第 333 回近畿和算セミナー（@大阪産業大学，2025 年 11 月 8 日）報告資料

継子立てとヨセフスの問題

真貝寿明（大阪工業大学情報科学部）[1]

概 要

『塵劫記』を通じて有名になった「継子立て」は，円形にならべた人を 10 人ごとに外し，最後に残る人を勝ちとする算数遊戯である．2 つのグループ（先妻の子と，後妻の子）を特別な順にならべると，1 つのグループだけが先にすべて取り除かれていくが，取り除かれていくグループの最後の一人の提案で，勝敗が逆転するというストーリー性を持っている．このような逆転劇がどのような設定で生じるか，という一般化された問題は，関孝和編『算脱之法』(1683 年) にて論じられ，再帰的方法で導かれている．

一方，継子立てとよく比較される西洋の Josephus（ヨセフス）の問題は，同じ設定でありながら，最後に残される人はどこの位置か，というシンプルな問いかけであり，逆転するような展開はない．オイラーによって，この問題が数学問題に格上げされたのは 1776 年のことで，その特異な数列として，算脱之法と，まったく同じ再帰的方法が述べられていたことを発見したので報告する．和算の方が 80 年以上早く，問題を扱って解決していたことになる． 2 つの問題の間には，管見の限り，歴史的交流の跡は見つからない．

1 継子立て

吉田光由 (1598-1673) の『塵劫記』で紹介されている「継子立て」については，和算の会の方には改めて説明する必要はないと思われる．問題設定だけをここに記す[2]．

> 先妻の子 15 人と，後妻の子 15 人を残して主人が亡くなった．誰か一人に財産を継がせることになったが，後妻は実子を選びたい．そこで，30 人をある順に円形に並べ，10 人ごとに取り除くことにした．はじめてみると，先妻の子（継子）だけが次々と取り除かれていく．15 人目の継子が「これは意図的であまりにひどい．今から自分から数え直して欲しい」と嘆願する．後妻は同意し，その子から数え始めると 15 人の実子がすべて取り除かれ，15 人目の継子が最後に残った．どのような順に並べたか（どこから数えたか）．[3]

問題設定としては，他のバージョンもある．[4]

> 最後に残された継子が，こんどは自分から逆回りに数え直して欲しい，と嘆願した．後妻は同意し，その子から数え始めると，継子が最後に残った．

これはユニークに解が定まるパズルである．白黒の碁石やオセロの駒を並べて多くの人が試してみたはずである．継子 1 人と実子 15 人を円形に並べて 10 人ごとに取り除くとき，数え始めた人が最後に残る，と考えれば，2 つのバージョンは，結局のところ同じである．

並べ方は，継子を黒丸●，実子を白丸○として，

○○●○○○●●●●●○○●●○○○○
●○●●●○●●○○●

となる．同色をまとめて数を順に表すと $\{2,1,3,5,2,2,4,1,1,3,1,2,2,1\}$ となる．この順は，古くから知られていた (§2 で詳述).

以前より，私は，子供の数が多すぎる設定だと思っていた．もう少し一般的な議論ができるかどうか，そして継子立ての話の起源について調べた結果，次のことがわかったので報告する．

- 12 世紀中頃の文献には，継子立てが記載されたものがある．しかし，数え方を途中から変更する設定は『塵劫記』からのもの [1] らしい．(§2)
- 関孝和編『算脱之法』という書で，継子立ての一般的な議論がなされている．(§3)
- 西洋ではヨセフス (Josephus) の問題として類似の問題設定があるが，途中からの設定変更はない [2, 3, 4]．ヨセフスの問題は，オイラーによって，最後に残るのは何番目かという数学問題に格上げされたが，その解法は『算脱之法』と同じ再帰的方法であった．(§4)

---

[1] `hisaaki.shinkai@oit.ac.jp`

[2] 林 [1] に,『塵劫記』各版での継子立の変遷が示されている．それによれば，吉田光由の初版 (寛永 4 年版，1627) にはなく，寛永 8 年以前に出版された刊行年不詳版が初出とのこと．

[3] 『塵劫記』では，何が問題とされるのか明確ではない．はじめから絵が添えられ，答えが描かれている．

[4] 林 [1] によれば,『塵劫記』の寛永 11 年版で，図中に逆向きを示す仕掛けを取り入れたが，本文では触れられていないという．

2　江戸時代以前の継子立て

「継子立て」という言葉は，古い時代のものから見られ，三上は「日本人が古来，数または数学関係の事項に深い興味のあったことを示す」事例のひとつである，と述べている [5].

吉田兼好『徒然草』(14 世紀前半)
吉田兼好による『徒然草』 第 137 段「花は盛りに月は隈なきをのみ見るものかは」には次のような記載がある[5].

> ままこだてといふものを双六の石にて作りて，立て並べたるほどは，取られん事いづれの石とも知らねども，数へあてて一つを取りぬれば，その外は遁れぬと見れど，又々数ふれば，彼是間抜き行くほどに，いづれも遁れざるに似たり．

いずれ人は死ぬ運命からは逃れられない，という意味での使われ方だが，すでにこの時期に継子立てという遊戯が知られていたことを示している．

藤原資隆『簾中抄』(12 世紀)
継子立ての話の創案者を藤原通憲 (1106-60，藤原信西としても知られる) とする説がある．村井中漸 (1707-97) の『脱子術』(1768) の序文にあるとされるが，定かではない [5, 1]．長田 [6] は，継子立てが記載された現存する最古の文献は藤原資隆 (? - 1185?) が編纂した『簾中抄』 としている．第 4 巻 15 丁裏より

> ままこだての頌
> 二一三五二〃四一〃三一二〃一
> 又様
> 一〃三二一三二二三二

との記載が見られる．はじめの数列は，1 章で示した，15 + 15 人の 10 人ごとに抜く継子立て問題の並べ方である． 2 つ目の数列は，10 + 10 人の 10 人ごとに抜く継子立て問題の並べ方である[6]．ただし，合計 20 人のときのこの数列は，はじめの 10 人ですべて継子が取り除かれてしまうというだけであり，逆転劇は生じない．

三善為康 (1049-1139) が『掌中歴』(1124 頃) と『懐中歴』(1127 頃，現存せず) を編纂し，鎌倉時代初期にはこの 2 書から『二中歴』(1210 年頃) が編纂された．『二中歴』には，この 2 つの数列が記載されている．

以上のほかに，継子立てに関する記載があるものとして，林 [1] は，次の書物を挙げている．

- 虎関師錬 (1278-1346) による『異制庭訓往来』
- 著者不詳の『新制遊覚往来』(『遊覚往来』『続庭訓往来』とも呼ばれる，1372 年以前の成立)
- 著者不詳の『十二段草子』(15 世紀末)
- 『鼠の草子絵巻』(室町時代)
- 秦宗巴 (1550-1607) による『徒然草寿命院抄』(1601)
- 林羅山 (1583-1657) による『徒然草野槌』(1621)

林 [1] は，秦宗巴の妻は角倉家の出身（宗巴没年に吉田光由は 10 歳)，林羅山は吉田光由が『算法統宗』を学んだ外叔父素庵らとも親交が深かった人物であることを指摘しながら，光由への影響は不明としている．

ここまでの文献のいずれもが，継子立ての設定として，逆転劇は生じないものとなっている．このことから，林 [1] は，逆転劇が生じる起死回生ドラマとなる展開は，吉田光由が気づいて著したもの，と推測している．

3　関孝和編『算脱之法』

3.1　正限数

継子立ての計算を一般化した関孝和編『算脱之法 俗に之を継子立と曰う』という数丁の書が 1683 年に出されている[7]．そこでは，正限数の表（表 1）が掲げられ，この数値の計算法から始められる.「脱数」とは何個目ごとに取り除いていくかというパラメータであり，「正限数」とは，自分から数え始めて取り除き操作をしたときに，自分が最後まで残るときの，他の人の人数である．正限数を N とすれば，全体人数 n（算脱之法では n を法とよぶ）は自分を加えて $n = N + 1$ である．脱数を m とすれば，継子立ては $m = 10$ とした場合であり，先妻の子の最後の一人が残された時の状況が $N = 15$ に相当する．

---

[5] 小学館『新編日本古典文学全集 44　方丈記／徒然草／正法眼蔵随聞記／歎異抄』(校注／訳　神田秀夫・永積安明・安良岡康作) 1995 年

[6] 国立公文書館のデジタルアーカイブにある写本（内閣文庫蔵）では，2 つ目の数列は，二〃からはじまっているが，写本の誤記と思われる．

[7] 算脱之法を探り当てたのは，建部賢明（建部賢弘の兄）であることが，建部賢弘『綴術算経』(1722) に記載されている [7, 9]．関孝和「編」とあっても，関の弟子の結果が含まれている [10].

表 1: 「算脱之法」に記載されている正限数の表（漢数字を算用数字に直し，列は左から並べた）.

脱数	2	3	4	5	6	7	8	9	10
正限数	1	3	1	2	1	22	1	90	1
同	3	5	4	5	2	49	4	145	15
同	7	8	8	11	7	92	9	207	21
同	15	30	11	14	13	234	19	233	70
同	31	69	15	36	73	319	29	474	226

『算脱』では，表 1 の数値の計算方法から説明がはじまる.『明治前日本数学史』[7] の解説,『関孝和全集』[8] の解題にしたがって理解を進めると，次のようになる.

1. 最初の法（原法）を 1，実を 0（空）とする.
2. 法には 1 を加え，実には脱数を加えてその数から法を引けるだけ引いた残りを実とせよ.
3. 実が 0 となるとき，法から 1 を引いたものが正限数である.
4. これを続けて次の実が 0 になるときも，法から 1 を引いたものが正限数である.

この理解を次のように書き記すことにする [7, 8].

1. （法とよぶ数）$n = 1, 2, 3, \cdots$ を 1 行目に，脱数 m を 2 行目の各列に記せ.
2. （実とよぶ数 +1）J_n とする数を 3 行目のはじめに，$J_1 = 1$ と記入せよ.
3. $n \geq 2$ の J_n は，$J_n = \bmod\,(m + J_{n-1}, n)$ である．この値がゼロのときは，$J_n = n$ とせよ.
4. $J_n = 1$ となるときの n より，$N = n - 1$ とすればそれが正限数である.

例えば，$m = 3$ のときは，次の表になり，正限数は，$N = 3, 5, 8, \cdots$ ということになる.

法	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
脱数	m	3	3	3	3	3	3	3	3	3
実 +1	J_n	1	2	2	1	4	1	4	7	1

3.2　正限数の導出

関の書では，上記以上の説明はない．J_n は，n 人いるときに，何番目の人が最後まで残るかを示している．$J_n = 1$ なら，数え始めの人が残る．なぜ上記の計算法で J_n が求められるのかの説明を試みよう．$m = 3$ とする.

- $n = 1$ のとき，$J_1 = 1$ は明らかである.
- $n = 2$ のとき，人の並びを円状に名前をつけて，$a, b, a, b, \cdots$ とすれば，$m = 3$ 人目を取り除くと，$a, b, \not{a}, b, \cdots$ となり，2 番目の b が残る．したがって，$J_2 = 2$ となる.
- $n = 3$ のとき，同様に，$a, b, c, a, b, c, \cdots$ とすれば，3 人目を取り除くと，$a, b, \not{c}, a, b, \not{c}, \cdots$ となり，残りは，a, b の順で二人．二人の場合，$J_2 = 2$ であるから，2 番目の b が残る．したがって，$J_3 = 2$ となる.
- $n = 4$ のとき，同様に，$a, b, c, d, a, b, c, d, \cdots$ とすれば，3 人目を取り除くと，$a, b, \not{c}, d, a, b, \not{c}, d \cdots$ となり，残りは d, a, b の順で三人．三人の場合，$J_3 = 2$ であるから，2 番目の a が残る．a は 1 番目の人なので，$J_4 = 1$ となる.

このようにして，残された列の何番目が最後まで残るか，と再帰的な形式で考えることができる.

付録 A では，別の方法（順列の置換操作）で J_n を求める方法を説明するが，そこでは，i 番目の人が引き抜かれる順 $E_i^{(n,m)}$ を導く必要がある.（$n = 30, m = 10$ の継子立てでは,

$$\begin{aligned} E_i^{(30,10)} &= \{21, 16, 6, 20, 22, 19, 11, 13, 9, 1, \\ &\quad 4, 25, 23, 15, 7, 18, 29, 27, 24, 2, \\ &\quad 17, 5, 12, 10, 28, 14, 8, 30, 26, 3\} \end{aligned}$$

となる）.

3.3　なぜ 10 脱か，なぜ $15 + 15$ 人か

算脱之法による正限数によって，逆転劇が生じる継子立ての場合が網羅される．例えば，$5 + 5$ 人であれば，表中の 5 が含まれる 3 脱あるい 5 脱で逆転できる．ちなみにこの時の並べ方は，3 脱なら,

$E_i^{(10,3)} = \{6, 4, 1, 10, 8, 2, 5, 7, 3, 9\}$ より

○●●○○●●○●○ $\{1, 2, 2, 2, 1, 1, 1\}$

5 脱なら

$E_i^{(10,5)} = \{7, 4, 10, 8, 1, 3, 9, 6, 5, 2\}$ より
○●○○●●○○●● $\{1, 1, 2, 2, 2, 2\}$
である．

人数が同じでなくても可能である．$4 + 5$ 人であれば，3 脱なら
$E_i^{(9,3)} = \{9, 7, 1, 4, 6, 2, 8, 5, 3\}$ より
○○●●○●○○● $\{2, 2, 1, 1, 2, 1\}$
$5 + 4$ 人であれば，4 脱として
$E_i^{(9,4)} = \{9, 8, 3, 1, 6, 5, 7, 2, 4\}$ より
○○●●○●○●● $\{2, 2, 1, 1, 1, 2\}$
などで可能である．

いろいろな組み合わせがあるなかで,（算脱之法以外の）日本の文献で見られるのは $m = 10$（10 脱）に限られる．植野 [2] は，これを日本の文化としているが，適度に数える手間があり，キリのよい数であることが理由であろう．半数ずつに分けて，最後の一人で逆転劇を起こすためには，$15 + 15$ 人の設定が最小人数となる．

逆転劇を引き起こすためのキリのよい設定は,「15+15 人の 10 脱」以外には「$3 + 3$ 人の 3 脱」「$4 + 4$ 人の 4 脱」「5+5 人の 5 脱」がある．少子化の現代ではこちらのほうが説得力があるかもしれない．ちなみに「$3 + 3$ 人の 3 脱」は
$E_i^{(6,3)} = \{6, 4, 1, 3, 5, 2\}$ より
○○●●○● $\{2, 2, 1, 1\}$
「$4 + 4$ 人の 4 脱」は
$E_i^{(8,4)} = \{5, 4, 6, 1, 3, 8, 7, 2\}$ より
○●○●●○○● $\{1, 1, 1, 2, 2, 1\}$
である．

3.4　その後の進展

算脱之法以降，継子立ての発展形とみられるものとして，次のものがある．

- 村松茂清 (1608-95) による『算俎（さんそ）』(1663).「十落」と記載されたものに，将棋の駒と南蛮カルタ（トランプ）を使った継子立てがある.（付録 B）
- 藤（藤田）定賢 (1734-1808) による『算脱解義』(1774)．脱数 30 までの表が掲載されている．
- 現代の中学校入試問題では，$m = 2$ に限る形で，継子立て問題が扱われている.（付録 C）

4　ヨセフスの問題

ヨセフスの問題

継子立てと似た数学遊戯は，西洋ではヨセフスの問題 [2, 3, 4] として知られている．しかし，設定は継子立てよりも単純で,「n 人を円形に並べて m 人ごとに取り除いていく」設定をヨセフスの問題と呼んでいる．

このヨセフスは，歴史家としても知られる Flavius Josephus である．本人を第三者の視点で記載した『ユダヤ戦記』第 3 巻 8 章 7[12] が原典とされている．紀元後 67 年，ローマ帝国に攻められたユダヤ人のヨッドファットの戦い（Siege of Yodfat）の場面である．将軍ヨセフスと仲間 40 名は洞窟に逃げ込み，自滅することになった．ユダヤ教では自害は禁じられているので，仲間同士で殺し合うことになる．しかし，生き延びたいヨセフスは腹案をもちながら，次のような提案をする．

> ... しかし、窮地に陥っても、彼（ヨセフス）の力は彼を見捨てなかった。神の加護を信頼し、彼は命を危険にさらし、こう言った。「死ぬ覚悟ができたのなら、さあ、くじに命の順番を決めさせよう。最初にくじを引いた者は、次にくじを引いた者に殺されるのだ。そうすれば、運命は全員に行き渡り、自らの手で命を絶つことはなくなるだろう。残りの者がいなくなった後、誰かが後悔して逃げおおせるのは不公平だ。」この提案は人々に信頼をもたらした。彼の助言は受け入れられ、彼は残りの者とくじを引いた。こうして選ばれた者は皆、自分の将軍がすぐに自分の運命を共にするであろうという確信のもと、隣の者に自分の首を差し出した。ヨセフスと共に死ぬという考えは、彼らにとって生きることよりも甘美だった。しかし、彼は（幸運と言うべきか、神の摂理と言うべきか？）、ただ一人残された。運命に縛られることも、最後まで同胞の血で手を汚すこともしたくなかった彼は、この男にも誓約を交わして生き残るよう説得した。（翻訳筆者）

ヨセフス自身が生き延びた，という話だが,「くじ (lot)」とだけ書かれていて，具体的なルールはない．これが後世になると，次のように語られることになる．

> ローマ時代の内乱期，ユダヤ人の反乱グループ 41 人は洞窟に閉じ込められ，敗北が明らかになったので自害することにした．当時の慣習により，全員が円形に並び，3 人ごとに処刑することになった．ヨセフスは，どこに立てば最後になるかを素早く計算した．

「41 人を円形に並べて 3 人ごとに取り除いていく．最後の一人になるのはどこの位置か」という問題である．このようなパズル問題をヨセフスと結びつけたプロセスは不明であるが，スミス [13] は，作者は 4 世紀のミラノ司教[8]ではないか，と述べている．

ヨセフスの問題は，以前は「トルコ人とキリスト教徒の問題」あるいは「ユダヤ人とキリスト教徒の問題」と呼ばれたと三上 [5] は記している．三浦 [14] は，ヨセフス問題を論じた数学者の例とバリエーションをさまざまに紹介している．表 2 の形式でまとめた[9]．表の最上行にあるエズラはユダヤ人学者，次のサファディはイスラムの著述家である．

表 2: ヨセフス問題の設定の例．三浦 [14] を参考に作成．n は総人数，m は脱数（何人おきに取り除くか），C/J/T/M はキリスト教徒，ユダヤ人，トルコ人，イスラム教徒を示す.「C15+J15」はキリスト教徒 15 人とユダヤ人 15 人がいるとき，キリスト教徒のみ残る問題，という意味．

		n	m
1150 頃	エズラ (Rabbi Abraham ben Ezra, 1546 年出版)	学生 15+ 怠け者 15	9
1363	サファディ(Salah al-Din al-Safadi)	M15+C15	9
15c	カランドリ (Filippo Calandri)	C15+J15	
1465 頃	フィレンツェ (Benedetto da Firenze)	C15+J15	9
1484 頃	シュケ (Nicolas Chuquet)	C15+J15	9
1485 頃	カランドリ	修道士 15+15	9
1500 頃	パチョーリ (Luca Pacioli)	C2+J30	9
1500 頃	パチョーリ	C2+J18	7
1500 頃	パチョーリ	C2+J30	7
1500 頃	パチョーリ	C15+J15	9
1539	カルダーノ (Gerolamo Cardano)	黒 + 白	
1556	タルターリャ (Niccolo Fontana Tartaglia)	C+T, 黒 + 白	
1559	ブテオ (Johannes Buteo)	C15+J15	10
1612	バシェ (Claude-Gasper Bachet)	C15+T15	
1624	エッテン (Hendrik van Etten)	C15+T15	9
1678	ヴィンゲイト (Edmund Wingate)	C15+T15	
1725	オザナム (Jacques Ozanam)	C15+T15	9

入手できた文献で，Claude-Gasper Bachet (1581-1638) による『Problemes plaisants et d'electables qui se font par les nombres. 2nd ed.』(1624) にあるもの（p174 PROBLEME XXIII）を紹介する．

> 15 人のキリスト教徒と 15 人のトルコ人が同じ船で航海していた．激しい嵐に遭遇したため，水先案内人は船に乗っていた人々の半分を海に投げ込み，残りの人々を救う必要があると言った．これは力ずくでしかできない．そこで，全員を順番に配置し，9 ずつ数えて 9 人目を海に投げ込むことで合意した．30 人のうち 15 人だけが残るようにする．キリスト教徒を一人も失うことなくトルコ人を全員投げ込むにはどのように並べるべきか.（Google 翻訳）

15 + 15 人の 9 脱であり，取り除かれる順は，

$$E_i^{(30,9)} = \{23, 20, 28, 24, 14, 4, 7, 12, 1, 19, 16, 10, 26, 27, 25, 5, 18, 2, 8, 29, 30, 13, 15, 11, 22, 6, 3, 21, 17, 9\}$$

となるから，キリスト教徒を○，トルコ人を●とすれば，

○○○○●●●●●○○●○○○●○●●○○●●●○●●○○● となり，並べ順は $\{4, 5, 2, 1, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 1\}$ となる[10]．

[8] Ambrosius of Milano (340?-397)．四大ラテン教父の一人と呼ばれる．

[9] 三浦 [14] が引用している David Singmaster 氏のウェブページを参考にした．

[10] この順には記憶法がある．平山 [15] では英語版が紹介されている．母音 a,e,i,o,u をそれぞれ 1,2,3,4,5 と対応させて，"From numbers' aid and art, never will fame depart"（数の助けと技術によって名誉は去らない）．三浦 [14] は，原典は Pacioli にあることを紹介している．

オイラーの問題設定

Leonhard Euler (1707-83) は,『Observationes circa novum et singulare progressionum genus[11]』(1776) にて,「トルコ人とキリスト教徒の問題」の設定を冒頭に挙げて，ここに登場する再帰的法則を論じている．彼は，取り除く人を $m = 2, 3, 4, 5$ 人目ごととする場合について，全体人数 $n = 1, \cdots, 16$ の場合に，取り除かれる順を具体的に列挙し，最後の一人が何番目の人かを考察した．現在の業界で使われている notation では，最後に残る人（survivor) を $J_m(n)$ とする（例えば [16]）．オイラーが扱ったのは，もう一人追加したときに，その人が最後に残る場合は何か，という設定である．最後の一人を含めて n 人とすれば,

$$J_m(n) = n$$

となる (m, n) は何か，という問題になる．現在では，この n を J_m の fixed point と呼んでいる．

オイラーは fixed point を求める前段階として，$J_m(n)$ が再帰的に求められることを帰納的に示した．現在，オイラーの公式と呼ばれるものである [16].

> $m \geq 2$ として，$J_m(n) = p$ とする．非負の整数 ℓ を用いて，$p + m \in \{\ell(n+1) + 1, \cdots, (\ell+1)(n+1)\}$ ならば,
>
> $$J_m(n+1) = p + m - \ell(n+1)$$

とくに，$m \leq n + 1$ であれば，次のように簡略化される．

$$J_m(n+1) = \begin{cases} p+m, & \text{if } p+m \leq n+1 \\ p+m-(n+1), & \text{if } p+m > n+1 \end{cases} \tag{1}$$

これは，算脱之法で述べられた方法に他ならない．和算で得られていた関係式は，オイラーよりも 83 年はやく発見されていたのである．

5 起源・関連は不明

継子立ての問題とヨセフスの問題には共通点もあるが，逆転劇がある点では継子立ての方が複雑である．逆転劇の部分は，吉田光由の作であったとしても，両者の間に共通の起源が存在するのだろうか．本稿で紹介してきたことをまとめると，次のようになる．

- ヨセフス問題に「ヨセフス」がリンクされたのは 4 世紀頃とされる．このときは，41 人の 3 脱問題だった．12 世紀に入ると，15+15 人の 9 脱問題として設定され，それが 14 世紀になると，宗教間の問題のようになった．
- 継子立てでは 12 世紀『簾中抄』に記載がみられ，この時から 15 人＋ 15 人の 10 脱問題である．
- 継子立ての一般化は，関らによって 1683 年になされた．ヨセフス問題の一般化はオイラーによって 1776 年になされた．

日本と西洋（西アジア）で，ほぼ同時期に「15+15 人」設定が記載されはじめたのは不思議である．中国での同種の問題設定が発見されていれば，シルクロード陸路を通じての文化交流の証左になるかと考えられるが（元がシルクロードを封鎖するのは 13 世紀後半)，残念ながらニーダム [19] によれば,「われわれはまだこの継子立ての中国数学書にある例を知らない」.（もっともニーダムが引用しているのは，スミス [13] とスミス・三上 [20] の 1920 年代までの文献である）.

徒然草にあるように，この種のパズルは囲碁や双六などの遊戯盤を用いたとも考えられる．囲碁の起源は不明とされるが，中国では囲碁盤が 3 世紀の出土品から見られ，4 世紀には朝鮮で，8 世紀には日本の正倉院に納められている．増川 [21] は，正倉院の収蔵品の双六盤の模様や形式が，中国系のものとインドネシア系のものと 2 種類見られることから，当時すでに，シルクロードの陸路と海路が日本に到達していたとしている．将棋（象棋・チェス）は 6 世紀にインド北西部で生まれた説があるが，中国・日本には 12 世紀に伝えられた．このような遊戯の伝播はユーラシア大陸で確実にあったことから，継子立て問題とヨセフス問題に同じ起源を求める気持ちは捨てがたい．

時代を下って，関らの一般化が欧州に伝えられた可能性があったかどうか，あるいはもっと広く，関の数学業績が西洋に影響を与えたかどうかも現時点では不明である．スミス・三上 (1914) [20] は，Petrus Hartsingius という日本人がオランダ Leyden 大学の学生簿 (1654 年) に数学を専攻する学生として登録されていることから，そのような可能性について触れている．最近では，この人物がペーター・ハルツィンク (1637-1680) であり[12]，オランダ東インド会社の平戸館にいたドイツ人カール・ハルツィンクと平戸の豪商の娘との間に生まれた日本人で，1641 年に鎖国政策により出国せざるをえなくなり，オランダへ渡った人物であることがわかっている．4 歳で日本を離れているので，関の数学を伝えるにはまだ若すぎたと言えるだろう．

[11] タイトル英訳は Observations on a New and Singular Type of Progression, 和訳は『新しく発見された特異な数列』．ここでの特異とは，簡単には予測できない，という意味.

[12] 三浦伸夫『数学の歴史』(放送大学テキスト，2011）に記載あり．

A　再帰的方法を使わない J_n の導出

n 人が円形に並べられていて，m 人ごとに取り除くとき，それぞれの人がどの順で取り除かれるかを考えることで，漸化式を用いずに J_n を求めることができる．$n=6$ として $\{a,b,c,d,e,f\}$ としよう．$m=3$ の場合を考えよう．

- 3 人目を取り除くと， $\{a,b,\cancel{c},d,e,f\}$ となる．c は 1 番目に取り除かれたので，$c=1$ とする．
- 残りの順 $\{d,e,f,a,b\}$ から 3 人目を取り除くと，$\{d,e,\cancel{f},a,b\}$ となる．$f=2$ とする．
- 残りの順 $\{a,b,d,e\}$ から 3 人目を取り除くと，$\{a,b,\cancel{d},e\}$ となる．$d=3$ とする．
- このような操作を続けると，

a	b	c	d	e	f
6	4	1	3	5	2

  と対応する．この 2 行目が $E_i^{(6,3)}$ である．
- 得られた順を入れ替える (inverse permutation) と，$\{1,2,3,4,5,6\}$ に対応して $\{c,f,d,b,e,a\}$ となるので，最後に残されるのは a．したがって，$J_6=1$ となる．

Mathematica プログラム例が [3] にある．

B　村松茂清『算俎』

村松茂清 (1608-95) は，『算俎（さんそ）』(1663) で，「十落」と記載して継子立ての答え図のみ（解説なし）を掲載している．15 人+15 人の 10 脱と，15+15+トランプ 2 枚の 10 脱の例である．また，将棋の駒と南蛮カルタ（トランプ）を使った「十落」の配列も示している [11].

将棋の駒 $20+20$ 個を円形にならべ，10 個ごとに取り除く場合は，

$$
\begin{aligned}
E_i^{(40,10)} = \{&11,14,35,8,33,25,17,28,39,1,\\
&5,37,34,12,27,9,15,22,20,2,\\
&38,6,24,18,40,36,13,10,31,3,\\
&26,16,7,30,32,29,21,23,19,4\}
\end{aligned}
$$

である．取り除く順を，歩 18，香 4，桂 4，銀 4，金 4，角 2，飛 2，玉 2 の順にするためには，

{ 歩, 歩, 角, 歩, 金, 桂, 歩, 銀, 玉, 歩,
歩, 飛, 金, 歩, 銀, 歩, 歩, 香, 香, 歩,
飛, 歩, 桂, 歩, 玉, 角, 歩, 歩, 金, 歩,
桂, 歩, 歩, 銀, 金, 銀, 香, 桂, 香, 歩 }

となる．歩 9，香 2，桂 2，銀 2，金 2，角，飛，玉の順で 2 回繰り返す場合の置き方は，

$$
\begin{aligned}
\{&\underline{\text{香}},\underline{\text{銀}},\text{銀},\underline{\text{歩}},\text{桂},\text{歩},\underline{\text{金}},\text{歩},\text{飛},\underline{\text{歩}},\\
&\underline{\text{歩}},\text{金},\text{銀},\underline{\text{桂}},\text{歩},\underline{\text{歩}},\underline{\text{銀}},\text{歩},\underline{\text{玉}},\underline{\text{歩}},\\
&\text{角},\underline{\text{歩}},\text{歩},\underline{\text{角}},\text{玉},\text{金},\underline{\text{桂}},\underline{\text{香}},\text{香},\underline{\text{歩}},\\
&\text{歩},\underline{\text{金}},\underline{\text{歩}},\text{香},\text{桂},\text{歩},\text{歩},\text{歩},\underline{\text{飛}},\underline{\text{歩}}\}
\end{aligned}
$$

とすればよい.（村松は 2 組に分けて表示していないが，補って表示した.）

トランプの場合について，村松は，$\{A,1,2,\cdots,10,11,12\}$ が 4 組ある 48 枚のもの[13]を考えている．

$$
\begin{aligned}
E_i^{(48,10)} = \{&42,5,20,35,17,23,30,28,10,1,46,14\\
&6,32,26,48,44,21,18,2,39,11,34,7,\\
&24,15,38,40,37,3,29,31,27,12,8,19,\\
&22,43,16,4,41,33,25,36,47,9,13,45\}
\end{aligned}
$$

であるから，A=虫，11=馬，12=腰と表記して，4 スートずつ 虫$^\clubsuit$, 虫$^\diamondsuit$, 虫$^\heartsuit$, 虫$^\spadesuit$, $2^\clubsuit, \cdots$ のような順で引き抜くためには

{ 馬$^\diamondsuit$, $2^\clubsuit$, $5^\spadesuit$, $9^\heartsuit$, $5^\clubsuit$, $6^\heartsuit$, $8^\diamondsuit$, $7^\spadesuit$, $3^\diamondsuit$, 虫$^\clubsuit$, 腰$^\diamondsuit$, $4^\diamondsuit$
$2^\diamondsuit$, $8^\spadesuit$, $7^\diamondsuit$, 腰$^\spadesuit$, 馬$^\spadesuit$, $6^\clubsuit$, $5^\diamondsuit$, 虫$^\diamondsuit$, $10^\heartsuit$, $3^\heartsuit$, $9^\diamondsuit$, $2^\heartsuit$,
$6^\spadesuit$, $4^\heartsuit$, $10^\diamondsuit$, $10^\spadesuit$, $10^\clubsuit$, 虫$^\heartsuit$, $8^\clubsuit$, $8^\heartsuit$, $7^\heartsuit$, $3^\spadesuit$, $2^\spadesuit$, $5^\heartsuit$,
$6^\diamondsuit$, 馬$^\heartsuit$, $4^\spadesuit$, 虫$^\spadesuit$, 馬$^\clubsuit$, $9^\clubsuit$, $7^\clubsuit$, $9^\spadesuit$, 腰$^\heartsuit$, $3^\clubsuit$, $4^\clubsuit$, 腰$^\clubsuit$}

とするとよい.（村松は 4 組に分けて表示していないが，補って表示した．スートは現代の $\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit$ で表示したが，南蛮カルタのスートは，棍棒・刀剣・聖杯・金貨である.）

C　中学入試で出題される継子立て

中学校入試の数学問題で,「継子立て」と称される一連の問題がある．例えば次のような問題がある．

> 円周上に整数を 1 から 100 まで並べる．1 から 1 つおきに（$1,3,5,\cdots$）と数字を取り除いていく．最後の 1 つに残る数は何か.

効率の良い回答例としては，次のものがある．

> 2^n 個残されているときはその最後の数が最後に残る．99 個のうちから 64 個残すためには，36 個の数を取り除く（71 まで取り除く）．残された 64 個の数を 73 から取り除いていくと，最後の数は 72 になる．

「2^n 個残されているときはその最後の数が最後に残る」ことが使えるのは，１つ飛ばしで取り除く問題に限られる．

---

[13] 15 世紀にポルトガルから伝えられた南蛮カルタは，4 スート ×12 枚だった．江戸期の後半に「うんすんカルタ」と呼ばれるものは 5 スート ×14 枚になる．現在のトランプが日本に入るのは明治以降である．

参考文献

[1] 林隆夫「『塵劫記』以前の継子立」数学史研究 173/174 合併号, 1-28, 2002.

[2] 植野義明「継子立てにおける数理と文化」東京工芸大学工学部紀要 23 (1), 83-92, 2000.

[3] S. スキエナ著，植野義明訳『Mathematica 組み合わせ論とグラフ理論』（アジソン　ウェスレイ・トッパン，1992）. 原著は，Steven Skiena, *Implementing Discrete Mathematics – Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*, Addison-Wesley, 1990.

[4] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming. Vol. I, Vol. III*, Addison-Wesley, 1968, 1973.

[5] 三上義夫『文化史上より見たる日本の数学』（岩波書店，1999）.

[6] 長田直樹「算博士三善為康について」数学史研究 228 (2017), 22-39.

[7] 日本学士院編（藤原松三郎）『明治前日本数学史 第 2 巻』（岩波書店，1956）.

[8] 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄 (編著)『関孝和全集』（大阪教育図書株式会社，1974）.

[9] 小川束「『綴術算経』の「探算脱術第七」について」数理解析研究所講究録 1257 (2002) 205-209.

[10] 長田直樹「元禄の中頃に成立した『算法大成』について」数理解析研究所講究録別冊 B89 (2022) 49-76.

[11] 日本学士院編（藤原松三郎）『明治前日本数学史 第 1 巻』（岩波書店，1956）.

[12] Josephus, *The Jewish War*. 筆者が入手できたのは，H. St. J. Thackeray が英訳した 1927 年に William Heinemann Ltd 社が刊行したもの．Book III の巻にあることは，英語版 wikipedia の Josephus problem にある．

[13] D. E. Smith, *History of Mathematics Vol. 2* (1925, Ginn And Company).

[14] 三浦伸夫『近代数学の創造と発酵　中世・ルネサンス・17 世紀』（現代数学社，2023）.

[15] 平山諦『東西数学物語』（恒星者厚生閣，1973）

[16] Y. Bello-Cruz, R. Quintero-Contreras, *Analytical Study and Efficient Evaluation of the Josephus Function*, arXiv:2303.15457

[17] L. Euler, Observationes circa novum et singulare progressionum genus. Euler Archive – All Works. 476, 1776.

[18] C. G. Bachet, Problemes plaisants et d'electables qui se font par les nombres. 2nd ed. Lyon: Pierre Rigaud & Associates, 1624.

[19] J. Needham & W. Ling, *Science and Civilisation in China*, (Cambridge Univ. Press, 1959). ニーダム著 芝原茂ほか訳『中国の科学と文明　第 4 巻 数学』（思索社，1991）

[20] D. E. Smith & Y. Mikami, *A History of Japanese Mathematics*, (Open Court Publ. Com., Chicago, 1914).

[21] 増川宏一『盤上遊戯の世界史』（平凡社，2010）.

発表スライド pdf，このプリントの pdf はこちら

202511 継子立てヨセフス問題 slide

202511 継子立てヨセフス問題 print