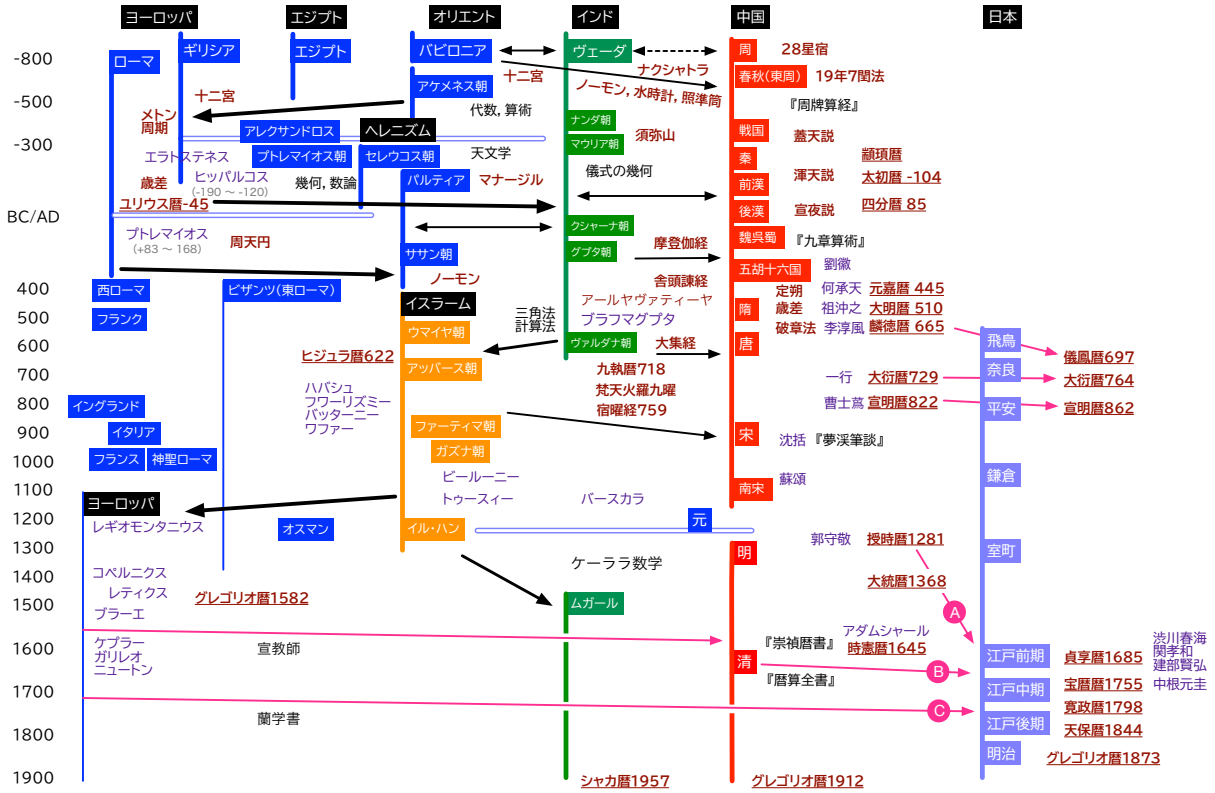


図 5.1: 数学文化の伝播経路．江戸期に結ばれる A, B, C の線が江戸の科学文化を前期・中期・後期を分けることになる．
Fig. 5.1: The transmission routes of mathematical culture. The lines A, B, and C connected during the Edo period divide the period into early, middle, and late.

謝辞　本内容を近畿和算セミナーおよび天文文化研究会にて発表した際，コメントをくださった方々に感謝します．本研究は，科研費 挑戦的研究（開拓）24K21170 『天文文化学の新展開：数理的手法の導入で文化史と科学論から自然観を捉える研究の加速』 のサポートを受けました．定期的な議論の場をいただいていることに感謝します．

参考文献

[1] 楠葉隆徳，林隆夫，矢野道雄著『インド数学研究』（恒星社厚生閣，1997）

[2] 小曽根淳「紅毛流として伝来した測量術について (I)」数理解析研究所講究録 1787 (2012), 127-137

[3] 小曽根淳「紅毛流として伝来した測量術について (II): 三角関数表の伝来と二つの経路」数理解析研究所講究録別冊 50 (2014), 109-123

[4] 小曽根淳「17 世紀に日中へ渡来した三角関数表について」数学史研究 221 (2015) 21-41

[5] 平岡隆二「徳川吉宗の数理科学書収集と長崎聖堂」（佐藤賢一・梅田千尋・平岡隆二　編『幕府天文方の研究』思文閣出版，2026 所収）

[6] 日本数学史学会編『数学史事典』（丸善出版，2020）

[7] 佐藤健一，大竹茂雄，小寺裕，牧野正博『和算史年表　増補版』（東洋書店，2006）

[8] 小倉金之助『日本の数学』（岩波新書 61，岩波書店，1940）

[9] E. Robson, J. Stedall 編，齊藤憲・三浦伸夫・三宅克哉監訳『Oxford 数学史』（共立出版，2014）

[10] 小林龍彦「紅葉山文庫に収蔵される梅文鼎の著作について」科学史研究 41 (2002) p26.

[11] 竹迫 忍「宣教師による中国星座の同定方法の検証」数学史研究 III 期 3 (2023) 93.

[12] 小林龍彦「『暦算全書』の三角法と『崇禎暦書』の割円八線之表の伝来について」科学史研究 II, 29 (1990) p83.

[13] 小林龍彦「享保 12 年伝来の『割円八線之表』

をめぐって」数学史研究 129 (1991) p1.
[14] 李迪 (編著)，大竹茂雄，陸 人瑞 (共訳)『中国の数学通史』（森北出版，2002）
[15] Nobuo Miura, The Applications of Trigonometry in Pitiscus : a Preliminary Essay, Historia Scientiarum 30 (1986), 63-78.
[16] 三浦伸夫『改訂版　数学の歴史』（放送大学，2019）.
[17] 三浦伸夫『近代数学の創造と発酵　中世・ルネサンス・17 世紀』（現代数学社，2023）.
[18] U.C. メルツバッハ，C.B. ボイヤー著，三浦伸夫，三宅克哉監督訳，久村典子訳『メルツバッハ& ボイヤー数学の歴史　1』（朝倉書店，2018）
[19] 伊東俊太郎編『数学の歴史 2 中世の数学』（共立出版，1987）
[20] Roshdi Rashed, ed. *Encyclopedia of the History of Arabic Science, Vol. 2* (Routledge, 1996).
[21] Glen van Brummelen, *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry* (Princeton Univ. Press, 2009).
[22] J. L. Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam* (Springer-Verlag, New York, 2016) 邦訳は，三浦伸夫監訳，坂田基如訳『中世イスラーム数学史　エピソードでたどるアラビア数学』（丸善出版，2023）
[23] 三村太郎『天文学の誕生　イスラーム文化がもたらしたもの』（講談社学術文庫，2026）
[24] プトレマイオス著，薮内清訳『アルマゲスト』（恒星社，1993）
[25] Claudius Ptolemy 著，Bruce M. Perry 訳『The Almagest: Introduction to the Mathematics of the Heavens』（Green Lion Press, 2014）
[26] 加藤賢一『世界最初の天文書『アルマゲスト』を読んでみよう』（恒星社厚生閣，2025）
[27] George G. Joseph, *Indian Mathematics* (World Scientific, 2016).
[28] R. C. Gupta, Indian J. of History of Science 2 (1967), 121-134.
[29] 佐藤健一『建部賢弘の「算暦雑考」』（研成社，1995）
[30] 平山諦『東西数学物語』（恒星社厚生閣，1973）
[31] 日本学士院編『明治前日本数学史　第二巻』（岩波書店，1956）
[32] 建部賢弘著，小川束訳註『綴術算経』（岩波書店，2026）
[33] 真貝寿明「関孝和『天文大成三條図解（授時発明)』解読」大阪工業大学紀要 71 (2026) [本号] 掲載
[34] 薮内清編『中国の科学』〈世界の名著，続 1 巻〉（中央公論社，1975）
[35] 薮内清編『中国天文学数学集』〈科学の名著，2 巻〉（朝日出版社，1980）
[36] 大阪産業大学の『九章算術』関係論文ページ `https://pal.las.osaka-sandai.ac.jp/~suanshu/j/publications_Jiuzhang.html` 参照.
[37] 大川俊隆「『九章算術』訳注稿 (4)」大阪産業大学論集 人文・社会科学編 5 (2009) 23–41
[38] 佐藤健一『算俎 現代訳と解説』(研成社, 1987)
[39] 沈括著, 梅原郁訳註『夢溪筆談 2』東洋文庫 362（平凡社，1979）
[40] 和算研究所編，佐藤健一編集代表『和算百科』（丸善，2017）
[41] 小林博行「『関訂書』に見られる明代後期の中国・回回暦法研究について」科学史研究 53（2014）85-98.
[42] George G. Joseph, *The Crest of the Peacock : Non-European Roots of Mathematics, Third edition* (Princeton Univ. Press, 2011) [初版は 1991 年，第 2 版は 1993 年] 邦訳が 1996 年に講談社ブルーバックスから出ている.『非ヨーロッパ起源の数学　もう一つの数学史』ジョージ・G・ジョーゼフ著，垣田高夫，大町比佐栄訳.

A　建部が示した $(\sin^{-1}\theta)^2$ の展開式の比較

建部が示した　$(\sin^{-1}\theta)^2$ の展開式を比較する．『算暦雑考』『綴術算経』『弧率』のそれぞれで，異なった表現の展開式を出している．これらの収束性を比較（どれだけ広い範囲で厳密解に一致するか）することで，制作年代を推測する．

現代の展開式

逆三角関数 $\sin^{-1}x$ の展開公式は，$|x|\ll 1$ のとき，次のようになる．

$$\sin^{-1}x \quad = \quad x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\cdots+\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)}x^{2k+1}+\cdots \tag{A.1}$$

以下では，直径 d，矢を c とする．半背の 2 乗 $\left(\frac{s}{2}\right)^2$ の展開式として建部が示した式を列挙する．（s^2/d^2 の展開式とした方が (c/d) の展開式となって簡略化するのだが．）

この展開式は，現代数学では，次のようになる．

$$f_0(c) \quad = \quad \left(\frac{d}{2}\right)^2\left(2\sin^{-1}\sqrt{\frac{c}{d}}\right)^2 \tag{A.2}$$

$$\quad = \quad dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{8}{45}\frac{c^3}{d}+\frac{4}{35}\frac{c^4}{d^2}+\frac{128}{1575}\frac{c^5}{d^3}+\frac{128}{2079}\frac{c^6}{d^4}+\frac{1024}{21021}\frac{c^7}{d^5}+\frac{256}{6435}\frac{c^8}{d^6}+\frac{32768}{984555}\frac{c^9}{d^7}+\frac{32768}{1154725}\frac{c^{10}}{d^8}$$
$$+\cdots \tag{A.3}$$

$$\quad = \quad dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{0.1777\cdots}{d}c^3+\frac{0.1142856\cdots}{d^2}c^4+\frac{0.08126984\cdots}{d^3}c^5+\cdots$$

『算暦雑考』

『算暦雑考』に記載された展開式（佐藤 [29]）は以下の 3 つである．比較のため，c で展開した式も添える．

- 「背恒術」（とりあえず簡略化した計算で値を求める方法，とのこと）

$$f_{S1}(c) \quad = \quad dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{c^3}{d-c\times\frac{9}{14}}\times 0.18 \tag{A.4}$$

$$\quad = \quad dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{0.18}{d}c^3+\frac{0.115714\cdots}{d^2}c^4+\frac{0.0743878\cdots}{d^3}c^5+\cdots$$

- より精密な結果を得る「立限之術」

$$f_{S2}(c) \quad = \quad dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{\frac{c^2}{3}\times c}{d-c\times 0.632}\times 0.534 \tag{A.5}$$

$$\quad = \quad dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{0.178\cdots}{d}c^3+\frac{0.112496\cdots}{d^2}c^4+\frac{0.0710975\cdots}{d^3}c^5+\cdots$$

- さらに「立限之術 2」

$$f_{S3}(c) \quad = \quad dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{\frac{c^2}{3}\times c}{d-c}\times\frac{8}{15}-\frac{\frac{c^2}{3}\times c\times\frac{8}{15}}{d-c}\times\frac{c}{d-c\times\frac{13}{25}}\times 0.3573 \tag{A.6}$$

$$\quad = \quad cd+\frac{1}{3}c^2+\frac{0.178\cdots}{d}c^3+\frac{0.114258\cdots}{d^2}c^4+\frac{0.0812274\cdots}{d^3}c^5+\cdots$$

『綴術算経』

『綴術算経』(1722) 弧数第十二に記載された展開式（小川 [32]）は以下の 3 つである．

- 「定半背冪」（c^7 の項の係数まで厳密解と一致）

$$f_{T1}(c) \quad = \quad dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{c^3}{d}+\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{9}{14}\frac{c^4}{d^2}+\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{9}{14}\frac{32}{45}\frac{c^5}{d^3}+\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{9}{14}\frac{32}{45}\frac{25}{33}\frac{c^6}{d^4}+\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{9}{14}\frac{32}{45}\frac{25}{33}\frac{72}{91}\frac{c^7}{d^5} \tag{A.7}$$

$$\quad = \quad dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{8}{45d}c^3+\frac{4}{35d^2}c^4+\frac{128}{1575d^3}c^5+\frac{128}{2079d^4}c^6+\frac{1024}{21021d^5}c^7+\cdots$$

- 「定半背冪 2」分母の 396 は，小川にある修正をしたもの．（c で展開しなおすと，c^6 の項の係数まで厳密解と一致する．しかし，その後の項は符号が変化することにより，収束性が悪い振る舞いをする．）

$$f_{T2}(c) \quad = \quad dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{c^3}{d-c}-\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{5}{14}\frac{c^4}{(d-c)^2}+\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{5}{14}\frac{12}{25}\frac{c^5}{(d-c)^3}-\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{5}{14}\frac{12}{25}\frac{223}{396}\frac{c^6}{(d-c)^4} \tag{A.8}$$

$$\quad = \quad dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{8}{45d}c^3+\frac{4}{35d^2}c^4+\frac{128}{1575d^3}c^5+\frac{128}{2079d^4}c^6+\frac{1976}{51975d^5}c^7-\frac{68}{10395d^6}c^8+\cdots$$

- 「元術」（c で展開しなおすと，c^7 の項の係数まで厳密解と一致）

$$\begin{aligned} f_{T3}(c) &= dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{1}{3}\frac{c^3}{d-\frac{9}{14}c}\frac{8}{15}+\frac{1}{3}\frac{c^3}{d-\frac{9}{14}c}\frac{c^2}{d^2-\frac{1696}{1419}cd-\frac{6743008}{26176293}c^2}\frac{8}{15}\frac{43}{980} \\ &= dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{8}{45d}c^3+\frac{4}{35d^2}c^4+\frac{128}{1575d^3}c^5+\frac{128}{2079d^4}c^6+\frac{1024}{21021d^5}c^7+\frac{2655317160448}{66665128605075d^6}c^8+\cdots \end{aligned} \tag{A.9}$$

『弧率』

『弧率』（東北大学平山文庫 MA/6300070302132）には，始まり部分と最後の部分に 2 種類の展開式が記載されている．

- はじめに出てくる式（c^7 の項の係数まで厳密解と一致）

$$\begin{aligned} f_{K1}(c) &= dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{8}{15}\frac{1}{3}\frac{c}{d}c^2+\frac{9}{14}\frac{8}{15}\frac{1}{3}\frac{c^2}{d^2}c^2+\frac{32}{45}\frac{9}{14}\frac{8}{15}\frac{1}{3}\frac{c^3}{d^3}c^2+\frac{25}{33}\frac{32}{45}\frac{9}{14}\frac{8}{15}\frac{1}{3}\frac{c^4}{d^4}c^2+\frac{72}{91}\frac{25}{33}\frac{32}{45}\frac{9}{14}\frac{8}{15}\frac{1}{3}\frac{c^5}{d^5}c^2+\cdots \\ &= dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{8}{45d}c^3+\frac{4}{35d^2}c^4+\frac{128}{1575d^3}c^5+\frac{128}{2079d^4}c^6+\frac{1024}{21021d^5}c^7+\cdots \end{aligned} \tag{A.10}$$

- さいごに出てくる式

$$s^2=\frac{11453384893c^3d^2+17243148700cd^4-45408726c^5-807998619c^4d-27148244837c^2d^3}{4838317774c^2d+4310787175d^3-845733484c^3-8223990414cd^2} \tag{A.11}$$

これを $(s/2)^2$ の形にして，展開しなおすと，

$$\begin{aligned} f_{K2}(c) &= dc+\frac{5747716819}{17243148700}c^2+\frac{13214439893990726541}{74331544272577922500d}c^3+\frac{3664526715369232443903393054 9}{3204274677481736125011439375 00d^2}c^4 \\ &\quad+\frac{5622592157930330071964260318277584604 3}{6906473092432764692216754793020007812 50d^3}c^5+\cdots \\ &= dc+(0.33333\cdots)c^2+\frac{0.177777\cdots}{d}c^3+\frac{0.114364\cdots}{d^2}c^4+\frac{0.0814105\cdots}{d^3}c^5+\cdots \end{aligned} \tag{A.12}$$

収束度合いの比較

以上の展開式の収束度合いを比較する図 A.1，図 A.2 を示す．いずれも式番号をつけた式を用いている（たとえば，『弧率』の式は，(A.11) を用いており，途中で項を落としていない）．

『算暦雑考』の式よりも，『綴術算経』の式の方が収束がよく，『弧率』の式の方がさらによい．これは，三者の手法上の工夫からも納得する結果である．『弧率』(A.11) 式は，Pade 近似よりも 170 年はやい導出である．この順で執筆された可能性が考えられる．

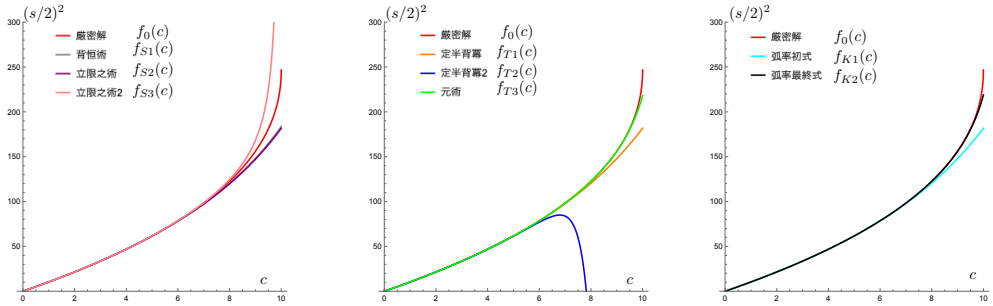


図 A.1: 建部の導いた半背の 2 乗の値を厳密な値と比較したもの．横軸は矢の長さ c で，$c=10$ は半径と一致する場合（$\pi/2$ の場合）である．

Fig. A.1: Comparison of Takebe's formula of half-arc length $(s/2)^2$ in terms of arrow c. $c=10$ indicates $\theta=\pi/2$.

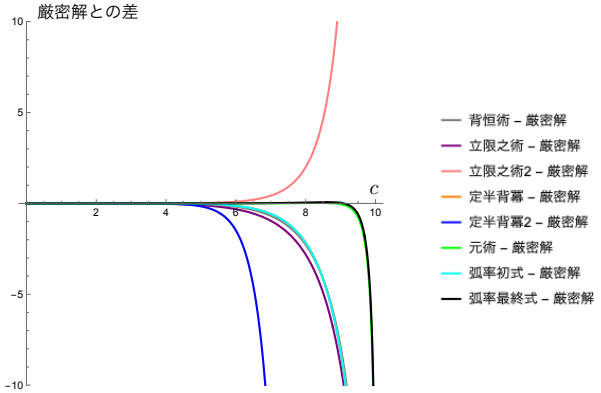


図 A.2: 建部の導いた半背の 2 乗の値を厳密な値との差を比較したもの．横軸は矢の長さ c で，$c=10$ は半径と一致する場合（$\pi/2$ の場合）である．

Fig. A.2: Differences of each formula from the exact length. $c=10$ indicates $\theta=\pi/2$.