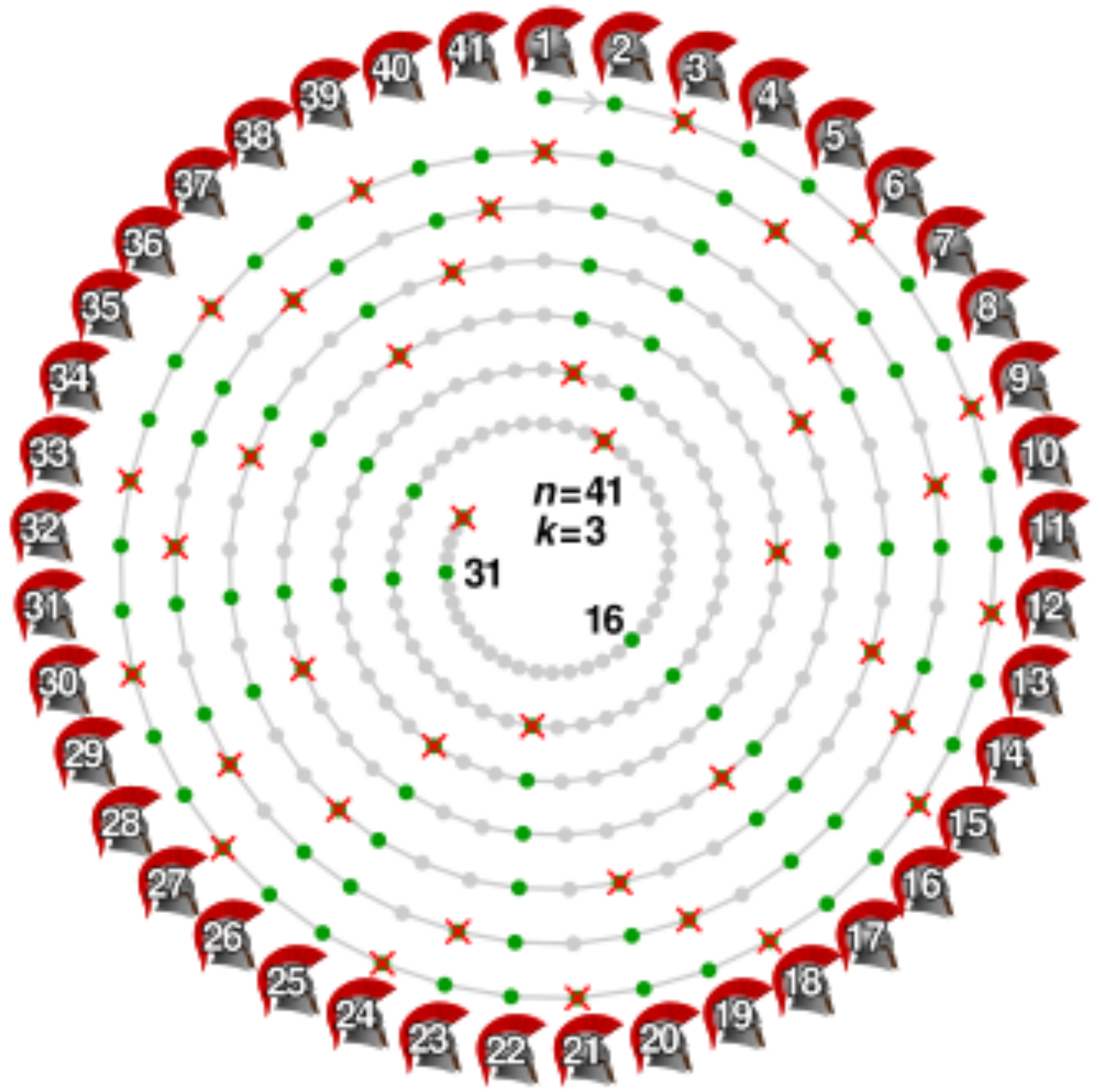
継子立てとヨセフスの問題



継子立て問題の歴史

関孝和編『算脱之法』

Josephus problemの歴史

Euler『新しく発見された特異な数列』

両者を結ぶものはあるか

202511 継子立てヨセフス問題 print

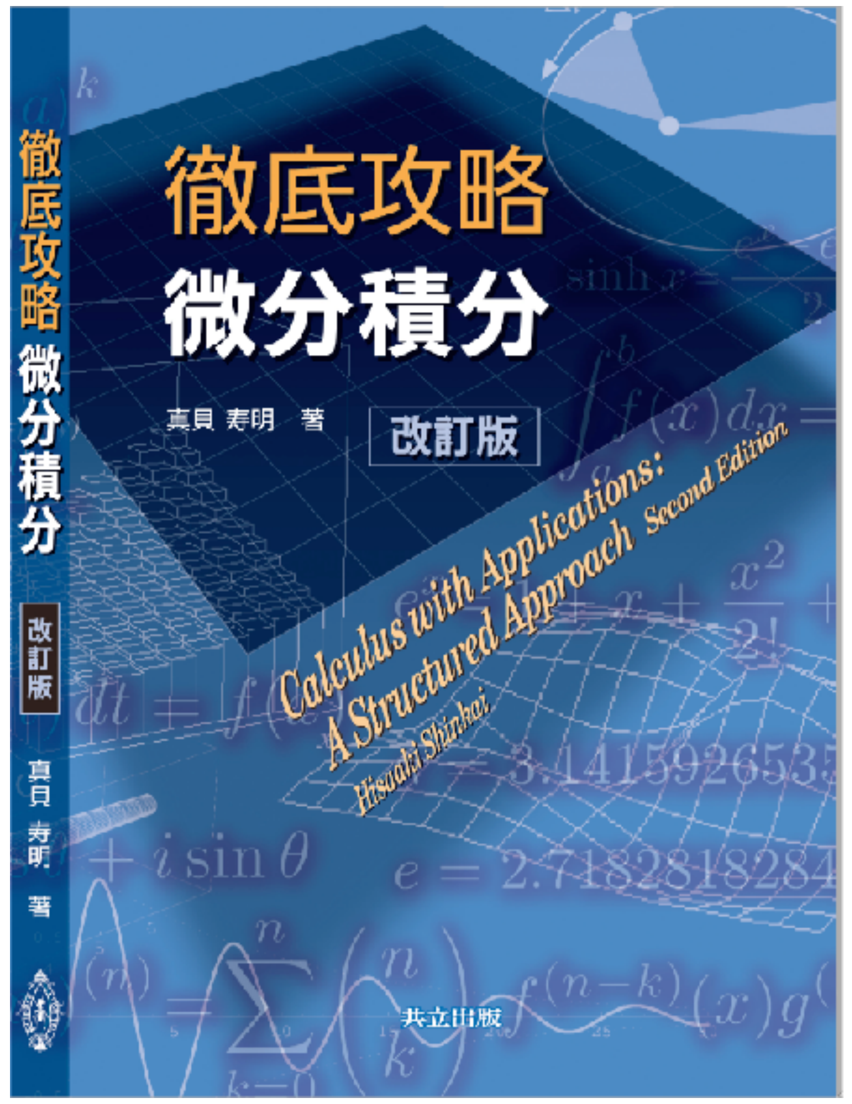
202511 継子立てヨセフス問題 slide

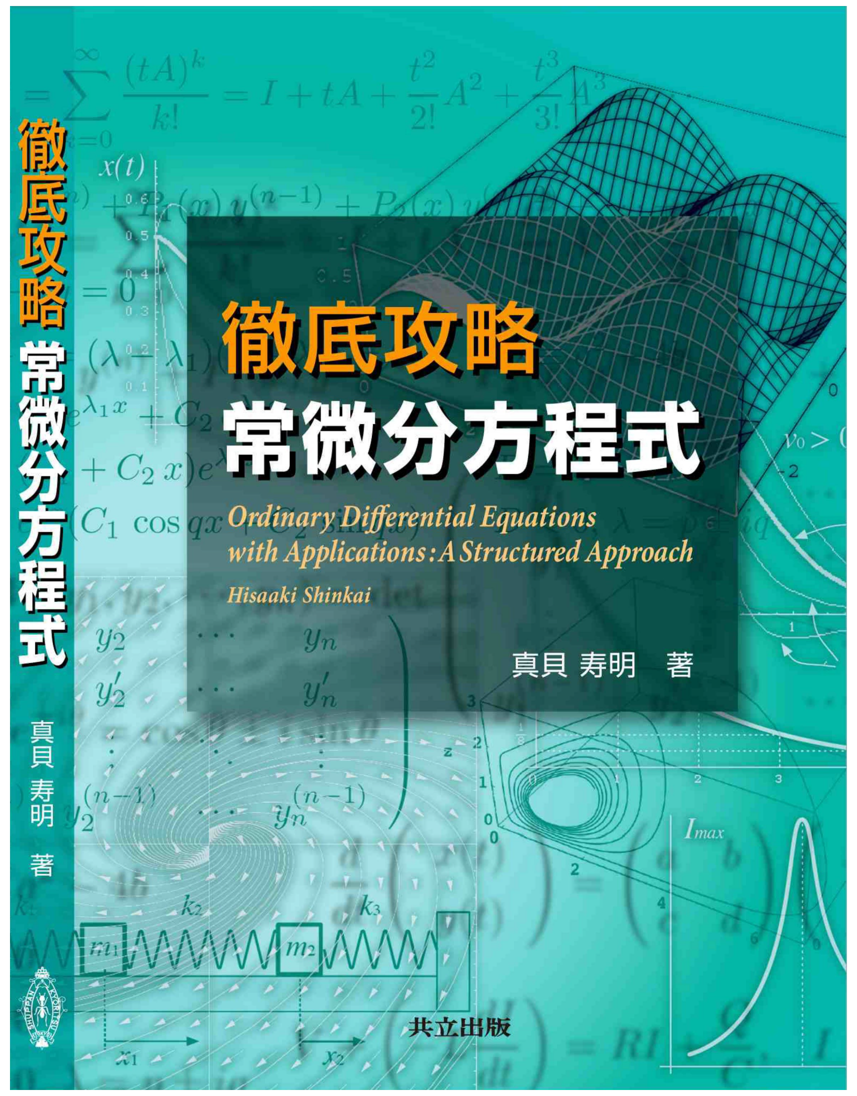
真貝寿明（大阪工業大学 情報科学部）
hisaaki.shinkai@oit.ac.jp
https://www.oit.ac.jp/labs/is/system/shinkai/

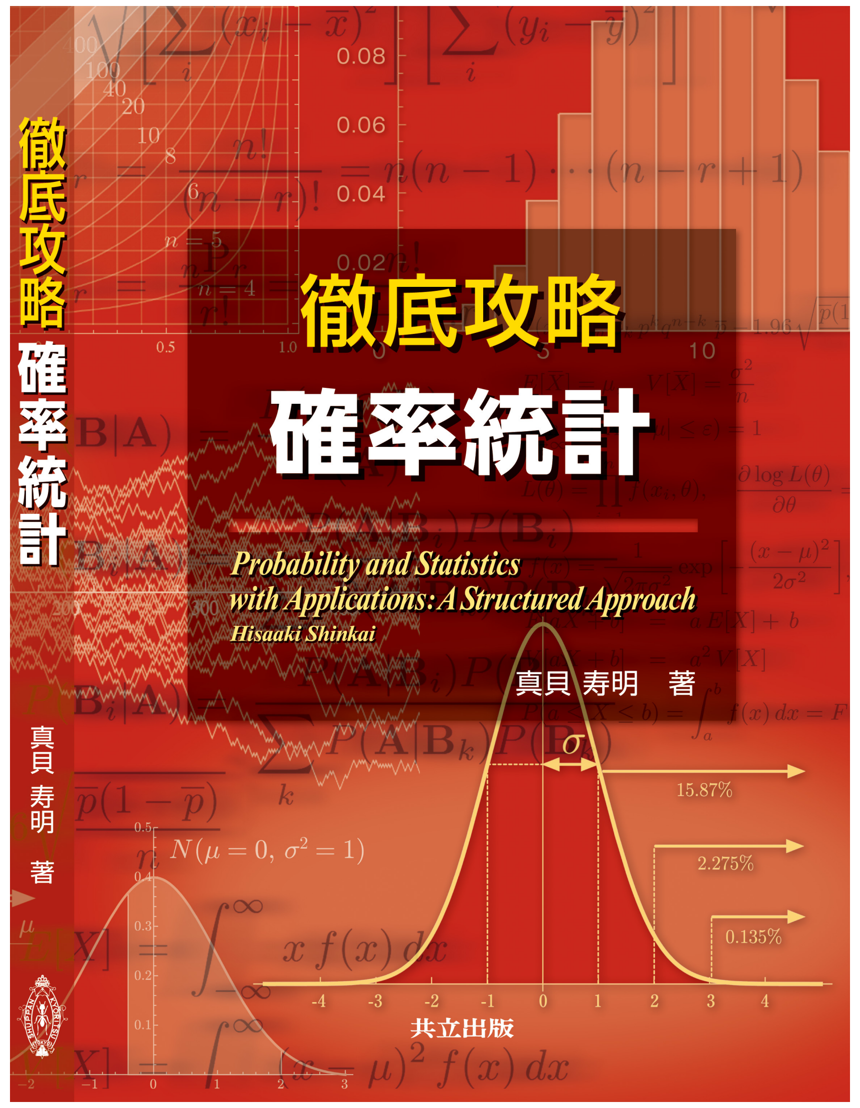
真貝寿明 Hisaaki Shinkai

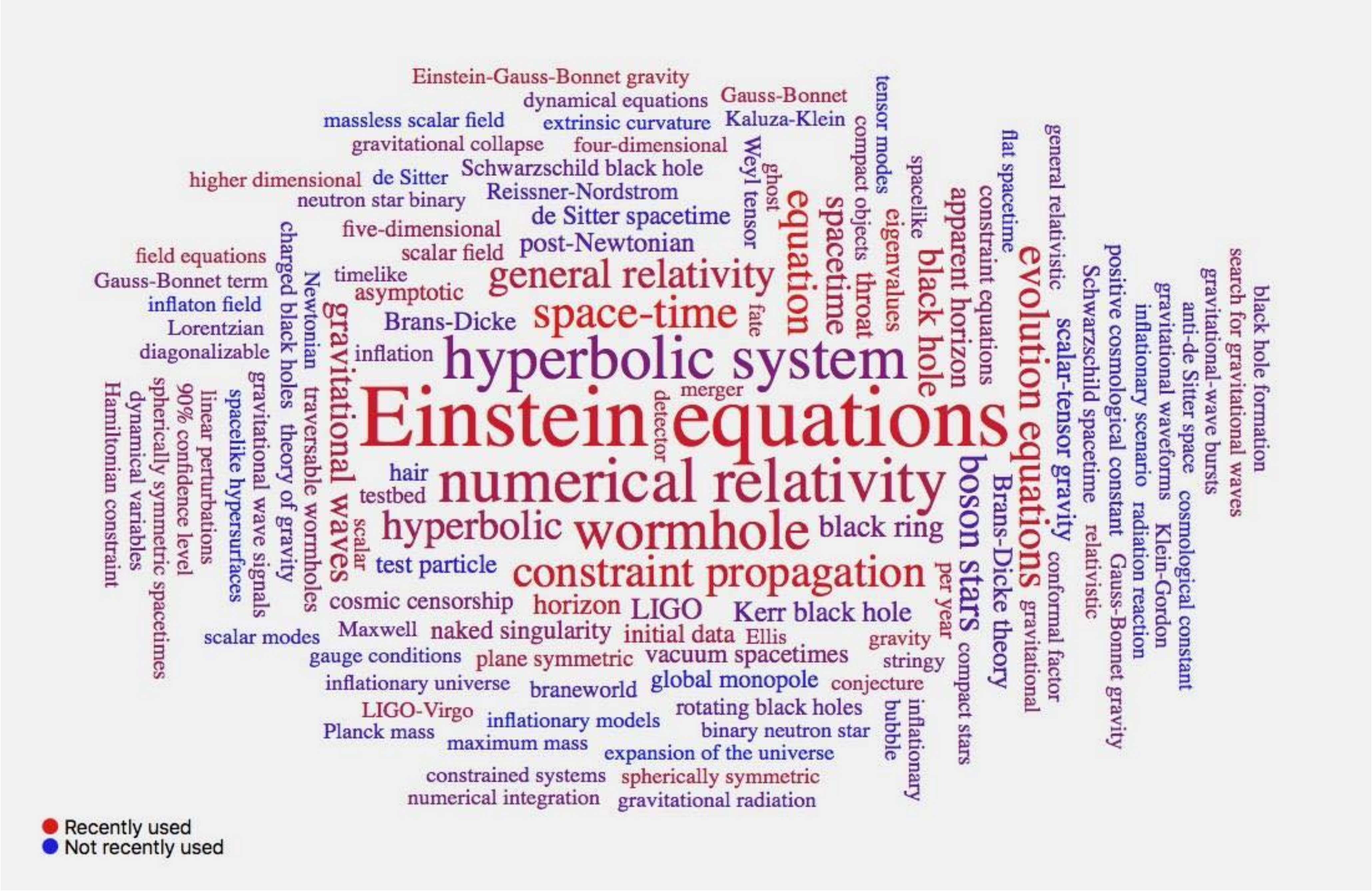
- ★ ふだんは大阪工業大情報科学部（枚方）
- ★ 専門は理論物理（相対性理論，ブラックホール・重力波）
- ★ 日本の重力波プロジェクトKAGRAの研究者代表 (2017-2021), Education-Public Outreach代表

https://www.oit.ac.jp/labs/is/system/shinkai/
https://www.oit.ac.jp/labs/is/system/shinkai/linkGW.html
https://www.oit.ac.jp/labs/is/system/shinkai/GWdata2019/index.html
https://ligo.org/science-summaries/









Word Cloudで, 論文の概要のワードを抽出したもの

真貝寿明 Hisaaki Shinkai

- ★ ふだんは大阪工業大情報科学部（枚方）
- ★ 専門は天文文化学（天文学史，文化交流史）
- ★ 天文文化学研究会の組織事務

https://www.oit.ac.jp/labs/is/system/shinkai/tenmonbunka/index.html

天文文化研究会ページ

参加申し込みフォーム

第一　まゝ子だての事

子三十人有内、十五人は先腹、残る十五人は当腹の子也。右のごとく立ならべて十にあたるをのけて、又二十にあたるをのけ、二十九人までのけて、残る一人にあとをゆづり可レ申と云時、まゝ母かくのごとく立たる也。さて、かぞへ候へば、先腹の子十四人までのき申候時、今一たびかぞへれば先腹の子みなのき申候ゆへに、一人残たるまゝ子のいふやうは、あまり片一双にのき申候間、いまよりはわれよりかぞへられ候へといへば、ぜひにをよばずして、一人残りたる先腹の子よりかぞへ候へば、当腹の子皆のき、先腹の子一人のこりてあとをとるとなり。

岩波文庫

継子立ての問題設定

先妻の子15人と，後妻の子15人を残して主人が亡くなった．誰か一人に財産を継がせることになったが，後妻は実子を選びたい．そこで，30人をある順に円形に並べ，10人ごとに取り除くことにした．初めて見ると，先妻の子（継子）だけが次々と取り除かれていく．15人目の継子が「これは意図的であまりにひどい．今から自分から数え直して欲しい」と嘆願する．後妻は同意し，その子から数え始めると15人の実子がすべて取り除かれ，15人目の継子が最後に残った．どのような順に並べたか（どこから数えたか）．

最後に残された継子が，こんどは自分から逆回りに数え直して欲しい，と嘆願した．後妻は同意し，その子から数え始めると，継子が最後に残った．

継子を黒丸●，実子を白丸○

●●○●●●○○○○○●●○○●●●●○●○○○●○○●●○

{2,1,3,5,2,2,4,1,1,3,1,2,2,1}

ヨセフスの問題　　継子立ての問題

問 98　ヨセフスの問題

皇帝ベスパシアンはイスラエルのヨトファトの市街を略奪して回りましたが，その間，ヨセフスはほかの 40 人のユダヤ人と一緒に洞窟に隠れていました．そのときユダヤ人たちはローマ軍の手に落ちるよりは自殺しようと決心しました．

死にたくなかったヨセフスともう 1 人のユダヤ人の 2 人は，一計を案じて，ユダヤ人たちに，丸く輪になって座り，ある人から始めて，死んだ人は除きながら数えて 3 番目の人が自殺していく，という方法を提案しました．つまり，数え方は，‘1，2，3（自殺），4，5，6（自殺）’とします．

ではヨセフスたち 2 人は絶対に死なない位置としてどこを選んだでしょうか．

答　ヨセフスと死にたくなかったユダヤ人の 2 人は，うまく計算して調べたあと，41 人でつくった輪の中の 16 番目と 31 番目に入りました♠．

〈裏話〉ローマ兵たちは，臆病者と判断されたときは，一列に並ばされ 10 番目の兵ごとにその場で処刑されました．そのため，今でも「十番目の粛清（to decimate）」という言葉が残っています（それはのちに，もともとの数を十分の一に減らすことを強調する意味をもつようになりました）．

いずれにしろ戦史の断片がこうしたいわゆるヨセフスの問題のもとになっているということについては，古い時代に書かれた『デ・ベロ・ユーダイコ』という本の見知らぬ著者によって最初に記述されました．その著者は，ローマ人と戦ったユダヤ人の歴史家でもあるヨセフスが上のパズルのトリックを使ってどのようにして自らの身を守ったか，について書いています．

のちの同じような話では，キリスト教徒を当時の敵であったトルコと戦わせています．

問 99　九番目の粛清

15 人のキリスト教徒と 15 人のトルコ人が乗ったある船の甲板でのことです．

その船が嵐のために沈没しかかりました．それで荷を減らして軽くして船を助けるため，半分は海に飛び込まなくてはならなくなりました．そのとき 1 人のキリスト教徒が，全員で輪をつくって並び，9 番目の人ごとに海に飛び込む，という人選方法を提案しました．

では，キリスト教徒たちは，自分たちだけは安全で，トルコ人だけが海に飛び込むように，どのように並んだでしょうか．

答　キリスト教徒 C とトルコ人 T は次のような順で輪になって並び，最初の人から数えていきました．最後の人は最初の人の後につきます♥．

CCCCTTTTTCCTCCCTCTTCCTTTCTTCCT

♠ ヨセフス自身は『ユダヤ戦記』第 3 巻第 7 章 8 節にこのエピソードを紹介していますが，そこでは，ヨセフスが生き残ったのはむしろ運命のいたずらか神のご加護によるものといっています．また 3 番目の粛清という考え方が，1612 年のフランスのクロード・バシェによる数学書に初めて記されています．

♥ 原著の答は間違って，最後の 3 文字 CCT が TCCTT の 5 文字になっています．その間違い探しもパズルの一つかも知れません．

問 100　継子（ままこ）立て

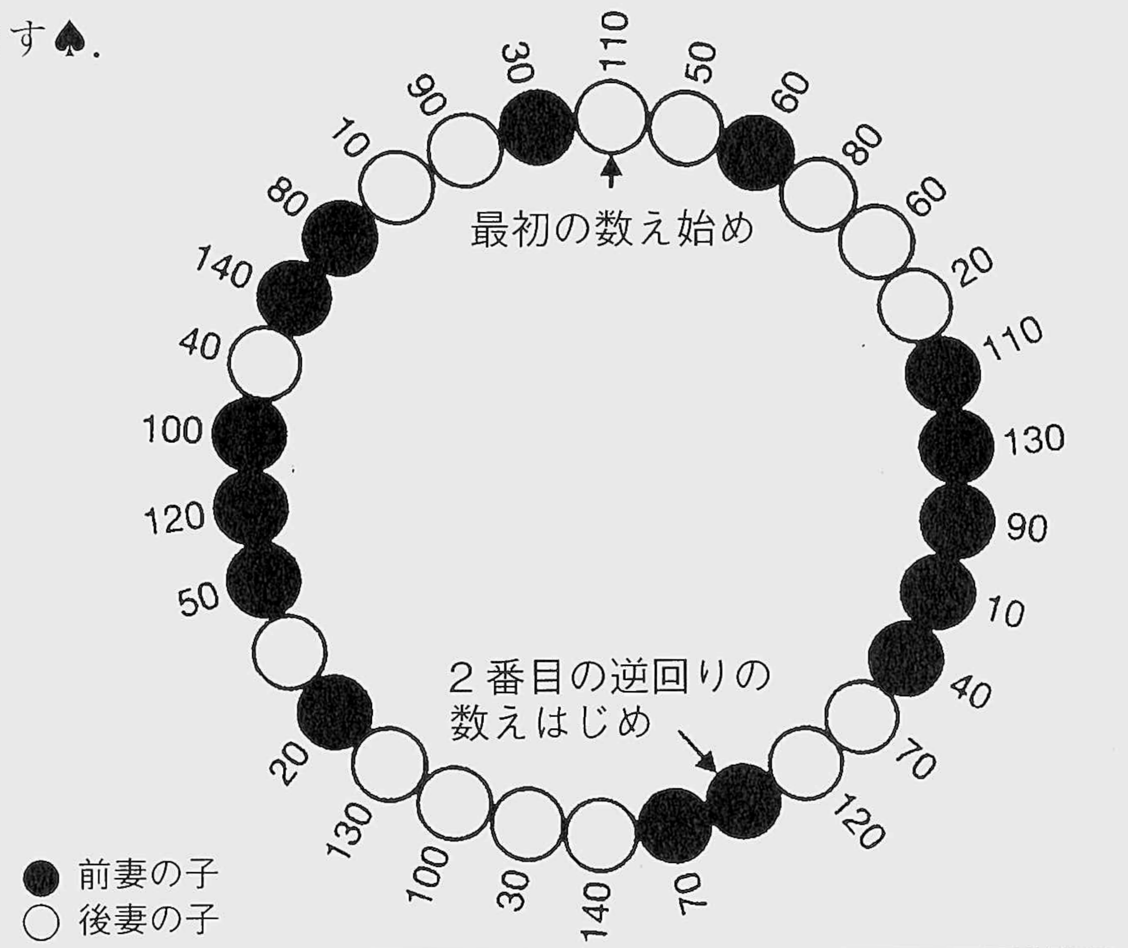
ヨセフスの問題には「継子立て」という日本でもお馴染みの問題もあります．再婚した父が，前妻の子供 15 人と後妻の子供 15 人の合わせて 30 人の子供に遺産分けする話です．

といっても 30 人では多すぎるので，遺産をもらう子供の数を減らすことになりました．それで後妻は，すべての子供たちを丸く並べて一定の間隔で取り除いていき，残った子供に遺産を残すという方法を提案しました．

ところが後妻の悪知恵のため，最初に取り除かれた 14 人はすべて前妻の子供でした．それに気が付いた前妻の最後の 15 人目の子供は，あたりを見渡しながら，これではひどすぎるから，今からは逆の回り方で数えてください，と頼みました．それを聞いた後妻は，せめて 1 人は自分の子供が残るだろうと信じて，賛成しました．ところが悔しいことに，後妻の子供はすべて消えてしまいました．

では子供はどういう風に並んだでしょうか．またどのように数えたでしょうか．

答　図のように並びます♠．



♠ 白丸（後妻の子）の出発点から時計回りに黒丸（先妻の子）の 10，20，30，というように黒丸ばかりを数えたあと，150 番目の黒丸（図の番号のない繰り返し点）で立ち止まって，その黒丸は消さずにそれを 1 として，そこから逆に反時計回りに白丸の 10, 20, 30, というように白丸ばかりを数えます．その最後の 150 番目が番号のない白丸で，結局，折り返し点になっている番号のない黒丸（先妻の子）だけが残ります．

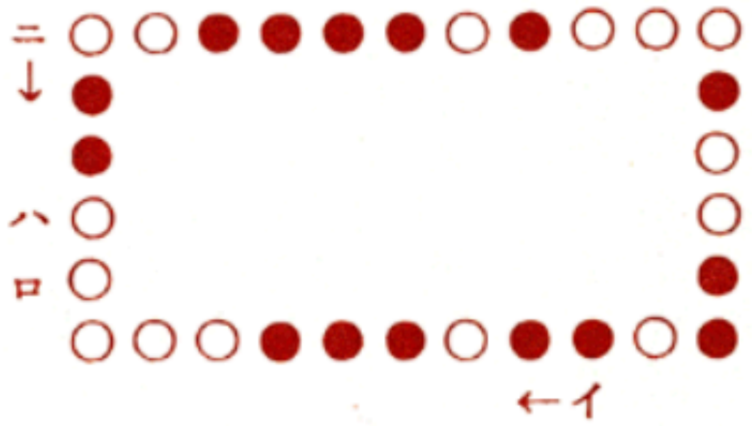
このヨセフスの問題は江戸時代の吉田光由（みつよし）の『塵劫記』（初版 1627）の中の継子（ままこ）立てとして有名ですが，それよりまだ前，鎌倉時代末の吉田兼好の『徒然草』（1332）にはもともとのヨセフスの問題のように戦陣と関係させる記述があります．

継子立ての歴史　徒然草137段

兼行法師 1330年頃

るべからず。一日に一人、二人のみならんや。鳥部野・舟岡、さらぬ野山にも、送る数多かる日はあれど、送らぬ日はなし。されば、棺をひさくもの、作りてうち置くほどなし。若きにもよらず、強きにもよらず、思ひかけぬは死期なり。今日まで遁れ来にけるは、ありがたき不思議なり。しばしも世をのどかには思ひなんや。ままこだてといふものを双六の石にて作りて、立て並べたるほどは、取られん事いづれの石とも知らねども、数へあてて一つを取りぬれば、その外は遁れぬと見れど、又々数ふれば、彼是間抜き行くほどに、いづれも遁れざるに似たり。兵の軍に出づるは、死に近きことを知りて、家をも忘れ、身をも忘る。世をそむける草の庵には、閑かに水石をもてあそびて、これを余所に聞くと思へるは、いとはかなし。閑かなる山の奥、無常の敵競ひ来らざらんや。その死に臨める事、軍の陣に進めるにおなじ。

を表す係助詞。 九 継子立ての遊戯。黒白の石各十五個を、一定の順に配列し、その中の一つ(図のイの石)を起点として数えはじめ、まず第十番目にあたる石(図のロ)を取り除く。次に、その隣(図のハ)の石から、また第十番目にあたる石を取り除き、順次に石を間引いてゆくと、白は(図のニ)の石だけが残る。さて今度は、残った白(図のニ)の石を起点に順々に、十ずつ反対の方向に数えて間引いてゆくと、ついに白(図のニ)の石一つだけが残る仕組みである。 一〇 十番目、十番目と数えあてて。 一一 そのほかの石は助かった。 一二 間をおいて抜き取る。 一三 どの石も。 一四 俗世間を隠遁した。



今日まで死からまぬかれてきたということは、珍しい不思議なことなのである。しばらくでも、この世をのんびりしたものと思えようか。継子立てというものを、双六の石で作って、置き並べてあるうちは、取られるであろうのは、どの石であるともわからないが、数えあてて一つの石を取ってしまえば、その他の石はまぬかれたように見えるが、さらにまた数えると、あれこれと間引いてゆくうちに、どの石も遁れられないのと、人間の運命は似ている。武士の戦

小学館『新編日本古典文学全集44　方丈記／徒然草／正法眼蔵随聞記／歎異抄』（校注／訳　神田秀夫・永積安明・安良岡康作）1995年

藤原資隆（すけたか）『簾中抄』

12世紀

ま二又一

ままこだての頌

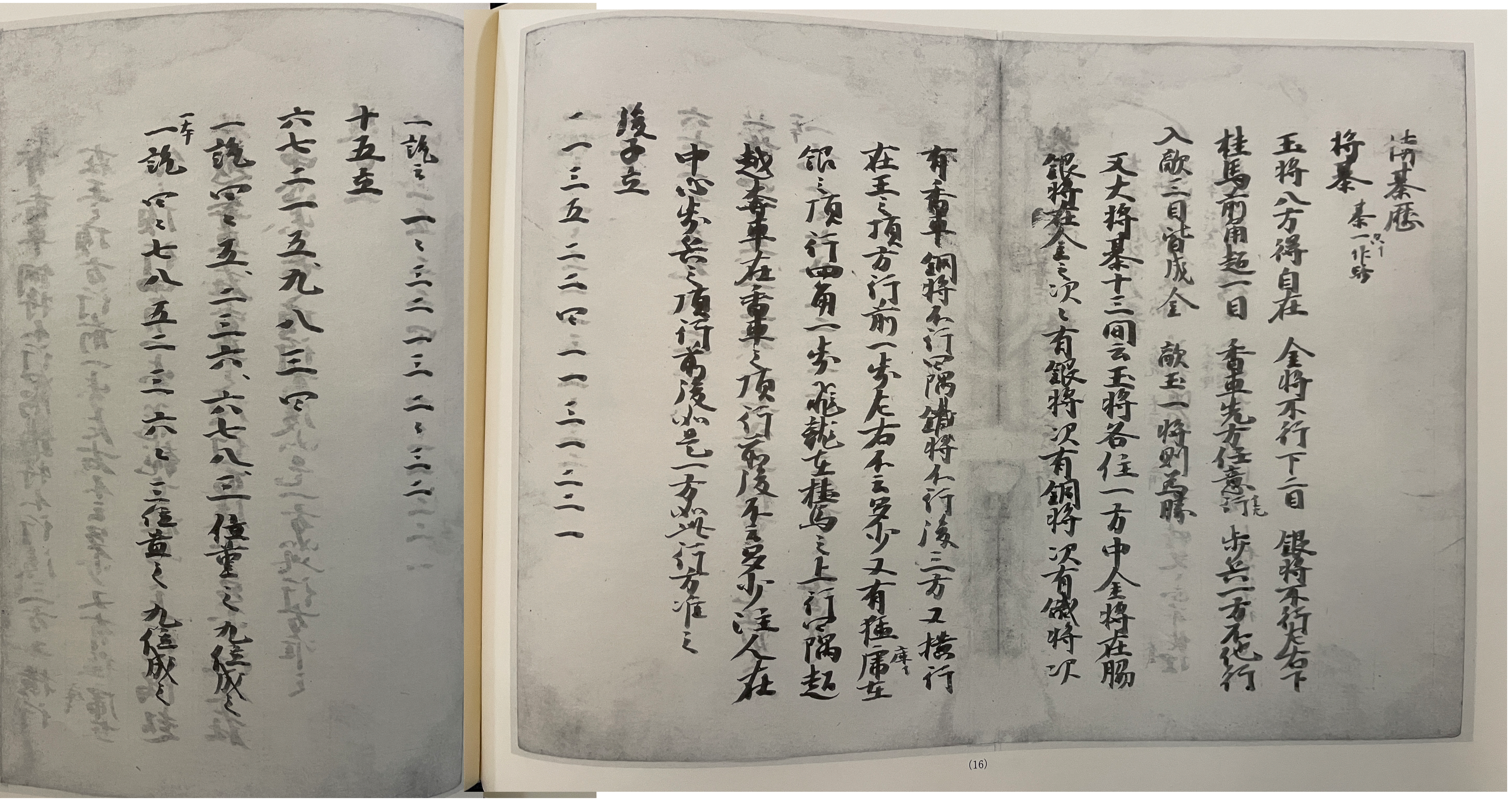
二一三五二〃四一〃三一二〃一

又様

一〃三二一三二二三二

『二中歴』

1210-1221頃

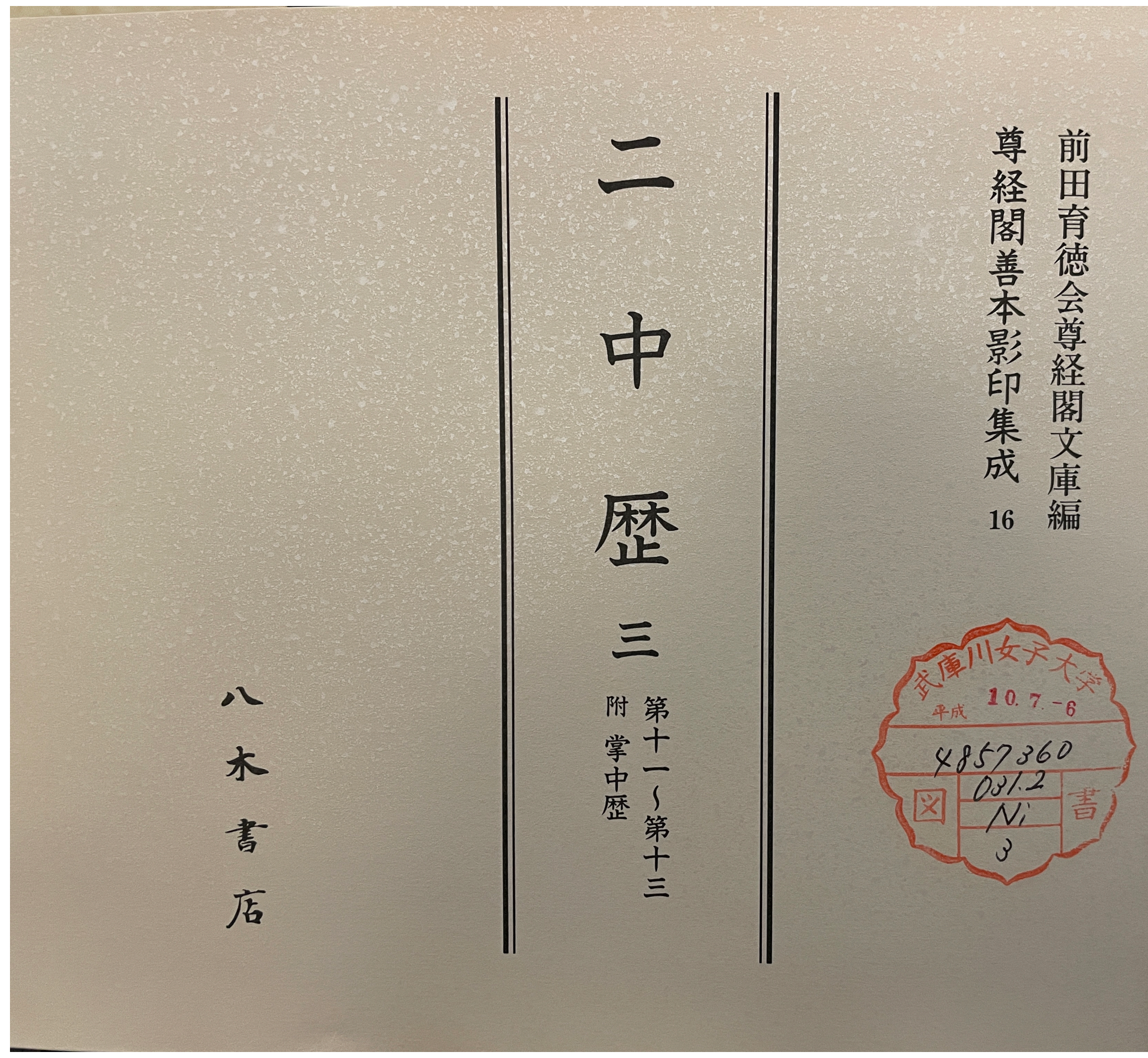


継子立

二一三五二〃四一〃三一二〃一

一説云

一〃三二一三二二三二



8	1	6
3	5	7
4	9	2

虎関和尚（こかんおしょう）『異制庭訓往来（いせいていきんおうらい）』正月六日　1276-1346頃

《異制庭訓往来》には，〈十不足〉〈百五減〉〈盗人隠〉〈左々立（ささだて）〉などの碁石を使って遊べる遊戯が並べられている。

十不足，百五減，盗人隠，郎等打
継子立，石抓，入金，要金，
重瞰，小童敷，双六

『往来物大系　第10巻』（大空社）平成4年

https://kokusho.nijl.ac.jp/biblio/100263958/

『鼠の草子絵巻』（天理図書館所蔵版）

室町期

よのなかにありや
なしやのま＞こたて
こひしとばかり
おもふなりけり

『天理図書館善本叢書　和書之部　第八巻　古奈良繪本集一』
（八木書店）昭和47年

まず継子立の石の絵であるが，このままでは継子立にならない．絵師はおそらく絵ではなく『簾中抄』などにあるような数字列を見ながらこの絵を描いたと思われる．そのとき絵師が見た写本の数字列がすでに誤っていたか，それとも絵師がそれを見誤ったかのどちらかであるが，いずれにせよこの絵は，『簾中抄』などの正しい並べ方の数字列に次のような四つの変形，(a), (b), (c), (d), が加わった結果と思われる．

	(a)									(b)	(c)			
	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○●	○	●	○	
正：	二	一	三	五	二	二	四	一	一	三一	二	二	一	
	↓									↓	↓			
鼠：	欠	一	三	五	二	二	四	一	一	一三	一一	二	一	
(d)→		●	○	●	○	●	○	●	○	●○	●○	●	○	

林隆夫，数学史研究 173/174合併号(2002) 1

そのほか

<平安時代>

[1106 -1159 藤原通憲 (村井中漸によれば，継子立の考案または伝授者)]

[1127 『懐中歴』(『二中歴』の博棊歴が基づく)]

1151-1156 頃『簾中抄』(「まゝこたての略頌」の項で数字列 2 つを列挙)

<鎌倉–南北朝 時代>

1210-1221 頃『二中歴』(博棊歴の「後子立」の項で数字列 2 つを列挙)

1310-1331 頃『徒然草』(死を免れぬ身をまゝ子立の石にたとえる)

1278-1346 頃『異制庭訓往来』(「継子立」に言及)

?–1372『新撰遊覚往来』(「三十二十之継子立」に言及)

<室町–戦国–安土桃山 時代>

1500 頃『十二段草子』(「ありやなしやのまゝこたて」に言及)

1500 頃 天理図書館蔵『鼠の草子絵巻』(「ありやなしやのまゝこたて」を含む歌と碁石の図)

<江戸時代>

1604『徒然草寿命院抄』(数字列 1 つを列挙し，10 番目を除くことに言及)

1624『徒然草野槌』(数字列 1 つを列挙し，10 番目を除くことに言及)

1627-1631 頃『塵劫記』刊年未詳の 5 巻本 (継子立の具象的な絵と文章説明を載せる)

[1644-1652?『姫百合のさうし』(「まま子だて」に言及)]

1693『男重宝記』(「三十二十之継子立」に言及)

林隆夫，数学史研究 173/174合併号(2002) 1

いずれも大逆転はない.

大逆転は，吉田光由が気づいたか？

関孝和編　算脱之法　俗之継子立曰

東北大学附属図書館蔵（1683）
国書データベースから
https://kokusho.nijl.ac.jp/biblio/100235190/6?ln=ja

○算脱之法　俗謂之繼子立　關孝和編

𫟈限諸數

置一總數一為原法（實位先空）仍法一實脫數各累加之實滿法則去之過實盡而法數內減一餘為正限求次正限者置前法（實位又空）法一實脫數各累加之實滿法則去之過實盡而法數內減一餘為次正限數逐如此各求正限諸數也。假如五脫者置一為原法（實位先空）法二加一實加五（實得五法二）以法去實餘一又法加一實加五（實得六法三）以法去實無餘即法三內減一餘二為正限。亦置前法三（實位又空）法加一實加五（實得五法四）以法去實餘一又法加一實加五（實得六法五）以法去實餘一又法加一實加五（實得六法六）以法去實無餘即法六內減一餘五又為正限次第如此求正限諸數也。縱至百千萬脫求正限數幾何件皆倣之

脫數	正限諸數				
二	一	三	七	十五	三十一
三	三	五	八	三十	六十九
四	一	四	八	十一	十五
五	二	五	十一	十四	三十六
六	一	二	七	十三	七十三
七	二十二	四十九	九十二	二百三十四	三百十九
八	一	四	九	十九	二十九
九	九十	百四十五	二百〇七	二百三十三	四百七十四
十	一	十五	二十一	七十	二百二十六

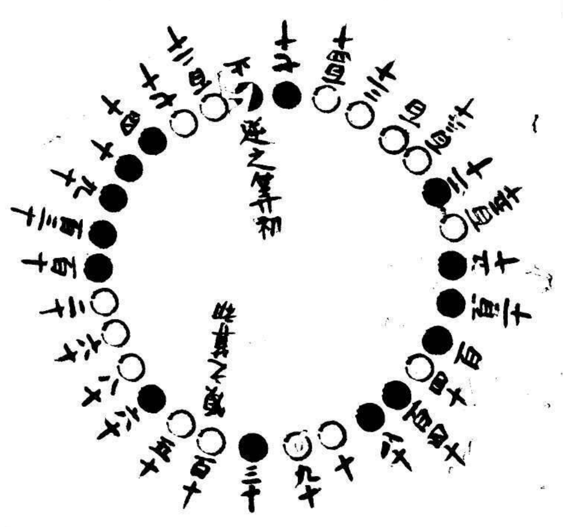
𫟈負交布

圓布總子（乃總子數隨所好也先總子皆以正布之）定算初子順算而中其脫數子為負又從次子順算而中其脫數子為負逐如此而視所餘之正合其脫正限諸數則止。假如十脫者餘正或十五或二十一或七十等也是依總子多少而可斟酌焉他皆倣之（所謂正者白子負者黑子）

○順逆脫去

依前正負交布而起於算初子順算而中其脫數者去之又從次子順算而中其脫數者去之次第如此去之餘負一還從甚負逆算而如前去之則正盡而止負一子也

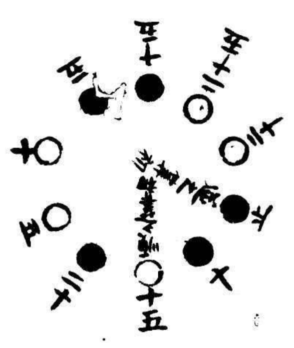
十脫三十子之圖



謂之繼子立者俗諺云往昔富農有子三十人內十五人前妻之子十五人後妻之子也

後妻以為令我所產子嗣夫家或時謂夫曰交立三十子而定算初順算而中十者脫去之使最末止者嗣家乎夫諾即後妻如前圖立之從算初順算而既脫去繼子十四人止一人彼曰迄今一偏脫去了請此後以予為算初逆算而脫去焉乃如其言終後妻之子脫盡而彼繼子一人止得嗣父家也此甚野鄙之語而雖不足取之然又於算不可無術也故蔽亮之以述其法矣

比類　○五脫十子之圖



其餘諸脫皆準之可得也故不繁說而已

てつじゅつ

建部賢弘『綴術算経』（1722）

右**算脱ノ法ハ兄賢明カ探會スル所ナリ**賢明カ生知孝和ニ亜リ，其稟受ノ気情虚弱ニシテ，
常ニ病日多シ會テ五斜ノ括術ヲ為ント欲シテ其繁雑セリ，
假に萬位ニ及フトモ，一日ニ百位ヲ造サハ，徐リ百日ニシテ畢ラント言テ果シテ月餘ニシテ，悉ク成セリ，

https://kokusho.nijl.ac.jp/biblio/100236527/

関孝和編　算脱之法　俗之継子立曰

関孝和全集2（2023, 岩波）

1オ

算脱の法（俗にこれを継子立てと謂ふ）

関孝和編

正限の諸数

一（この一、負に擬す）を置き原法と為す（実位先づ空）。仍りて法に一、実に脱数を各これに累加し、実の法に満つれば、則ちこれを去る。実の尽くるに遇ひて、法数の内一を減じて、余りを正限の数と為す。次の正限を求むるには前の法を置き（実位又た空）、法に一、実に脱数を各これに累加し、実の法に満つれば、則ちこれを去る。実の尽くるに遇ひて、法数の内一を減じて、余りを次の正限の数と為す。逐ひて此の如く各正限の諸数を求むるなり。仮如五脱は一を置き原法と為し（実位先づ空）、法に一を加へ、実に五を加ふ（法二、実五を得る）。法を以て実を去り、余り一。又た法に一を加へ、実に五を加ふ（法三、実六を得る）。法を以て実を去り、余り無し。即ち法三の内一を減じて、余り二を正限と為す。亦た前法の三を置き（実位又た空）、法に一を加へ、実に五を加ふ（法四、実五を得る）。法を以て実を去り、余り一。又た法に一を加へ、実に五を加ふ（法五、実六を得る）。法を以て実を去り、余り一。又た法に一を加へ、実に五を加ふ（法六、実六を得る）。法を以て実を去り、余り無し。即ち法六の内一を減じ、余り五を又た正限と為す。次第に此の如く正限の諸数を求むるなり。縦ひ百、千、万脱に至り正限の数幾何を求むる件、皆これに倣へ。

2オ

脱数	正限の諸数				
二	一	三	七	十五	三十一
三	三	五	八	三十	六十九
四	一	四	八	十一	十五
五	二	五	十一	十四	三十六
六	一	二	七	十三	七十三
七	二十二	四十九	九十二	二百三十四	三百十九
八	一	四	九	十九	二十九
九	九十	百四十五	二百〇七	二百三十三	四百七十四
十	一	十五	二十一	七十	二百二十六

2ウ

正負交布

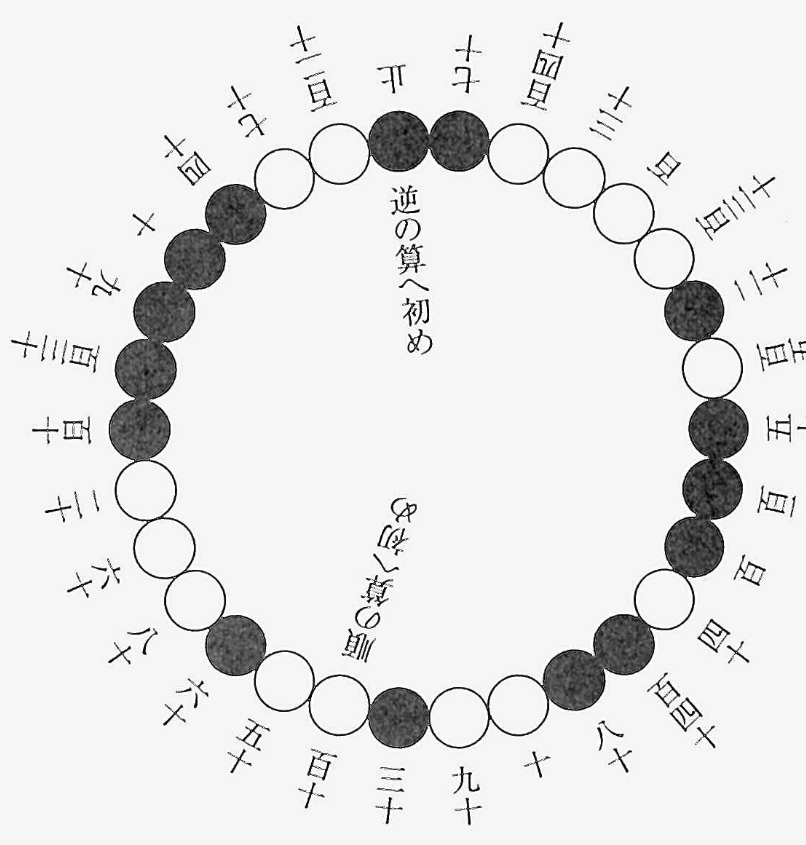
円に総子を布き（乃ち総子の数は好むところに随ふなり。先づ総子は皆正を以てこれを布く）、算へ初めの子を定む。順に算へてその脱数に中る子を負と為す。又た次の子より順に算へて、その脱数に中る子を負と為す。逐ひて此の如くして、余すところの正を視るに、その脱の正限の諸数に合へば、則ち止む。仮如十脱は正を余すこと或いは十五、或いは二十一、或いは七十等なり。これ総子の多少に依りて焉を斟酌すべし。他は皆これに倣へ（所謂正は白子、負は黒子）。

順逆脱法

前に依り正負を交布して、算へ初めの子より起こし、順に算へて、その脱数に中るものはこれを去る。又た次の子より順に算へて、その脱数に中るものはこれを去る。次第に此の如くこれを去り負一の余り、その負より還りて逆に算へて、前の如くこれを去れば、則ち正尽きて、負一子を止むるなり。

十脱三十子の図

3オ



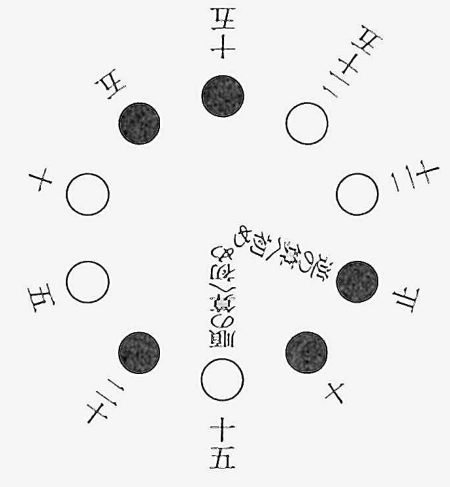
3ウ

これを継子立てと謂ふは俗諺に曰く、往昔、富農、子三十人有り。内十五人は前妻の子、十五人は後妻の子なり。後妻以為、我が産むところの子をして夫が家を嗣がしめんと。ある時夫に謂ひて曰く、三十子を交へ立て、算へ初めを定め、順に算へて、十に中るはこれを脱し去り、最も末に止むる者をして家を嗣がしめんかと。夫諾ふ。即ち後妻、前図の如くこれを立て、算へ初めより順に算へて、既に継子十四人を脱し去り、一人止む。彼曰く、今まで一偏に脱し去り了る。請ふ、この後我を以て算へ初めとなし、逆に算へて脱し去れと。乃ち、その言の如くす。終に後妻の子脱し尽くして、彼の継子一人止まり、夫が家を嗣ぐを得るなり。これ甚だ野鄙の語にして、これを取るに足らずと雖ども、然れども又た算ふるに術無かるべからざるなり。故にこれを拡充し、以てその法を述ぶ。

4オ

比類　五脱十子の図

4ウ



算脱の法訖り

その余の諸脱、皆これに準じ、得べきなり。故に繋く説かざるのみ。

関孝和編　算脱之法　俗之継子立日

1683年

建部賢弘『綴術算経』(1722)には, 建部賢明が考案した, とある.

「算脱之法」に記載されている正限数の表（漢数字を算用数字に直し，列は左から並べた）

脱数	2	3	4	5	6	7	8	9	10
正限数	1	3	1	2	1	22	1	90	1
同	3	5	4	5	2	49	4	145	15
同	7	8	8	11	7	92	9	207	21
同	15	30	11	14	13	234	19	233	70
同	31	69	15	36	73	319	29	474	226

1. 最初の法（原法）を 1，実を 0（空）とする．
2. 法には 1 を加え，実には脱数を加えてその数から法を引けるだけ引いた残りを実とせよ．
3. 実が 0 となるとき，法から 1 を引いたものが正限数である．
4. これを続けて次の実が 0 になるときも，法から 1 を引いたものが正限数である．

1. （法とよぶ数）$n = 1, 2, 3, \cdots$ を 1 行目に，脱数 m を 2 行目の各列に記せ．
2. （実とよぶ数 +1）J_n とする数を 3 行目のはじめに，$J_1 = 1$ と記入せよ．
3. $n \geq 2$ の J_n は，$J_n = \mathrm{mod}\,(m + J_{n-1}, n)$ である．この値がゼロのときは，$J_n = n$ とせよ．
4. $J_n = 1$ となるときの n より，$N = n - 1$ とすればそれが正限数である．

例えば，$m = 3$ のときは，次の表になり，正限数は，$N = 3, 5, 8, \cdots$ ということになる．

法	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
脱数	m	3	3	3	3	3	3	3	3	3
実 +1	J_n	1	2	2	1	4	1	4	7	1

関孝和編　算脱之法　俗之継子立日

1683年

建部賢弘『綴術算経』(1722)には, 建部賢明が考案した, とある.

- $n=1$ のとき，$J_1=1$ は明らかである．
- $n=2$ のとき，人の並びを円状に名前をつけて，$a,b,a,b,\cdots$ とすれば，$m=3$ 人目を取り除くと，$a,b,\cancel{a},b,\cdots$ となり，2 番目の b が残る．したがって，$J_2=2$ となる．
- $n=3$ のとき，同様に，$a,b,c,a,b,c,\cdots$ とすれば，3 人目を取り除くと，$a,b,\cancel{c},a,b,\cancel{c},\cdots$ となり，残りは，a,b の順で二人．二人の場合，$J_2=2$ であるから，2 番目の b が残る．したがって，$J_3=2$ となる．
- $n=4$ のとき，同様に，$a,b,c,d,a,b,c,d,\cdots$ とすれば，3 人目を取り除くと，$a,b,\cancel{c},d,a,b,\cancel{c},d\cdots$ となり，残りは d,a,b の順で三人．三人の場合，$J_3=2$ であるから，2 番目の a が残る．a は 1 番目の人なので，$J_4=1$ となる．

このようにして，残された列の何番目が最後まで残るか，と再帰的な形式で考えることができる．

1. （法とよぶ数）$n=1,2,3,\cdots$ を 1 行目に，脱数 m を 2 行目の各列に記せ．
2. （実とよぶ数 +1）J_n とする数を 3 行目のはじめに，$J_1=1$ と記入せよ．
3. $n\geq 2$ の J_n は，$J_n=\mathrm{mod}\,(m+J_{n-1},n)$ である．この値がゼロのときは，$J_n=n$ とせよ．
4. $J_n=1$ となるときの n より，$N=n-1$ とすればそれが正限数である．

例えば，$m=3$ のときは，次の表になり，正限数は，$N=3,5,8,\cdots$ ということになる．

法	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
脱数	m	3	3	3	3	3	3	3	3	3
実 +1	J_n	1	2	2	1	4	1	4	7	1

再帰的方法を使わない J_n の導出

n 人が円形に並べられていて，m 人ごとに取り除くとき，それぞれの人がどの順で取り除かれるかを考えることで，漸化式を用いずに J_n を求めることができる．$n=6$ として $\{a,b,c,d,e,f\}$ としよう．$m=3$ の場合を考えよう．

- 3 人目を取り除くと， $\{a,b,\cancel{c},d,e,f\}$ となる．c は 1 番目に取り除かれたので，$c=1$ とする．
- 残りの順 $\{d,e,f,a,b\}$ から 3 人目を取り除くと，$\{d,e,\cancel{f},a,b\}$ となる．$f=2$ とする．
- 残りの順 $\{a,b,d,e\}$ から 3 人目を取り除くと，$\{a,b,\cancel{d},e\}$ となる．$d=3$ とする．
- このような操作を続けると，

a	b	c	d	e	f
6	4	1	3	5	2

  と対応する．この 2 行目が $E_i^{(6,3)}$ である．
- 得られた順を入れ替える (inverse permutation) と，$\{1,2,3,4,5,6\}$ に対応して $\{c,f,d,b,e,a\}$ となるので，最後に残されるのは a．したがって，$J_6=1$ となる．

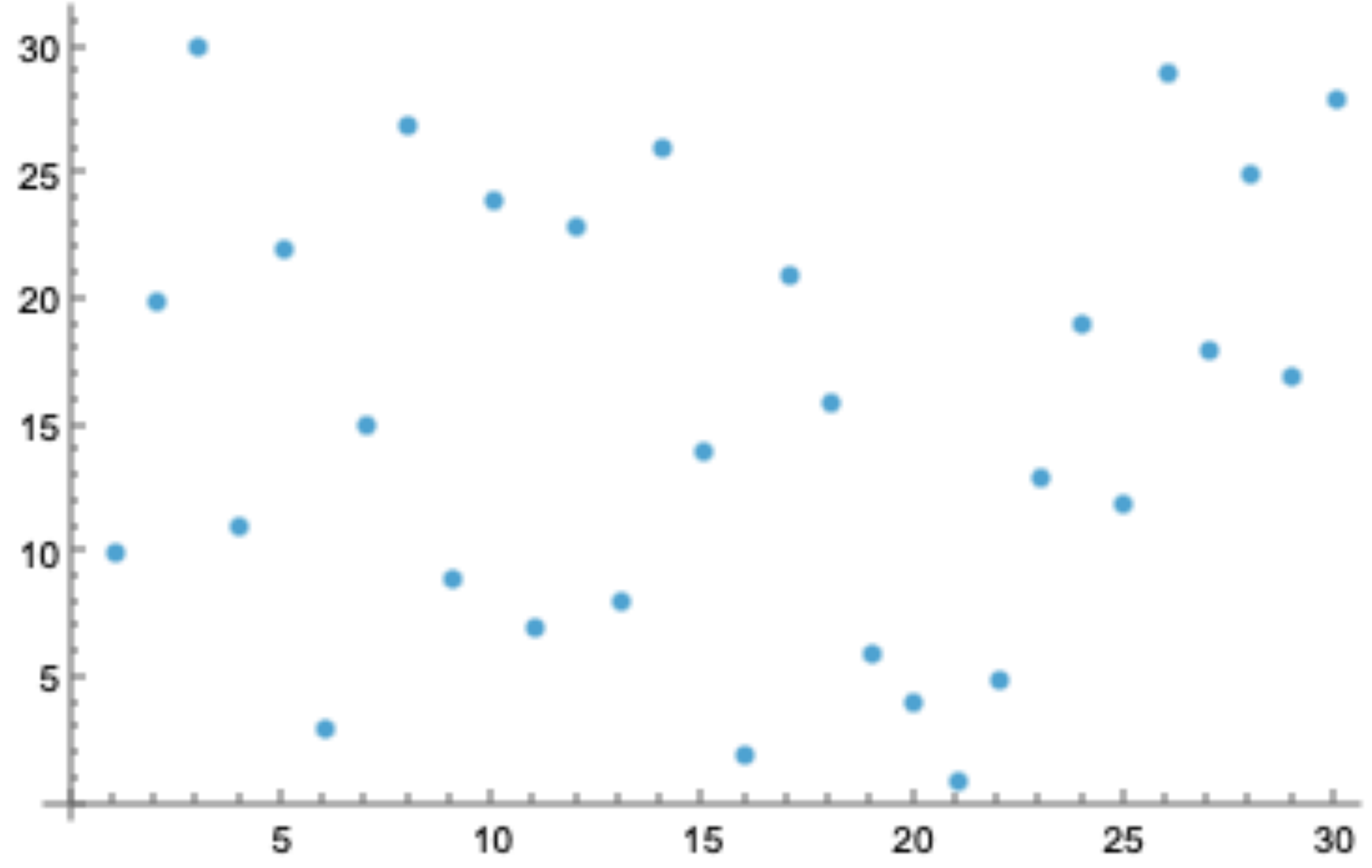
```
In[2]:= Josephus[n_Integer, m_Integer] :=
  Block[{live = Range[n], next},
   InversePermutation[
    Table[
     next = RotateLeft[live, m - 1];
     live = Rest[next];
     First[next],
     {n}]]]

In[3]:= Josephus[30, 10]

Out[3]= {21, 16, 6, 20, 22, 19, 11, 13, 9, 1, 4, 25, 23,
  15, 7, 18, 29, 27, 24, 2, 17, 5, 12, 10, 28, 14, 8, 30, 26, 3}

In[4]:= ListPlot[InversePermutation[Josephus[30, 10]]]
```

Out[4]=



S. スキエナ著, 植野義明訳『Mathematica 組み合わせ論とグラフ理論』(アジソン ウェスレイ･トッパン, 1992)

継子立て　なぜ10脱か？　なぜ15＋15人か

15+15人で10脱

●●○●●●○○○○○●●○○
●●●●○●○○○●○○●●○

$$E_i^{(30,10)} = \{21,16,6,20,22,19,11,13,9,1,4,25,23,15,7,18,29,27,24,2,17,5,12,10,28,14,8,30,26,3\}$$

「算脱之法」に記載されている正限数の表（漢数字を算用数字に直し，列は左から並べた）

脱数	2	3	4	5	6	7	8	9	10
正限数	1	3	1	2	1	22	1	90	1
同	3	5	4	5	2	49	4	145	15
同	7	8	8	11	7	92	9	207	21
同	15	30	11	14	13	234	19	233	70
同	31	69	15	36	73	319	29	474	226

5+5人で3脱

$E_i^{(10,3)} = \{6,4,1,10,8,2,5,7,3,9\}$ より

○●●○○●●○●○ $\{1,2,2,2,1,1,1\}$

5+5人で5脱

$E_i^{(10,5)} = \{7,4,10,8,1,3,9,6,5,2\}$ より

○●○○●●○○●● $\{1,1,2,2,2,2\}$

4+5人で3脱

$E_i^{(9,3)} = \{9,7,1,4,6,2,8,5,3\}$ より

○○●●○●○○● $\{2,2,1,1,2,1\}$

5+4人で4脱

$E_i^{(9,4)} = \{9,8,3,1,6,5,7,2,4\}$ より

○○●●○●○●● $\{2,2,1,1,1,2\}$

3+3人で3脱

$E_i^{(6,3)} = \{6,4,1,3,5,2\}$ より

○○●●○● $\{2,2,1,1\}$

4+4人で4脱

$E_i^{(8,4)} = \{5,4,6,1,3,8,7,2\}$ より

○●○●●○○● $\{1,1,1,2,2,1\}$

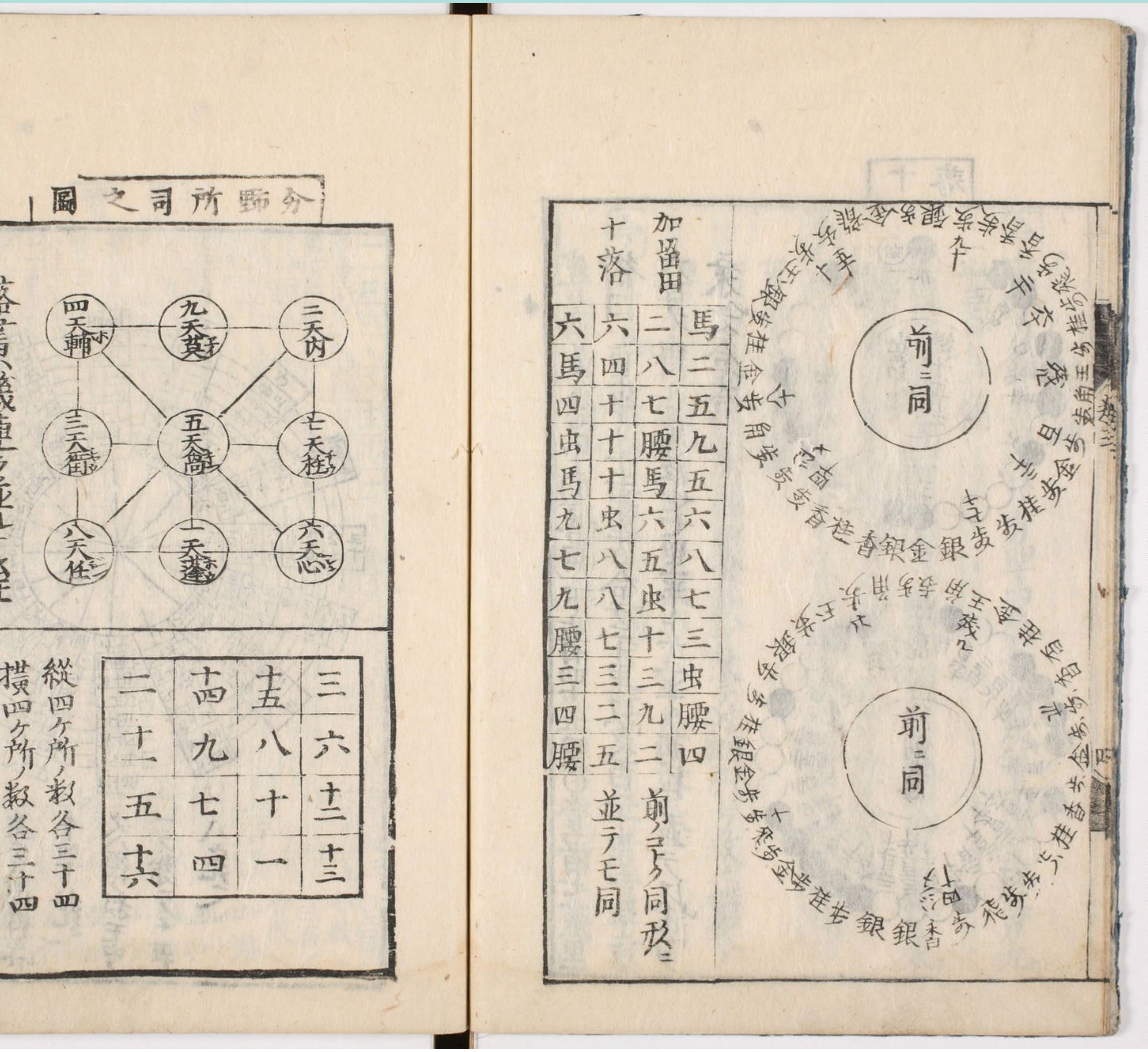
『算組』 第3巻

村松茂清 1663年

京都大学貴重資料デジタルアーカイブ
https://rmda.kulib.kyoto-u.ac.jp/item/rb00028424?page=60

『算組』 第3巻

村松茂清 1663年



京都大学貴重資料デジタルアーカイブ
https://rmda.kulib.kyoto-u.ac.jp/item/rb00028424?page=60

- 将棋の駒 20 + 20 個を円形にならべ，10 個ごとに取り除く場合は，

$$E_i^{(40,10)} = \{11, 14, 35, 8, 33, 25, 17, 28, 39, 1, 5, 37, 34, 12, 27, 9, 15, 22, 20, 2, 38, 6, 24, 18, 40, 36, 13, 10, 31, 3, 26, 16, 7, 30, 32, 29, 21, 23, 19, 4\}$$

- 取り除く順を，歩 18，香 4，桂 4，銀 4，金 4，角 2，飛 2，玉 2 の順にするためには，

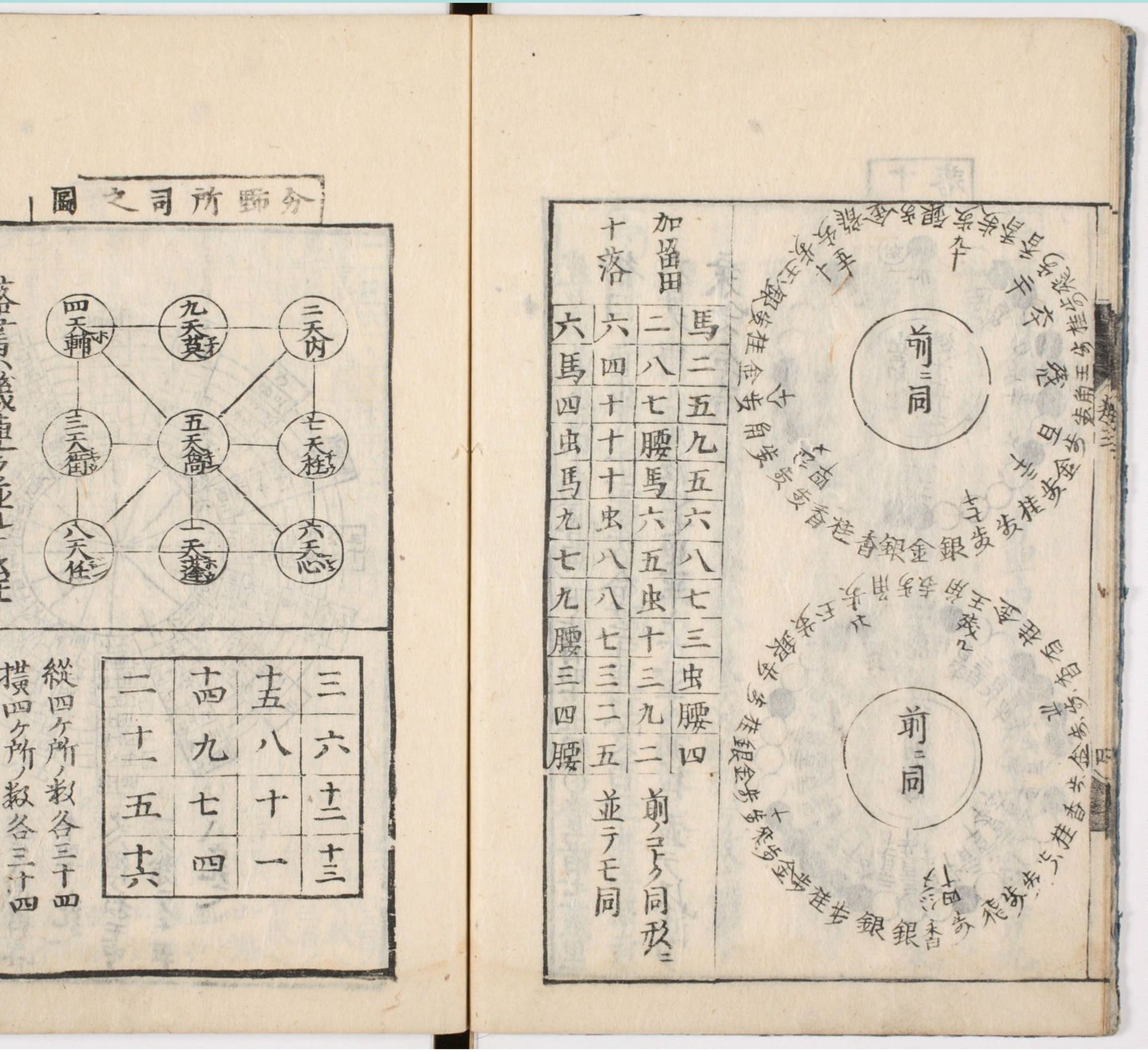
{ 歩, 歩, 角, 歩, 金, 桂, 歩, 銀, 玉, 歩,
歩, 飛, 金, 歩, 銀, 歩, 歩, 香, 香, 歩,
飛, 歩, 桂, 歩, 玉, 角, 歩, 歩, 金, 歩,
桂, 歩, 歩, 銀, 金, 銀, 香, 桂, 香, 歩 }

- 歩 9，香 2，桂 2，銀 2，金 2，角，飛，玉の順で 2 回繰り返す場合の置き方は，

{香, 銀, 銀, 歩, 桂, 歩, 金, 歩, 飛, 歩,
歩, 金, 銀, 桂, 歩, 歩, 銀, 歩, 玉, 歩,
角, 歩, 歩, 角, 玉, 金, 桂, 香, 香, 歩,
歩, 金, 歩, 香, 桂, 歩, 歩, 歩, 飛, 歩}

『算組』 第3巻

村松茂清 1663年



京都大学貴重資料デジタルアーカイブ
https://rmda.kulib.kyoto-u.ac.jp/item/rb00028424?page=60

トランプの場合について，村松は，$\{A, 1, 2, \cdots, 10, 11, 12\}$ が 4 組ある 48 枚のものを考えている．

$$E_i^{(48,10)} = \{42, 5, 20, 35, 17, 23, 30, 28, 10, 1, 46, 14\\ 6, 32, 26, 48, 44, 21, 18, 2, 39, 11, 34, 7,\\ 24, 15, 38, 40, 37, 3, 29, 31, 27, 12, 8, 19,\\ 22, 43, 16, 4, 41, 33, 25, 36, 47, 9, 13, 45\}$$

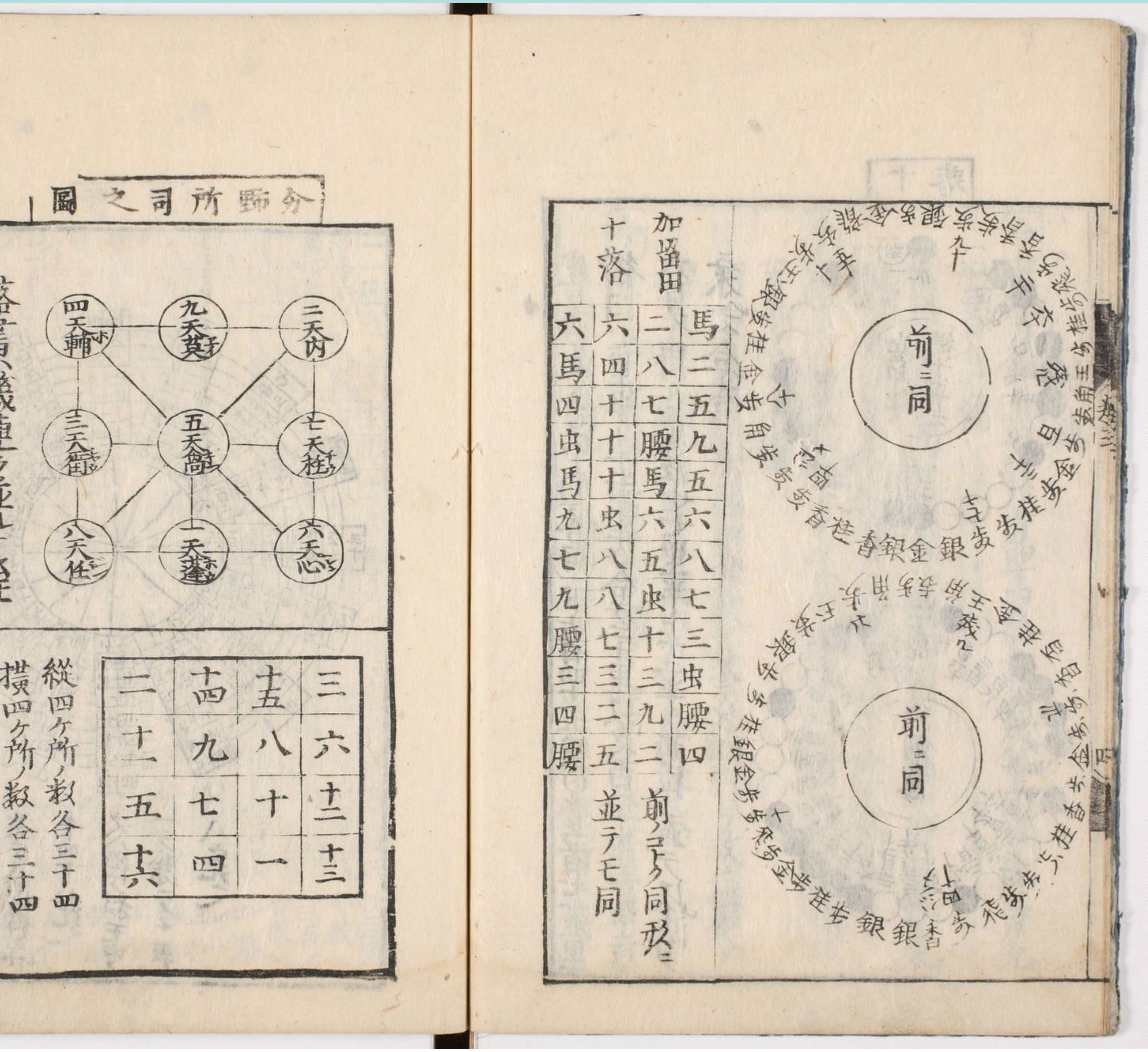
であるから，A=虫，11=馬，12=腰と表記して，4 スートずつ 虫$^{\clubsuit}$, 虫$^{\diamondsuit}$, 虫$^{\heartsuit}$, 虫$^{\spadesuit}$, $2^{\clubsuit}, \cdots$ のような順で引き抜くためには

$\{\text{馬}^{\diamondsuit}, 2^{\clubsuit}, 5^{\spadesuit}, 9^{\heartsuit}, 5^{\clubsuit}, 6^{\heartsuit}, 8^{\diamondsuit}, 7^{\spadesuit}, 3^{\diamondsuit}, \text{虫}^{\clubsuit}, \text{腰}^{\diamondsuit}, 4^{\diamondsuit}$
$2^{\diamondsuit}, 8^{\spadesuit}, 7^{\diamondsuit}, \text{腰}^{\spadesuit}, \text{馬}^{\spadesuit}, 6^{\clubsuit}, 5^{\diamondsuit}, \text{虫}^{\diamondsuit}, 10^{\heartsuit}, 3^{\heartsuit}, 9^{\diamondsuit}, 2^{\heartsuit},$
$6^{\spadesuit}, 4^{\heartsuit}, 10^{\diamondsuit}, 10^{\spadesuit}, 10^{\clubsuit}, \text{虫}^{\heartsuit}, 8^{\clubsuit}, 8^{\heartsuit}, 7^{\heartsuit}, 3^{\spadesuit}, 2^{\spadesuit}, 5^{\heartsuit},$
$6^{\diamondsuit}, \text{馬}^{\heartsuit}, 4^{\spadesuit}, \text{虫}^{\spadesuit}, \text{馬}^{\clubsuit}, 9^{\clubsuit}, 7^{\clubsuit}, 9^{\spadesuit}, \text{腰}^{\heartsuit}, 3^{\clubsuit}, 4^{\clubsuit}, \text{腰}^{\clubsuit}\}$

とするとよい．（村松は 4 組に分けて表示していないが，補って表示した．）

『算組』 第3巻

村松茂清 1663年



京都大学貴重資料デジタルアーカイブ
https://rmda.kulib.kyoto-u.ac.jp/item/rb00028424?page=60

ボハルデのドラゴンカルタ・整列済

https://japanplayingcardmuseum.com/namban-carta-resurrected-after-450-years-ja/

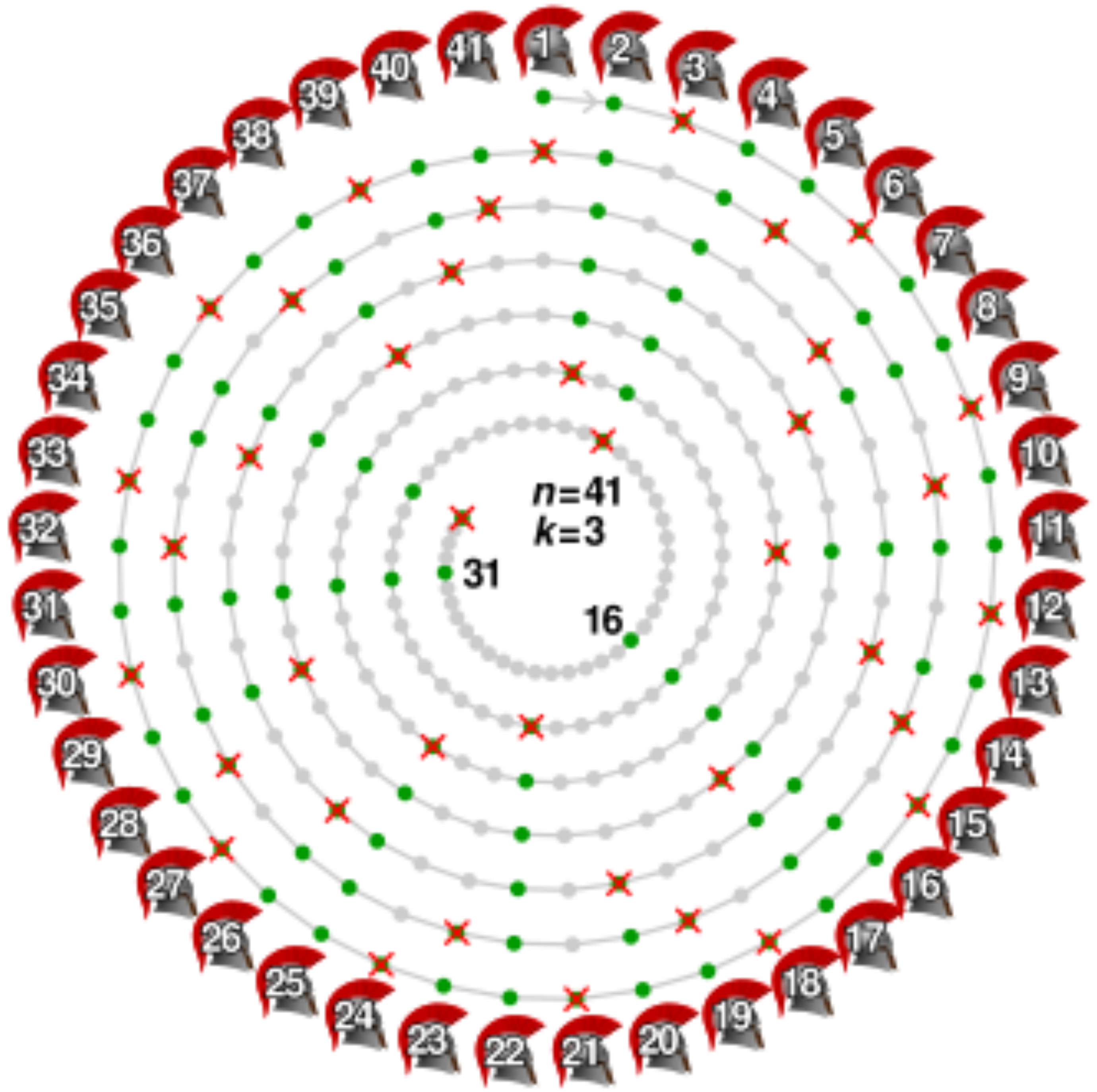
ポルトガルから15世紀に持ち込まれた「南蛮カルタ」は，4スート各12枚からなるものだった．江戸時代には「うんすんカルタ」として，5スート14枚組の日本独自のものが生まれる

ポルトガル語スート

スート				
名称	パオ	イス	コツ	オウル
ポルトガル語	Paus	Espadas	Copas	Ouros
意味	棍棒	刀剣	聖杯	金貨

https://ja.wikipedia.org/wiki/うんすんカルタ

ヨセフスの問題（Josephus problem）

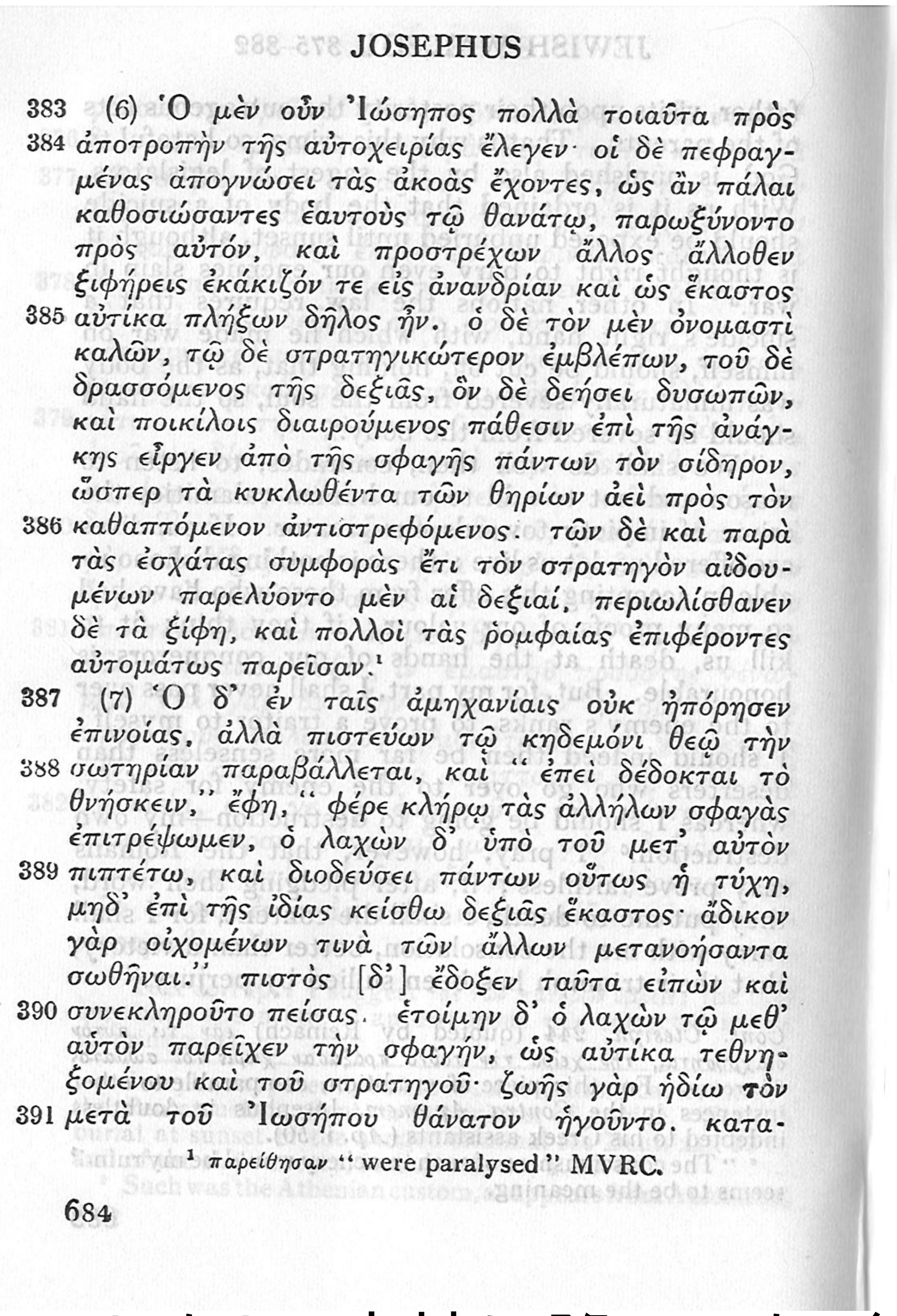


ローマ時代の内乱期, ユダヤ人の反乱グループ41人は洞窟に閉じ込められ, 敗北が明らかになったので自害することにした. 当時の監修により, 全員が円形に並び, 3人ごとに処刑することになった. そのうちの一人ヨセフスは, 腹心の部下とともにどこに立てば最後の二人になるかを素早く計算した.

Josephus, The Jewish War?? 出典不明

41人の3脱

ヨセフスの問題（Josephus problem）

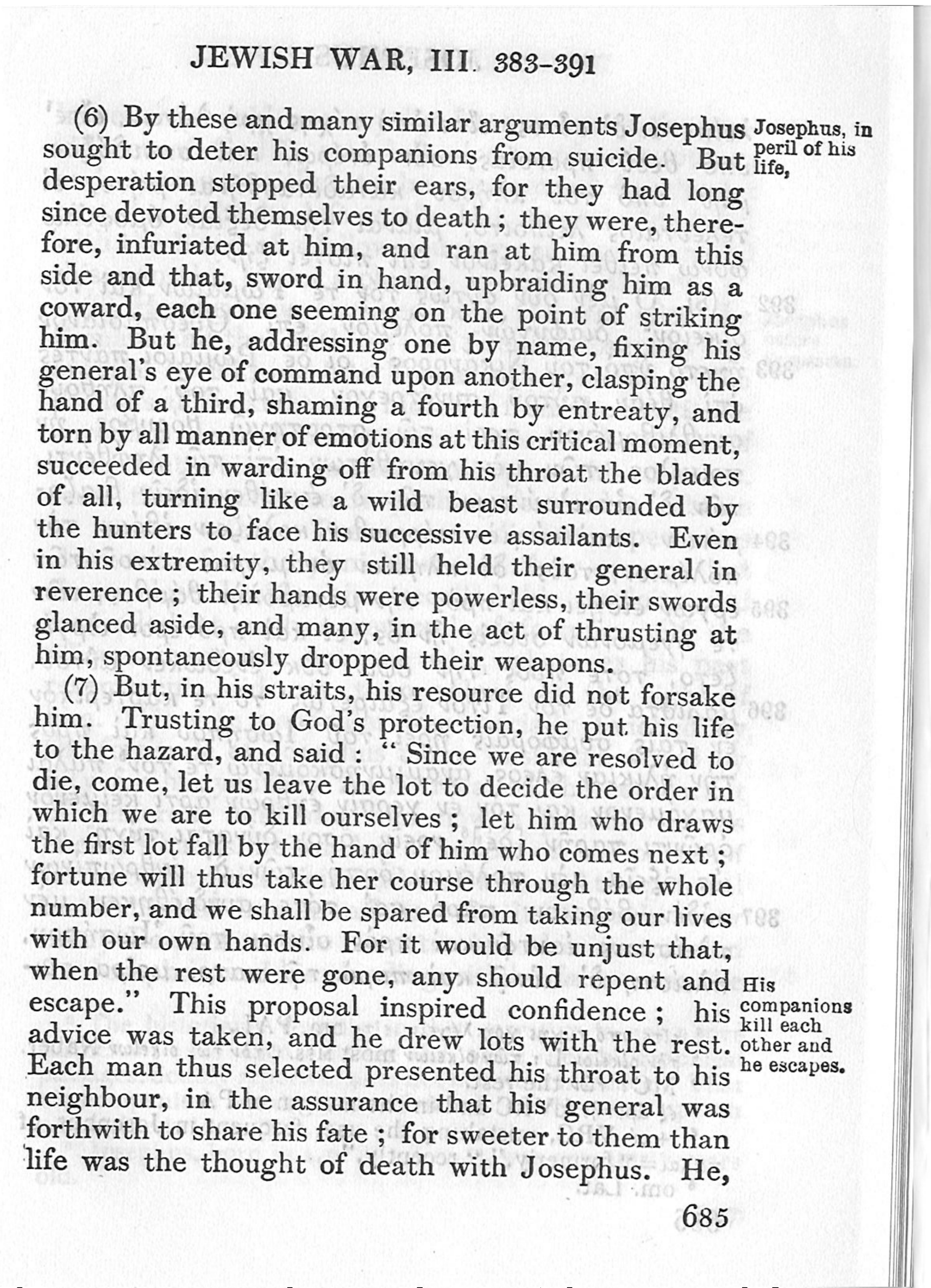


JOSEPHUS

383 (6) Ὁ μὲν οὖν Ἰώσηπος πολλὰ τοιαῦτα πρὸς
384 ἀποτροπὴν τῆς αὐτοχειρίας ἔλεγεν· οἱ δὲ πεφραγ-
μένας ἀπογνώσει τὰς ἀκοὰς ἔχοντες, ὡς ἂν πάλαι
καθοσιώσαντες ἑαυτοὺς τῷ θανάτῳ, παρωξύνοντο
πρὸς αὐτόν, καὶ προστρέχων ἄλλος ἄλλοθεν
ξιφήρεις ἐκάκιζόν τε εἰς ἀνανδρίαν καὶ ὡς ἕκαστος
385 αὐτίκα πλήξων δῆλος ἦν. ὁ δὲ τὸν μὲν ὀνομαστὶ
καλῶν, τῷ δὲ στρατηγικώτερον ἐμβλέπων, τοῦ δὲ
δρασσόμενος τῆς δεξιᾶς, ὃν δὲ δεήσει δυσωπῶν,
καὶ ποικίλοις διαιρούμενος πάθεσιν ἐπὶ τῆς ἀνάγ-
κης εἶργεν ἀπὸ τῆς σφαγῆς πάντων τὸν σίδηρον,
ὥσπερ τὰ κυκλωθέντα τῶν θηρίων ἀεὶ πρὸς τὸν
386 καθαπτόμενον ἀντιστρεφόμενος. τῶν δὲ καὶ παρὰ
τὰς ἐσχάτας συμφορὰς ἔτι τὸν στρατηγὸν αἰδου-
μένων παρελύοντο μὲν αἱ δεξιαί, περιωλίσθανεν
δὲ τὰ ξίφη, καὶ πολλοὶ τὰς ῥομφαίας ἐπιφέροντες
αὐτομάτως παρεῖσαν.[1]
387 (7) Ὁ δ' ἐν ταῖς ἀμηχανίαις οὐκ ἠπόρησεν
ἐπινοίας, ἀλλὰ πιστεύων τῷ κηδεμόνι θεῷ τὴν
388 σωτηρίαν παραβάλλεται, καὶ "ἐπεὶ δέδοκται τὸ
θνήσκειν," ἔφη, "φέρε κλήρῳ τὰς ἀλλήλων σφαγὰς
ἐπιτρέψωμεν, ὁ λαχὼν δ' ὑπὸ τοῦ μετ' αὐτὸν
389 πιπτέτω, καὶ διοδεύσει πάντων οὕτως ἡ τύχη,
μηδ' ἐπὶ τῆς ἰδίας κείσθω δεξιᾶς ἕκαστος· ἄδικον
γὰρ οἰχομένων τινὰ τῶν ἄλλων μετανοήσαντα
σωθῆναι." πιστὸς [δ'] ἔδοξεν ταῦτα εἰπὼν καὶ
390 συνεκληροῦτο πείσας. ἑτοίμην δ' ὁ λαχὼν τῷ μεθ'
αὐτὸν παρεῖχεν τὴν σφαγήν, ὡς αὐτίκα τεθνη-
ξομένου καὶ τοῦ στρατηγοῦ· ζωῆς γὰρ ἡδίω τὸν
391 μετὰ τοῦ Ἰωσήπου θάνατον ἡγοῦντο. κατα-

[1] παρείθησαν "were paralysed" MVRC.

684



JEWISH WAR, III. 383–391

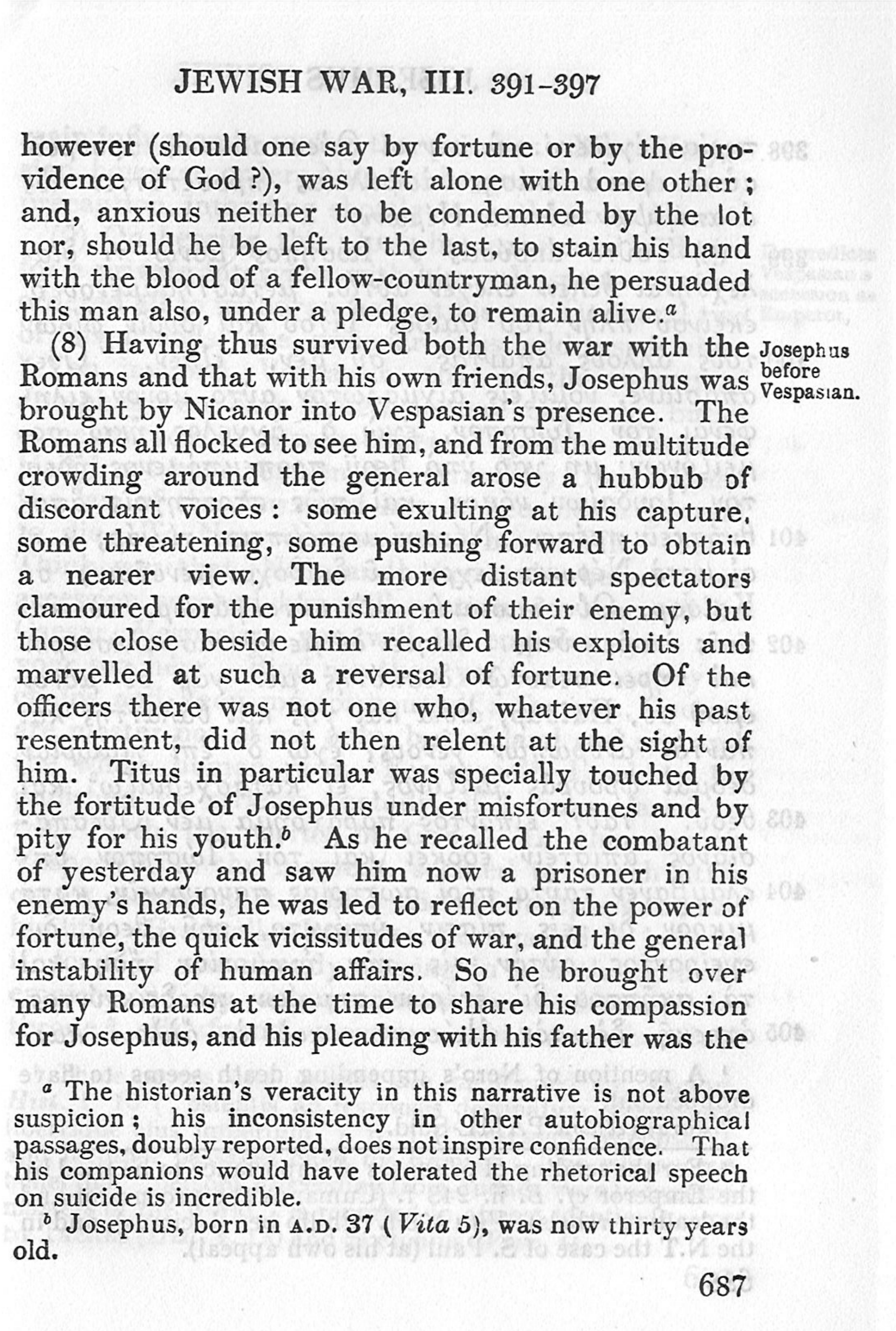
(6) By these and many similar arguments Josephus sought to deter his companions from suicide. But desperation stopped their ears, for they had long since devoted themselves to death; they were, therefore, infuriated at him, and ran at him from this side and that, sword in hand, upbraiding him as a coward, each one seeming on the point of striking him. But he, addressing one by name, fixing his general's eye of command upon another, clasping the hand of a third, shaming a fourth by entreaty, and torn by all manner of emotions at this critical moment, succeeded in warding off from his throat the blades of all, turning like a wild beast surrounded by the hunters to face his successive assailants. Even in his extremity, they still held their general in reverence; their hands were powerless, their swords glanced aside, and many, in the act of thrusting at him, spontaneously dropped their weapons.

Josephus, in peril of his life,

(7) But, in his straits, his resource did not forsake him. Trusting to God's protection, he put his life to the hazard, and said: "Since we are resolved to die, come, let us leave the lot to decide the order in which we are to kill ourselves; let him who draws the first lot fall by the hand of him who comes next; fortune will thus take her course through the whole number, and we shall be spared from taking our lives with our own hands. For it would be unjust that, when the rest were gone, any should repent and escape." This proposal inspired confidence; his advice was taken, and he drew lots with the rest. Each man thus selected presented his throat to his neighbour, in the assurance that his general was forthwith to share his fate; for sweeter to them than life was the thought of death with Josephus. He,

His companions kill each other and he escapes.

685



JEWISH WAR, III. 391–397

however (should one say by fortune or by the providence of God?), was left alone with one other; and, anxious neither to be condemned by the lot nor, should he be left to the last, to stain his hand with the blood of a fellow-countryman, he persuaded this man also, under a pledge, to remain alive.[a]

(8) Having thus survived both the war with the Romans and that with his own friends, Josephus was brought by Nicanor into Vespasian's presence. The Romans all flocked to see him, and from the multitude crowding around the general arose a hubbub of discordant voices: some exulting at his capture, some threatening, some pushing forward to obtain a nearer view. The more distant spectators clamoured for the punishment of their enemy, but those close beside him recalled his exploits and marvelled at such a reversal of fortune. Of the officers there was not one who, whatever his past resentment, did not then relent at the sight of him. Titus in particular was specially touched by the fortitude of Josephus under misfortunes and by pity for his youth.[b] As he recalled the combatant of yesterday and saw him now a prisoner in his enemy's hands, he was led to reflect on the power of fortune, the quick vicissitudes of war, and the general instability of human affairs. So he brought over many Romans at the time to share his compassion for Josephus, and his pleading with his father was the

Josephus before Vespasian.

[a] The historian's veracity in this narrative is not above suspicion; his inconsistency in other autobiographical passages, doubly reported, does not inspire confidence. That his companions would have tolerated the rhetorical speech on suicide is incredible.

[b] Josephus, born in A.D. 37 (*Vita* 5), was now thirty years old.

687

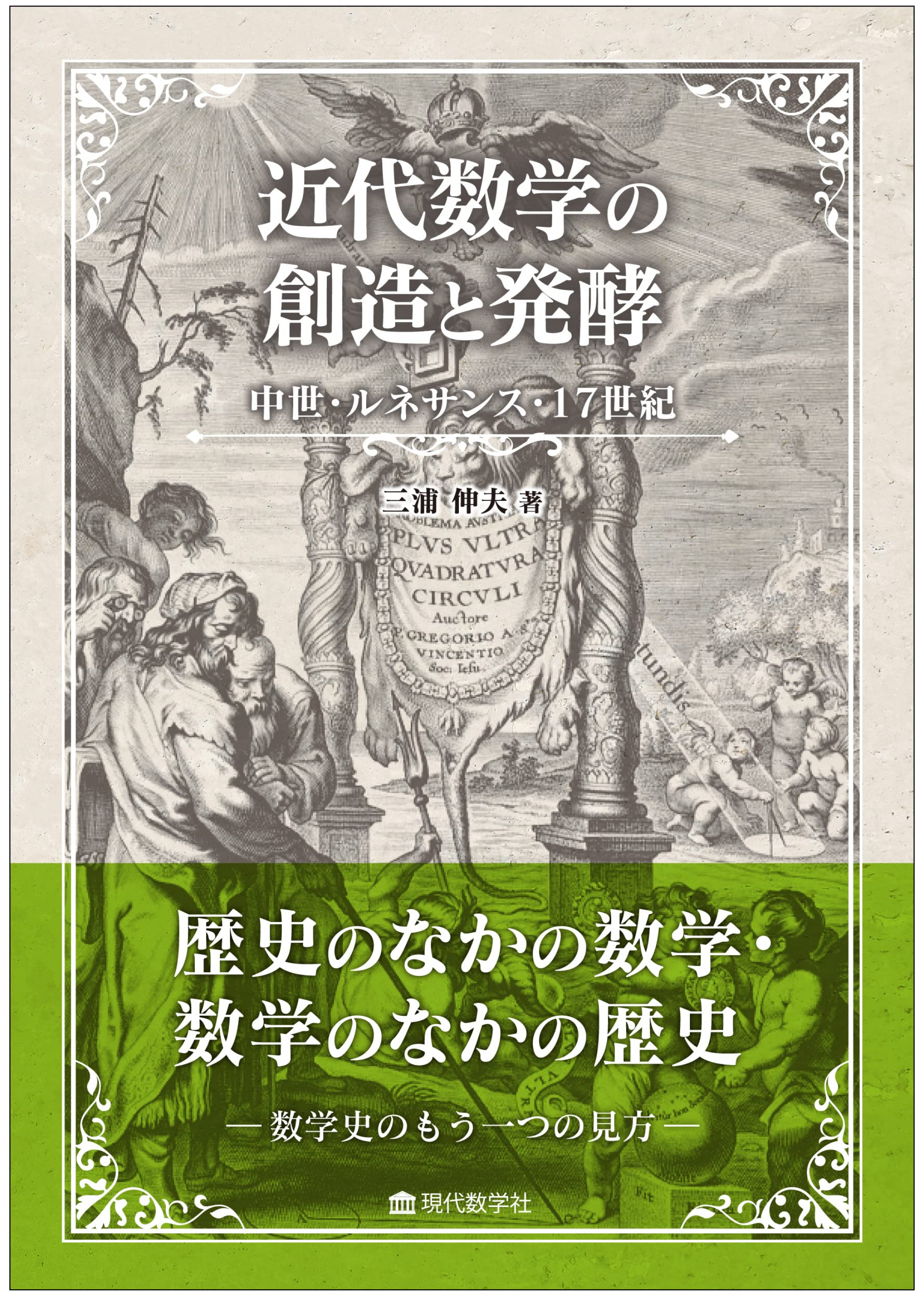
Josephus, The Jewish War

しかし、窮地に陥っても、彼(ヨセフス)の力は彼を見捨てなかった。神の加護を信頼し、彼は命を危険にさらし、こう言った。「死ぬ覚悟ができたのなら、さあ、くじに命の順番を決めさせよう。最初にくじを引いた者は、次にくじを引いた者に殺されるのだ。そうすれば、運命は全員に行き渡り、自らの手で命を絶つことはなくなるだろう。残りの者がいなくなった後、誰かが後悔して逃げおおせるのは不公平だ。」この提案は人々に信頼をもたらした。彼の助言は受け入れられ、彼は残りの者とくじを引いた。こうして選ばれた者は皆、自分の将軍がすぐに自分の運命を共にするであろうという確信のもと、隣の者に自分の首を差し出した。ヨセフスと共に死ぬという考えは、彼らにとって生きることよりも甘美だった。しかし、彼は(幸運と言うべきか、神の摂理と言うべきか？)、ただ一人残された。運命に縛られることも、最後まで同胞の血で手を汚すこともしたくなかった彼は、この男にも誓約を交わして生き残るよう説得した。

ヨセフス問題を扱った西洋の書

表 2: ヨセフス問題の設定の例．三浦 [14] を参考に作成．n は総人数，m は脱数（何人おきに取り除くか），C/J/T/M はキリスト教徒，ユダヤ人，トルコ人，イスラム教徒を示す．「C15+J15」はキリスト教徒 15 人とユダヤ人 15 人がいるとき，キリスト教徒のみ残る問題，という意味．

		n	m
1150 頃	エズラ (Rabbi Abraham ben Ezra, 1546 年出版)	学生 15+ 怠け者 15	9
1363	サファディ (Salah al-Din al-Safadi)	M15+C15	9
15c	カランドリ (Filippo Calandri)	C15+J15	
1465 頃	フィレンツェ (Benedetto da Firenze)	C15+J15	9
1484 頃	シュケ (Nicolas Chuquet)	C15+J15	9
1485 頃	カランドリ	修道士 15+15	9
1500 頃	パチョーリ (Luca Pacioli)	C2+J30	9
1500 頃	パチョーリ	C2+J18	7
1500 頃	パチョーリ	C2+J30	7
1500 頃	パチョーリ	C15+J15	9
1539	カルダーノ (Gerolamo Cardano)	黒 + 白	
1556	タルターリャ (Niccolo Fontana Tartaglia)	C+T, 黒 + 白	
1559	ブテオ (Johannes Buteo)	C15+J15	10
1612	バシェ (Claude-Gasper Bachet)	C15+T15	
1624	エッテン (Hendrik van Etten)	C15+T15	9
1678	ヴィンゲイト (Edmund Wingate)	C15+T15	
1725	オザナム (Jacques Ozanam)	C15+T15	9



ヨセフス問題

15人のキリスト教徒と15人のトルコ人が同じ船で航海していた. 激しい嵐に遭遇したため, 水先案内人は船に乗っていた人々の半分を海に投げ込み, 残りの人々を救う必要があると言った. これは力ずくでしかできない. そこで, 全員を順番に配置し, 9ずつ数えて9人目を海に投げ込むことで合意した.
30人のうち15人だけが残るようにする. キリスト教徒を一人も失うことなくトルコ人を全員投げ込むにはどのように並べるべきか.

Claude-Gasper Bachet (1581-1638) による『Problemes plaisants et d'electables qui se font par les nombres. 2nd ed.』(1624)

15 + 15 人の 9 脱であり，取り除かれる順は，

$$E_i^{(30,9)} = \{23, 20, 28, 24, 14, 4, 7, 12, 1, 19, 16, 10, 26, 27, 25, 5, 18, 2, 8, 29, 30, 13, 15, 11, 22, 6, 3, 21, 17, 9\}$$

となるから，トルコ人を●，キリスト教徒を○とすれば，

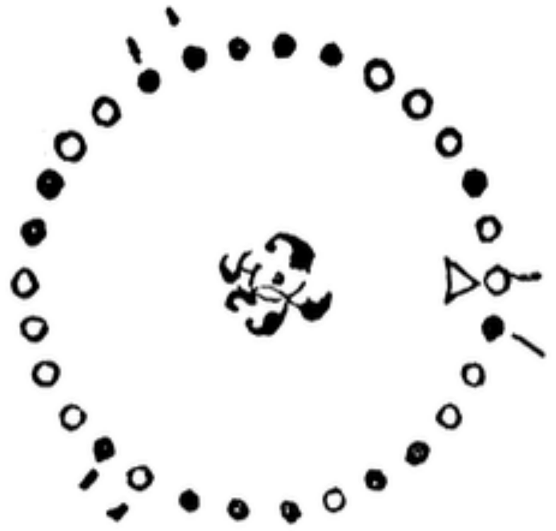
○○○○●●●●●○○●○○○●○●●○○●●●○●●○○● となり，並べ順は $\{4, 5, 2, 1, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 1\}$ となる[9].

母音a,e,i,o,u をそれぞれ1,2,3,4,5 と対応させて,
“From numbers' aid and art, never will fame depart” （数の助けと技術によって名誉は去らない）.
4 5 2 1 3 1 1 2 2 3 1 2 2 1

D.E. Smith, History of Math. Vol.2 (1925)

THE TURKS AND CHRISTIANS 541

The agricultural interests changed the problem to that of a mill with four "Gewercken,"[1] and other interests continued to modify it further until, as is usually the case, the style of problem has tended to fall from its own absurdity. Its varied history may be closed by referring to a writer of the early 19th century,[2] moved by a bigotry which would hardly be countenanced today, who proposed to substitute a problem relating to priests praying for souls in purgatory.



THE TURKS AND CHRISTIANS

From Buteo's *Logistica*, Lyons, 1559 (1560 ed., p. 304). The problem begins: "In naui vectores quindecim Christiani totidē; Iudei, suborta tēpestate magna"

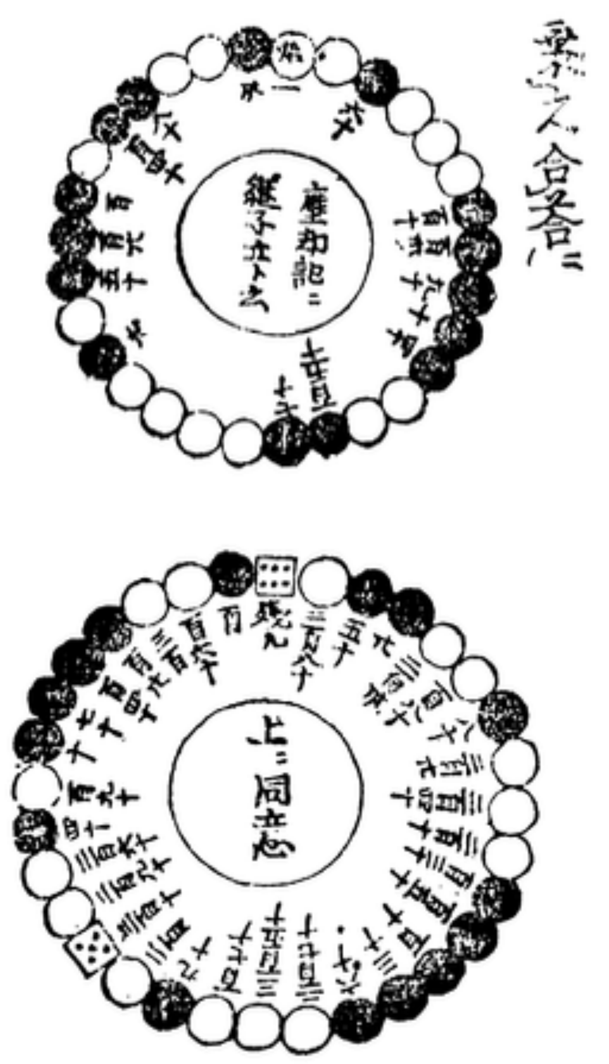
Turks and Christians. There is a well-known problem which relates that fifteen Turks and fifteen Christians were on a ship which was in danger, and that half had to be sacrificed. It being necessary to choose the victims by lot, the question arose as to how they could be arranged in a circle so that, in counting round, every fifteenth one should be a Turk.

It is probable that the problem goes back to the custom of *decimatio* in the old Roman armies,[3] the selection by lot of every tenth man when a company had been guilty of cowardice, mutiny, or loss of standards in action. Both Livy (II, 59) and Dionysius (IX, 50) speak of it in the case of the mutinous army of the consul Appius Claudius (471 B.C.), and Dionysius further speaks of it as a general custom. Polybius (VI, 38) says that it was a usual punishment when troops had given way to

[1] "Ein Mülmeister hat ein Müle mit vier Gewercken/ Mit dem ersten mehlt er in 23 stūden 35 Scheffel/Mit dem andern 39 Scheffel/ Mit dem dritten 46 Scheffel/Vnnd mit dem vierten 52 Scheffel," etc. The question then is, How long it will take them together to grind 19 Wispel (1 Wispel = 24 Scheffel) (*ibid.*).
[2] R. Hay, *The Beauties of Arithmetic*, p. 218 (1816).
[3] E. Lucas, *Arithmétique Amusante*, p. 17 (Paris, 1895).

542 TYPICAL PROBLEMS

panic. The custom seems to have died out for a time, for when Crassus resorted to decimation in the war of Spartacus he is described by Plutarch (*Crassus*, 10) as having revived an ancient punishment. It was extensively used in the civil wars and was retained under the Empire, sometimes as *vicesimatio* (every twentieth man being taken), and sometimes as *centesimatio* (every hundredth man).



THE JOSEPHUS PROBLEM IN JAPAN

From Muramatsu Kudayū Mosei's *Mantoku Jinkō-ri* (1665)

Now it is very improbable that those in charge of the selection would fail to have certain favorites, and hence it is natural that there may have grown up a scheme of selection that would save the latter from death. Such customs may depart, but their influence remains.

In its semimathematical form the problem is first referred to in the work of an unknown author, possibly Ambrose of Milan (*c.* 370), who wrote, under the nom de plume of Hegesippus, a work *De bello iudaico*.[1] In this work he refers to the fact that Josephus was saved on the occasion of a choice of this kind.[2] Indeed, Josephus himself refers to the matter of his being saved by lucky chance or by the act of God.[3]

[1] Edited by C. F. Weber and J. Caesar, Marburg, 1864. See W. Ahrens, *Math. Unterhaltungen und Spiele*, p. 286 (Leipzig, 1901; 2d ed., 1918).
[2] "Itaque accidit ut interemtis reliquis Iosephus cum altero superesset neci" (quoted from Ahrens, *loc. cit.*).
[3] Καταλείπεται δὲ οὗτος, εἴτε ὑπὸ τύχης χρὴ λέγειν εἴτε ὑπὸ Θεοῦ προνοίας, σὺν ἑτέρῳ.

THE JOSEPHUS PROBLEM 543

The oldest European trace of the problem, aside from that of Hegesippus, is found in a manuscript of the beginning of the 10th century. It is also referred to in a manuscript of the 11th century and in one of the 12th century. It is given in

THE JOSEPHUS PROBLEM IN JAPAN

From Miyake Kenryū's *Shojutsu Sangaku Zuye* (1795 ed.), showing the problem of the stepmother, referred to on page 544

the *Ta'hbula of Rabbi ben Ezra* (*c.* 1140), and indeed it is to this writer that Elias Levita, who seems first to have given it in printed form (1518), attributes its authorship.

The problem, as it came to be stated, related that Josephus, at the time of the sack of the city of Jotapata by Vespasian, hid himself with forty other Jews in a cellar. It becoming necessary to sacrifice most of the number, a method analogous to the old Roman method of *decimatio* was adopted, but in such a way as to preserve himself and a special friend. It is

544 TYPICAL PROBLEMS

on this account that German writers still call the ancient puzzle by the name of Josephsspiel.

Chuquet (1484) mentions the problem, as does at least one other writer of the 15th century.[1] When, however, printed works on algebra and higher arithmetic began to appear, it became well known. The fact that such writers as Cardan[2] and Ramus[3] gave it prominence was enough to assure its coming to the attention of scholars.[4]

Like so many curious problems, this one found its way to the Far East, appearing in the Japanese books as relating to a stepmother's selection of the children to be disinherited. With characteristic Japanese humor, however, the woman was described as making an error in her calculations, so that her own children were disinherited and her stepchildren received the estate.

Testament Problem. There is a well-known problem which relates that a man about to die made a will bequeathing $\frac{1}{3}$ of his estate to his widow in case an expected child was a son, the son to have $\frac{2}{3}$; and $\frac{2}{3}$ to the widow if the child was a daughter, the daughter to have $\frac{1}{3}$. The issue was twins, one a boy and the other a girl, and the question arose as to the division of the estate.

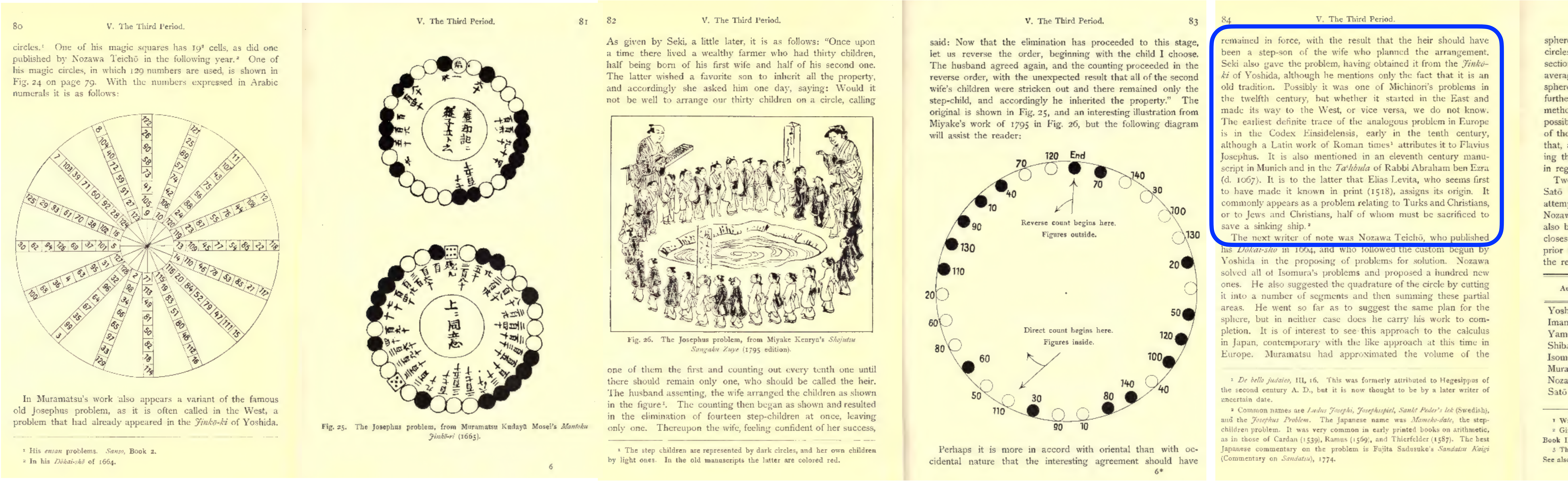
The problem in itself is of no particular interest, being legal rather than mathematical, but it is worthy of mention because it is a type and has an extended history. Under both the Roman and the Oriental influence these inheritance problems played a very important rôle in such parts of analysis as the ancients had developed. In the year 40 B.C. the *lex Falcidia* required at least $\frac{1}{4}$ of an estate to go to the legal heir. If more than $\frac{3}{4}$ was otherwise disposed of, this had to be reduced by the rules of partnership. Problems involving this "Falcidian

[1] Anonymous MS. in Munich. See *Bibl. Math.*, VII (2), 32; Curtze, *ibid.*, VIII (2), 116; IX (2), 34; *Abhandlungen*, III, 123.
[2] In his *Practica* of 1539.
[3] See his edition of 1569, p. 125.
[4] It is also in Thierfelder's arithmetic (1587, p. 354), in Wynant van Westen's *Mathemat. Vermaecklyckh* (1644 ed., I, 16), in Wilkens's arithmetic of 1669 (p. 395), and in many other early works.

おそらく ミラノ司教のアンブロジウス (370年頃)がJosephusの問題を設定した.
その後, 文献として見つかるのは, Rabbi ben Ezra (1140頃→1518出版)
Chuquet (1484)

日本での設定にも触れているが, 母親のミスとして話を紹介している

D.E. Smith & Y.Mikami, A History of Japanese Math.(1914)



村松重清『算俎』をベースにJosephus problemを紹介.（ちょっと違う話になっているが, . . . ）

12世紀の藤原みちのり, 藤田貞資『算脱解義』
10世紀にCodex Einidelensis, 11世紀にRabbi Abraham Ben Ezra
ほか, Cardan, Ramus, Thierfelder の名前が登場.

whether it started in the East and made its way to the West,
or vice verse, we do not know.

オイラー 再帰的方法

L. Euler, Observationes circa novum et singulare progressionum genus. Euler Archive -- All Works. 476, 1776.

『新しく発見された特異な数列』

123

OBSERVATIONES
CIRCA NOVVM ET SINGVLARE
PROGRESSIONVM
GENVS.

Auctore
L. EVLERO.

1.

Inter res saepenumero, quae attentione nostra haud dignae videantur, obseruantur quaedam, quae satis profundam inuestigationem requirunt, ac non parum sublimibus speculationibus occasionem praebent. Quod cum plurimis exemplis confirmari possit, tum nuper etiam ipse sum expertus, dum quaestionem illam tyronibus notissimam, attentius contemplarem, qua quindecim Christiani totidemque Iudaei ita ordine sunt collocandi, vt si, numerandi initio in dato loco sumto, nonus quisque vel decimus in mare sit eiiciendus, haec poena in solos Iudaeos sit casura. Quae quaestio etiamsi in se nihil habeat difficultatis, tamen mox vidi, si in genere de hominum numero quocunque, ex quibus non nonus sed secundum alium quemuis numerum quotusquisque sit eiiciendus, proponatur, difficillimum fore, ordinem eorum, qui continuo eiicientur, assignare. Neque adeo methodus constat hoc in ge-

Q 2 nere

124 NOVVM

nere praestandi, tametsi quouis casu oblato, dum numeratio actu instituitur, solutio facillime obtinetur. Ex hoc genere haud parum curiosa mihi videtur quaestio, si v. gr. ex plurium hominum numero is solus sit supplicio afficiendus, qui, postquam nonus quisque vel secundum alium numerum ex ordine fuerit exemtus, tandem vltimo solus sit remansurus; hic scilicet maxime intererit, ante nosse illum fatalem locum, in quo numeratio illa vltimo terminabitur.

2. Quo omnia quae hic inuestiganda occurrunt, clarius perspiciantur, casum illum perpendamus, quo ex serie 30 notarum nona quaeque expungitur, quod negotium numeratione actu instituta ita commodissime repraesentatur:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
23	20	28	24	14	4	7	12	1	19	16	10	26	27	25	5	18	2	8	29	30	13	15	11	22	6	3	21	17	9

Hic superiores numeri indicant, quoto loco a primo computando quaeque nota sit posita; inferiores vero numeri ostendunt, quando quaeque eiciatur, dum scilicet continuo nona quaeque expungitur. Ita patet, primo nonam, secundo decimam octauam, tertio vicesimam septimam, quarto sextam, quinto decimam sextam et ita porro expungi, donec vltimo delenda supersit sola vicesima prima, qui adeo foret locus ille fatalis ante memoratus. Si indices eiectorum ordine disponantur, indicesque notarum subscribantur, haec series prodibit.

Indices

PROGRESSIONVM GENVS. 125

Indices eiectionis

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28
9, 18, 27, 6, 16, 26, 7, 19, 30, 12, 24, 8, 22, 5, 23, 11, 29, 17, 10, 2, 28, 25, 1, 4, 15, 13, 14, 3

Indices naturales.

Hanc postremam seriem vocabo *seriem eiectionis*, quia ea indicat, quota nota eiiciatur primo, secundo, tertio etc. Ita scilicet primo eiicitur nota 9^{na}, secundo 18^{va}, tertio 27^{ma}, quarto 6^{ta}, quinto 16^{ta} et ita porro, donec vltimo trigesimo nempe loco eiiciatur nota vicesima prima. Vbi quidem meminisse oportet, postquam numerando in serie notarum ad finem fuerit peruentum, numerationem iterum ab initio continuari; ex quo intelligitur, notam trigesimam primam conuenire cum prima, et si cuiusque notae index fuerit n, eidem quoque indices $n + 30$, $n + 60$, $n + 90$ etc. conuenire sunt censendi.

3. Si hanc seriem eiectionis consideremus, vix vllum ordinem in ea deprehendere licet; tres quidem primi termini 9, 18, 27 secundum differentiam 9 ascendunt; et quartus quoque 6, quia cum 36 conuenit, eandem legem sequitur. Quintus autem, qui est 16 vel 46, denario praecedentem superat, quia in numerando iam vnus scilicet 9 seu 39 est deletus, ideoque non numeratur. Ob eandem rationem a termino quinto 16 ad sextum 26 etiam 10, at a sexto 26 ad septimum 7 seu 37 iam 11 numerantur; sicque saltus continuo fiunt maiores, quia plures notae iam deletae transiliuntur; quod operationem actu instituendo sponte elucet, etiamsi

Q 3 ordi-

126 NOVVM

ordinem harum differentiarum auctarum vix assignare liceat; generatim certe hic nihil omnino definiri posse videtur. Circa finem autem imprimis haec series eiectionis ita fit irregularis, vt nulli prorsus legi adstricta videatur. Eum in finem autem hanc seriem hic exposui, quo clarius omnes difficultates, quibus perscrutatio eius impeditur, perspiciantur, haecque ipsa series ex ludicro principio enata attentione nostra non indigna videatur.

4. Haec autem series eiectionis specialis duabus rebus determinatur, quarum altera in numero notarum, qui est 30, altera vero numeratore, qui est 9 continetur. Quocirca in genere quaestio huc redit: vt dato notarum numero vna cum numeratore ipsa series eiectionis exhibeatur, cuius solutionem cum in genere sperare nequeamus, in casibus particularibus attentionem nostram exerceri conueniet, num forte legem quampiam detegere videamus. Ac primo quidem patet, si numerator fuerit vnitas, seriem eiectionis ipsam fore seriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4 etc. quoniam enim primus quisque eiicitur, primo loco primus terminus, secundo secundus, tertio tertius et ita porro eiicitur, ita vt vltima nota simul sit terminorum eiectorum vltimus.

5. Sit igitur numerator $= 2$, ita vt secundus quisque eiiciatur, seu eiectio secundum alternos instituatur, ac pro notarum numero series eiectionis ita se habere deprehenduntur:

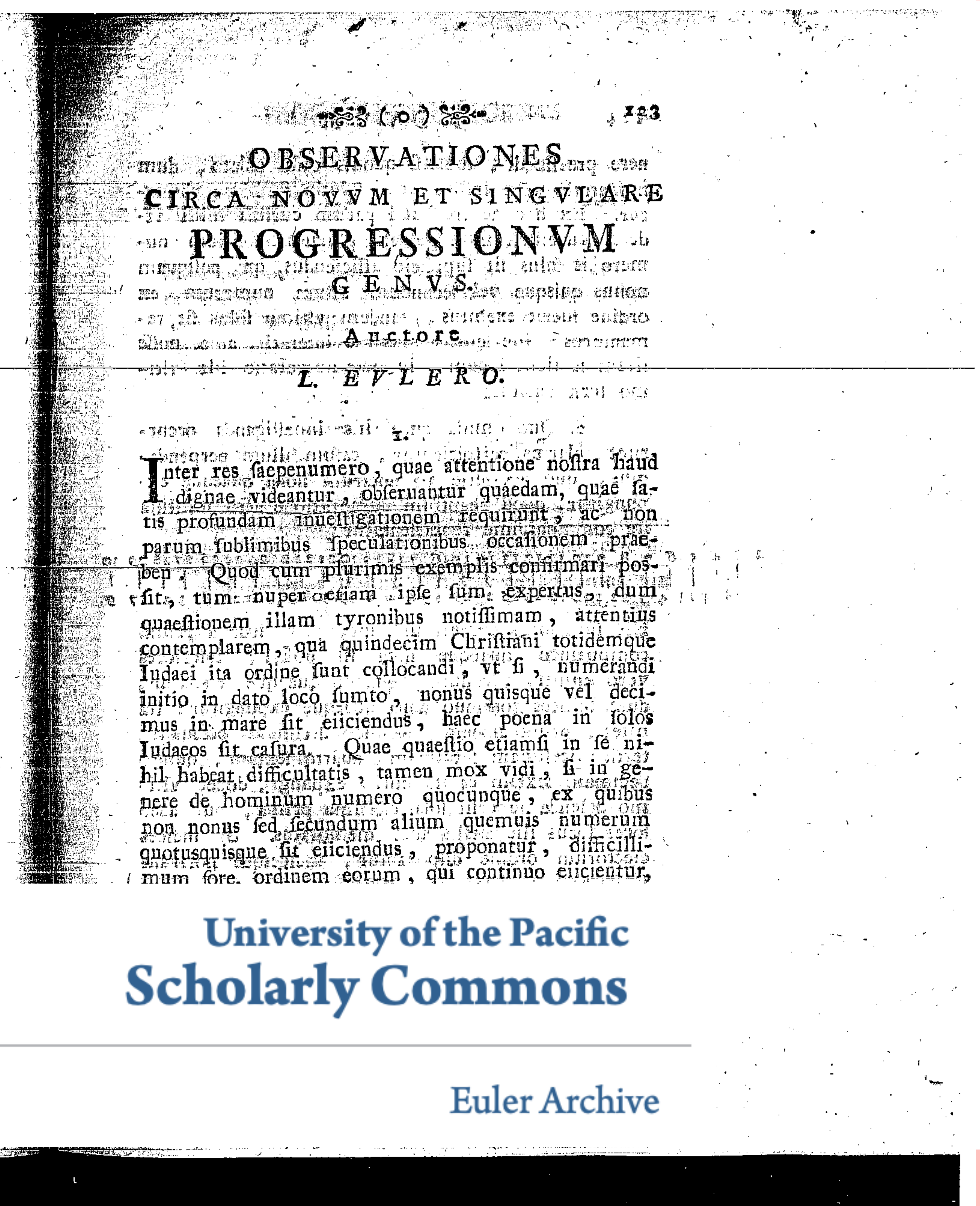
numerus

University of the Pacific
Scholarly Commons

Euler Archive

オイラー　再帰的方法

L. Euler, Observationes circa novum et singulare progressionum genus. Euler Archive -- All Works. 476, 1776.


(o) 123

OBSERVATIONES
CIRCA NOVVM ET SINGVLARE
PROGRESSIONVM
GENVS.
Auctore
L. EVLERO.

1.

Inter res ſaepenumero, quae attentione noſtra haud dignae videantur, obſeruantur quaedam, quae ſatis profundam inueſtigationem requirunt, ac non parum ſublimibus ſpeculationibus occaſionem praebent. Quod cum plurimis exemplis confirmari poſſit, tum nuper etiam ipſe ſum expertus, dum quaeſtionem illam tyronibus notiſſimam, attentius contemplarem, qua quindecim Chriſtiani totidemque Iudaei ita ordine ſunt collocandi, vt ſi, numerandi initio in dato loco ſumto, nonus quisque vel decimus in mare ſit eiiciendus, haec poena in ſolos Iudaeos ſit caſura. Quae quaeſtio etiamſi in ſe nihil habeat difficultatis, tamen mox vidi, ſi in genere de hominum numero quocunque, ex quibus non nonus ſed ſecundum alium quemuis numerum quotusquisque ſit eiiciendus, proponatur, difficillimum fore ordinem eorum, qui continuo eiicientur,

『新しく発見された特異な数列』

我々が注意を払うには値しないと思える多くの事柄の中には徹底的な調査を必要とし, 単なる憶測に頼る余地のない事柄もいくつかある. これは多くの例で裏付けられる. 私自身も最近若者たちに教えたある問題についてより注意深く考えていたときに, このことを経験した.
それは, 15人のキリスト教徒と同数のユダヤ人をある順番に配置するというものだ. 数え始めて, 9人目か10人目ごとに海に投げ込むとユダヤ人だけに罰が下される. この問題自体には難しい点はないが, 全部で何人の人がいるのか, そして9人目ではなくある特定の順ごとに引き出すことを考えると, 非常に難しいだろうとすぐに分かる.
（Google 翻訳）

オイラー　再帰的方法

L. Euler, Observationes circa novum et singulare progressionum genus. Euler Archive -- All Works. 476, 1776.

numerus notarum	ſeries eiectionis pro numeratore 2
1	1
2	2, 1
3	2, 1, 3
4	2, 4, 3, 1
5	2, 4, 1, 5, 3
6	2, 4, 6, 3, 1, 5
7	2, 4, 6, 1, 5, 3, 7
8	2, 4, 6, 8, 3, 7, 5, 1
9	2, 4, 6, 8, 1, 5, 9, 7, 3
10	2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, 5
11	2, 4, 6, 8, 10, 1, 5, 9, 3, 11, 7
12	2, 4, 6, 8, 10, 12, 3, 7, 11, 5, 1, 9
13	2, 4, 6, 8, 10, 12, 1, 5, 9, 13, 7, 3, 11
14	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 3, 7, 11, 1, 9, 5, 13
15	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 1, 5, 9, 13, 3, 11, 7, 15
16	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 3, 7, 11, 15, 5, 13, 9, 1.

Hoc ſchema inſpicienti facile erit pluribus modis ordinem quendam obſeruare. Vltimi ſcilicet termini manifeſto tenent progreſſionem arithmeticam binario creſcentem, dummodo termini qui numerum notarum eſſent ſuperaturi, infra eum deprimantur, numero ſcilicet notarum inde detracto. Ita cum primo habeatur 1, pro ſecunda ſerie vltimus, qui foret 3, binario ſubtracto ad vnitatem reducitur; hunc ſequitur 3, et ſequens 5 numerum notarum vnitate ſuperans ad vnitatem reducitur, et ita porro. Simili lege progrediuntur termini penultimi, tum vero etiam antepenultimi, atque adeo omnes ab

ab vltimis aequidiſtantes. Quoniam igitur omnes rectae obliquae ei, quae per terminos vltimos tranſit parallelae, per huiusmodi progreſſiones arithmeticas pro numero notarum mutilatas tranſeunt, hinc iſtae ſeries quousque lubuerit facile continuantur.

6. Exponamus ſimili modo ſeries eiectionis pro numeratore $= 3$, ac lex progreſſionis multo magis abſcondita prodibit

numerus notarum	ſeries eiectionis pro numeratore 3
1	1
2	1, 2
3	3, 1, 2
4	3, 2, 4, 1
5	3, 1, 5, 2, 4
6	3, 6, 4, 2, 5, 1
7	3, 6, 2, 7, 5, 1, 4
8	3, 6, 1, 5, 2, 8, 4, 7
9	3, 6, 9, 4, 8, 5, 2, 7, 1
10	3, 6, 9, 2, 7, 1, 8, 5, 10, 4
11	3, 6, 9, 1, 5, 10, 4, 11, 8, 2, 7
12	3, 6, 9, 12, 4, 8, 1, 7, 2, 11, 5, 10
13	3, 6, 9, 12, 2, 7, 11, 4, 10, 5, 1, 8, 13
14	3, 6, 9, 12, 1, 5, 10, 14, 7, 13, 8, 4, 11, 2
15	3, 6, 9, 12, 15, 4, 8, 13, 2, 10, 1, 11, 7, 14, 5
16	3, 6, 9, 12, 15, 2, 7, 11, 16, 5, 13, 4, 14, 10, 1, 8.

etc.

Interim tamen etſi ſecundum lineas horizontales et verticales ordo magis eſt abſtruſus, tamen in vltimis iterum progreſſio arithmetica ſe prodit ſecundum ternarium creſcens; haecque eadem lex quoque in penultimis et antepenultimis vt ante deprehenditur, ex quo et has ſeries facillime continuare licet.

7. Circa hanc legem in terminis vltimis locum habentem dubitare amplius non poterimus, dum ea adhuc pro numeratore 4 obſeruetur. Pari ergo modo ſeries eiectionis inde erectas repraeſentemus

numerus notarum	ſeries eiectionis pro numeratore 4
1	1
2	2, 1
3	1, 3, 2
4	4, 1, 3, 2
5	4, 3, 5, 2, 1
6	4, 2, 1, 3, 6, 5
7	4, 1, 6, 5, 7, 3, 2
8	4, 8, 5, 2, 1, 3, 7, 6
9	4, 8, 3, 9, 6, 5, 7, 2, 1
10	4, 8, 2, 7, 3, 10, 9, 1, 6, 5
11	4, 8, 1, 6, 11, 7, 3, 2, 5, 10, 9
12	4, 8, 12, 5, 10, 3, 11, 7, 6, 9, 2, 1
13	4, 8, 12, 3, 9, 1, 7, 2, 11, 10, 13, 6, 5
14	4, 8, 12, 2, 7, 13, 5, 11, 6, 1, 14, 3, 10, 9
15	4, 8, 12, 1, 6, 11, 2, 9, 15, 10, 5, 3, 7, 14, 13
16	4, 8, 12, 16, 5, 10, 15, 6, 13, 3, 14, 9, 7, 11, 2, 1

etc.

Hinc ergo lex illa in feriebus oblique deſcendentibus prorſus

prorſus confirmatur, quae ſcilicet hic ſunt arithmeticae quaternario creſcentes, dum termini numerum noſtrum ſuperantes infra eum deprimuntur. In ſeriebus autem horizontalibus et verticalibus ordo fit continuo intricatior. Quin etiam ipſa rei natura in ſeriebus horizontalibus nullam progreſſionis legem patitur, propterea quod eae, cum omnes numeros notarum numero non maiores fuerint complexae, vlteriori continuationi aduerſantur, ita vt continuatio tanquam imaginaria ſit ſpectanda.

8. En ergo inſignem legem, cuius ope pro quouis numeratore et notarum numero, nota vltimo eiicienda aſſignari poteſt. Exiſtente ſcilicet numeratore $= n$, ſi pro notarum numero ν vltima eiicienda ſit z, ſeu indici z reſpondeat, tum pro numero notarum $\nu + 1$, vltima eiicienda erit $z + n$, ſiquidem non ſit $z + n > \nu + 1$; at ſi $z + n > \nu + 1$, vltima erit $z + n - \nu - 1$ vel $z + n - 2(\nu + 1)$ vel $z + n - 3(\nu + 1)$, vel generatim diuidendo $z + n$ per $\nu + 1$, reſiduum ex diuiſione relictum dabit indicem vltimae notae eiiciendae. Vbi notetur, ſi diuiſio nihil relinquat, tum pro reſiduo o ſcribi notarum numerum $\nu + 1$. Cum ergo pro numero notarum n cognita fuerit vltimo eiecta, pro omnibus notarum numeris maioribus vltimo eiecta facile per hanc regulam aſſignabitur. Perpetuo autem ſi vnica fuerit nota, eadem quoque erit vltimo eiecta, ſeu ſi fuerit $\nu = 1$, erit $z = 1$, vnde ſequentes omnes ſine vllo negotio reperiuntur. Quae regula eo magis eſt notatu digna, quod ſine eiectionis ordine

オイラー　再帰的方法

L. Euler, Observationes circa novum et singulare progressionum genus. Euler Archive -- All Works. 476, 1776.

numerus notarum	ſeries eiectionis pro numeratore 2
1	1
2	2, 1
3	2, 1, 3
4	2, 4, 3, 1
5	2, 4, 1, 5, 3
6	2, 4, 6, 3, 1, 5
7	2, 4, 6, 1, 5, 3, 7
8	2, 4, 6, 8, 3, 7, 5, 1
9	2, 4, 6, 8, 1, 5, 9, 7, 3
10	2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, 5
11	2, 4, 6, 8, 10, 1, 5, 9, 3, 11, 7
12	2, 4, 6, 8, 10, 12, 3, 7, 11, 5, 1, 9
13	2, 4, 6, 8, 10, 12, 1, 5, 9, 13, 7, 3, 11
14	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 3, 7, 11, 1, 9, 5, 13
15	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 1, 5, 9, 13, 3, 11, 7, 15
16	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 3, 7, 11, 15, 5, 13, 9, 1.

n人を円形にならべ, 2脱していくとき, 取り除かれる順は？

numerus notarum	ſeries eiectionis pro numeratore 3
1	1
2	1, 2
3	3, 1, 2
4	3, 2, 4, 1
5	3, 1, 5, 2, 4
6	3, 6, 4, 2, 5, 1
7	3, 6, 2, 7, 5, 1, 4
8	3, 6, 1, 5, 2, 8, 4, 7
9	3, 6, 9, 4, 8, 5, 2, 7, 1
10	3, 6, 9, 2, 7, 1, 8, 5, 10, 4
11	3, 6, 9, 1, 5, 10, 4, 11, 8, 2, 7
12	3, 6, 9, 12, 4, 8, 1, 7, 2, 11, 5, 10
13	3, 6, 9, 12, 2, 7, 11, 4, 10, 5, 1, 8, 13
14	3, 6, 9, 12, 1, 5, 10, 14, 7, 13, 8, 4, 11, 2
15	3, 6, 9, 12, 15, 4, 8, 13, 2, 10, 1, 11, 7, 14, 5
16	3, 6, 9, 12, 15, 2, 7, 11, 16, 5, 13, 4, 14, 10, 1, 8.

n人を円形にならべ, 3脱していくとき, 取り除かれる順は？

最後が1になる場合が, 継子立て設定(算脱之法)になる.

オイラー　再帰的方法

L. Euler, Observationes circa novum et singulare progressionum genus. Euler Archive -- All Works. 476, 1776.

numerus notarum	ſeries eiectionis pro numeratore 4
1	1
2	2, 1
3	1, 3, 2
4	4, 1, 3, 2
5	4, 3, 5, 2, 1
6	4, 2, 1, 3, 6, 5
7	4, 1, 6, 5, 7, 3, 2
8	4, 8, 5, 2, 1, 3, 7, 6
9	4, 8, 3, 9, 6, 5, 7, 2, 1
10	4, 8, 2, 7, 3, 10, 9, 1, 6, 5
11	4, 8, 1, 6, 11, 7, 3, 2, 5, 10, 9
12	4, 8, 12, 5, 10, 3, 11, 7, 6, 9, 2, 1
13	4, 8, 12, 3, 9, 1, 7, 2, 11, 10, 13, 6, 5
14	4, 8, 12, 2, 7, 13, 5, 11, 6, 1, 14, 3, 10, 9
15	4, 8, 12, 1, 6, 11, 2, 9, 15, 10, 5, 3, 7, 14, 13
16	4, 8, 12, 16, 5, 10, 15, 6, 13, 3, 14, 9, 7, 11, 2, 1
	etc.

8. En ergo inſignem legem, cuius ope pro quouis numeratore et notarum numero, nota vltimo eiicienda aſſignari poteſt. Exiſtente ſcilicet numeratore $= n$, ſi pro notarum numero ν vltima eiicienda ſit z, ſeu indici z reſpondeat, tum pro numero notarum $\nu + 1$; vltima eiicienda erit $z + n$, ſiquidem non ſit $z + n > \nu + 1$; at ſi $z + n > \nu + 1$, vltima erit $z + n - \nu - 1$ vel $z + n - 2(\nu + 1)$ vel $z + n - 3(\nu + 1)$, vel generatim diuidendo $z + n$ per $\nu + 1$, reſiduum ex diuiſione relictum dabit indicem vltimae notae eiiciendae. Vbi notetur, ſi diuiſio nihil relinquat, tum pro reſiduo o ſcribi notarum numerum $\nu + 1$. Cum ergo pro numero notarum n cognita fuerit vltimo eiecta, pro omnibus notarum numeris maioribus vltimo eiecta facile per hanc regulam aſſignabitur. Perpetuo autem ſi vnica fuerit nota, eadem quoque erit vltimo eiecta, ſeu ſi fuerit $\nu = 1$, erit $z = 1$, vnde ſequentes omnes ſine vllo negotio reperiuntur. Quae regula eo magis eſt notatu digna, quod ſine eiectionis or-

n人を円形にならべ, 4脱していくとき, 取り除かれる順は？

最後が1になる場合が, 継子立て設定(算脱之法)になる.

最後に残る人 (survivor) を $J_m(n)$ とする

$J_m(n) = p$ とする.

$$J_m(n+1) = \begin{cases} p+m, & \text{if } p+m \leq n+1 \\ p+m-(n+1), & \text{if } p+m > n+1 \end{cases}$$

Josephus problem

arxiv.org/abs/2303.15457

Hisaaki Shinkai Ho... | G classroom (OIT) | G classroom (武庫女) | Office365 | ニュース | お役立ち | Safa

Cornell University

We grat

arXiv > math > arXiv:2303.15457

Mathematics > Numerical Analysis

[Submitted on 4 Mar 2023 (v1), last revised 20 Oct 2023 (this version, v2)]

Analytical Study and Efficient Evaluation of the Josephus Function

Yunier Bello-Cruz, Roy Quintero-Contreras

A new approach to analyzing intrinsic properties of the Josephus function, J_k, is presented in this paper. The linear structure between extreme points of J_k is fully revealed, leading to the design of an efficient algorithm for evaluating $J_k(n)$. Algebraic expressions that describe how recursively compute extreme points, including fixed points, are derived. The existence of consecutive extreme and also fixed points for all $k \geq 2$ is proven as a consequence, which generalizes Knuth result for $k = 2$. Moreover, an extensive comparative numerical experiment is conducted to illustrate the performance of the proposed algorithm for evaluating the Josephus function compared to established algorithms. The results show that the proposed scheme is highly effective in computing $J_k(n)$ for large inputs.

Subjects: Numerical Analysis (math.NA)
MSC classes: 65Q30, 11Y55, 11B50
Cite as: arXiv:2303.15457 [math.NA]
(or arXiv:2303.15457v2 [math.NA] for this version)
https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.15457

は，最後に残る人（survivor）を $J_m(n)$ とする（例えば[12]）．オイラーが扱ったのは，もう一人追加したときに，その人が最後に残る場合は何か，という設定である．最後の一人を含めて n 人とすれば，

$$J_m(n) = n$$

となる (m, n) は何か，という問題になる．現在では，この n を J_m の fixed point と呼んでいる．

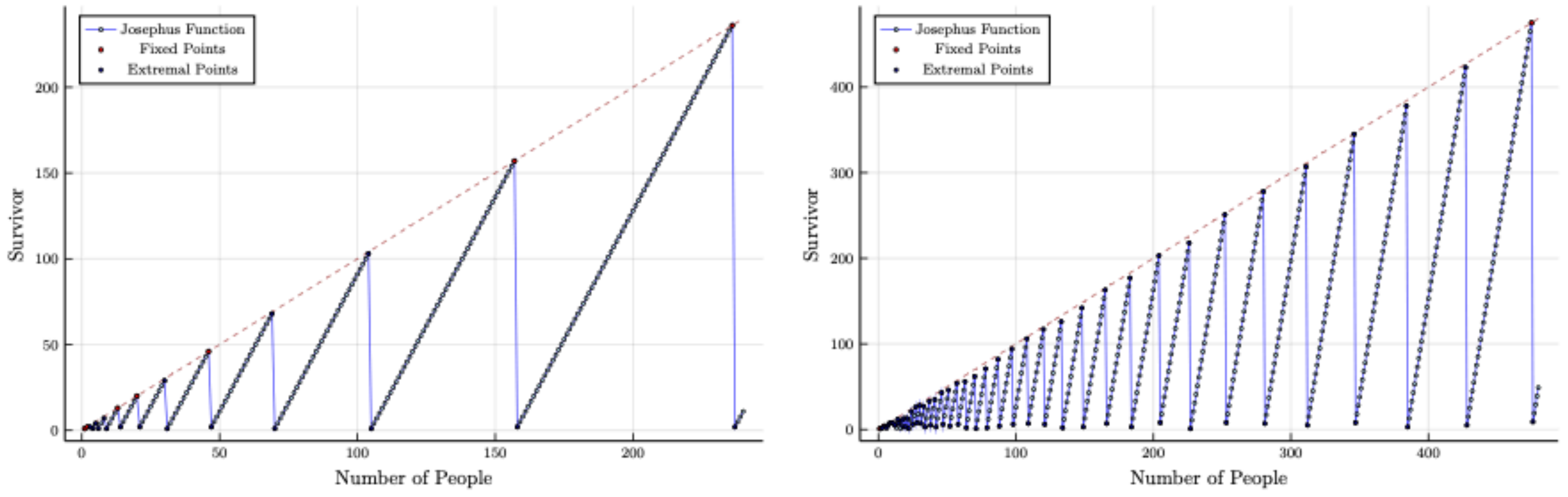
Definition 1 (Fixed and Extremal points). A *fixed point* of J_k is a value n_p such that $n_p = J_k(n_p)$. Additionally, an *extremal point* n_e is defined as a point that satisfies either $J_k(n_e) \in [[1, k-1]]$ or $J_k(n_e) \in [[n_e - k + 2, n_e]]$. If $J_k(n_e) \in [[1, k-1]]$, we refer to n_e as a *low extremal point*. On the other hand, if $J_k(n_e) \in [[n_e - k + 2, n_e]]$, we refer to n_e as a *high extremal point*.

Note that, a fixed point n_p is also a high extremal point because $J_k(n_p) = n_p$. However, there are high extremal points that are not fixed points; see Figure 1 below.

2 Properties of the Josephus Function

In this section, we begin by recalling a recursive formula, which first appeared in Euler's paper [6, & 8, pp. 130-131] and establishes a way of determining $J_k(n+1)$ in terms of $J_k(n)$.

Theorem 2 (Euler's formula). *Let $k \geq 2$ and denote $p := J_k(n)$. Then, $J_k(n+1) = p + k - \ell(n+1)$, if $p + k \in [[\ell(n+1) + 1, (\ell+1)(n+1)]]$ for some non-negative integer ℓ.*



(a) Graph of $J_3(n)$ for $n \leq 240$ (b) Graph of $J_{10}(n)$ for $n \leq 480$

Figure 1: Graphs of the Josephus functions J_3 and J_{10}

継子立て問題　と　ヨセフスの問題　につながりはあるか？

15＋15の9脱　{4,5,2,1,3,1,1,2,2,3,1,2,2,1}

		n	m
1150 頃	エズラ (Rabbi Abraham ben Ezra, 1546 年出版)	学生 15+ 怠け者 15	9
1363	サファディ (Salah al-Din al-Safadi)	M15+C15	9
15c	カランドリ (Filippo Calandri)	C15+J15	
1465 頃	フィレンツェ (Benedetto da Firenze)	C15+J15	9
1484 頃	シュケ (Nicolas Chuquet)	C15+J15	9
1485 頃	カランドリ	修道士 15+15	9
1500 頃	パチョーリ (Luca Pacioli)	C2+J30	9
1500 頃	パチョーリ	C2+J18	7
1500 頃	パチョーリ	C2+J30	7
1500 頃	パチョーリ	C15+J15	9
1539	カルダーノ (Gerolamo Cardano)	黒＋白	
1556	タルターリャ (Niccolo Fontana Tartaglia)	C+T, 黒＋白	
1559	ブテオ (Johannes Buteo)	C15+J15	10
1612	バシェ (Claude-Gasper Bachet)	C15+T15	
1624	エッテン (Hendrik van Etten)	C15+T15	9
1678	ヴィンゲイト (Edmund Wingate)	C15+T15	
1725	オザナム (Jacques Ozanam)	C15+T15	9

Euler 1776

15＋15の10脱　{2,1,3,5,2,2,4,1,1,3,1,2,2,1}

10＋10の10脱　{1,1,3,2,1,3,2,2,3,2}

＜平安時代＞

[1106 -1159 藤原通憲 (村井中漸によれば，継子立の考案または伝授者)]

[1127 『懐中歴』(『二中歴』の博棊歴が基づく)]

1151-1156 頃『簾中抄』(「まゝこたての略頌」の項で数字列 2 つを列挙)

＜鎌倉–南北朝 時代＞

1210-1221 頃『二中歴』(博棊歴の「後子立」の項で数字列 2 つを列挙)

1310-1331 頃『徒然草』(死を免れぬ身をまゝ子立の石にたとえる)

1278-1346 頃『異制庭訓往来』(「継子立」に言及)

?–1372『新撰遊覚往来』(「三十二十之継子立」に言及)

＜室町–戦国–安土桃山 時代＞

1500 頃『十二段草子』(「ありやなしやのまゝこたて」に言及)

1500 頃 天理図書館蔵『鼠の草子絵巻』(「ありやなしやのまゝこたて」を含む

＜江戸時代＞

1604『徒然草寿命院抄』(数字列 1 つを列挙し，10 番目を除くことに言及)

1624『徒然草野槌』(数字列 1 つを列挙し，10 番目を除くことに言及)

1627-1631 頃『塵劫記』刊年未詳の 5 巻本 (継子立の具象的な絵と文章説明を

[1644-1652?『姫百合のさうし』(「まま子だて」に言及)]

1693『男重宝記』(「三十二十之継子立」に言及)

関孝和編　1683

中国には同種の問題設定は見つかっていない（Needham, 1959;『中国の科学と文明4』p71）

引用文献に　Smith & Mikami (1914), Smith(1925)

天平時代の双六

yomiuri.co.jp

≡ すべて | トップ 速報 朝刊記事 紙面ビューアー 社説 社会 政治 経済 スポーツ 国際 地域 科学・IT

天平の盤上遊戯・双六の遊び方とは…「聖武天皇らがどのように遊んでいたのか想像して」

2025/10/31 13:00 #正倉院 THE SHOW #正倉院展 保存して後で読む

奈良国立博物館（奈良市）で１１月１０日まで開催中の第７７回正倉院展（特別協力・読売新聞社）では、天平時代の貴人が遊んだゲーム「双六（すごろく）」関連の宝物が、まとまって出展されている。飛鳥時代の７世紀に中国か朝鮮半島から伝わったとみられ、中国・新疆（しんきょう）ウイグル自治区トルファンのアスターナ古墓（７世紀）では正倉院宝物によく似たミニチュアサイズの双六盤が出土している。現代のすごろくとは違う、その遊び方とは――。

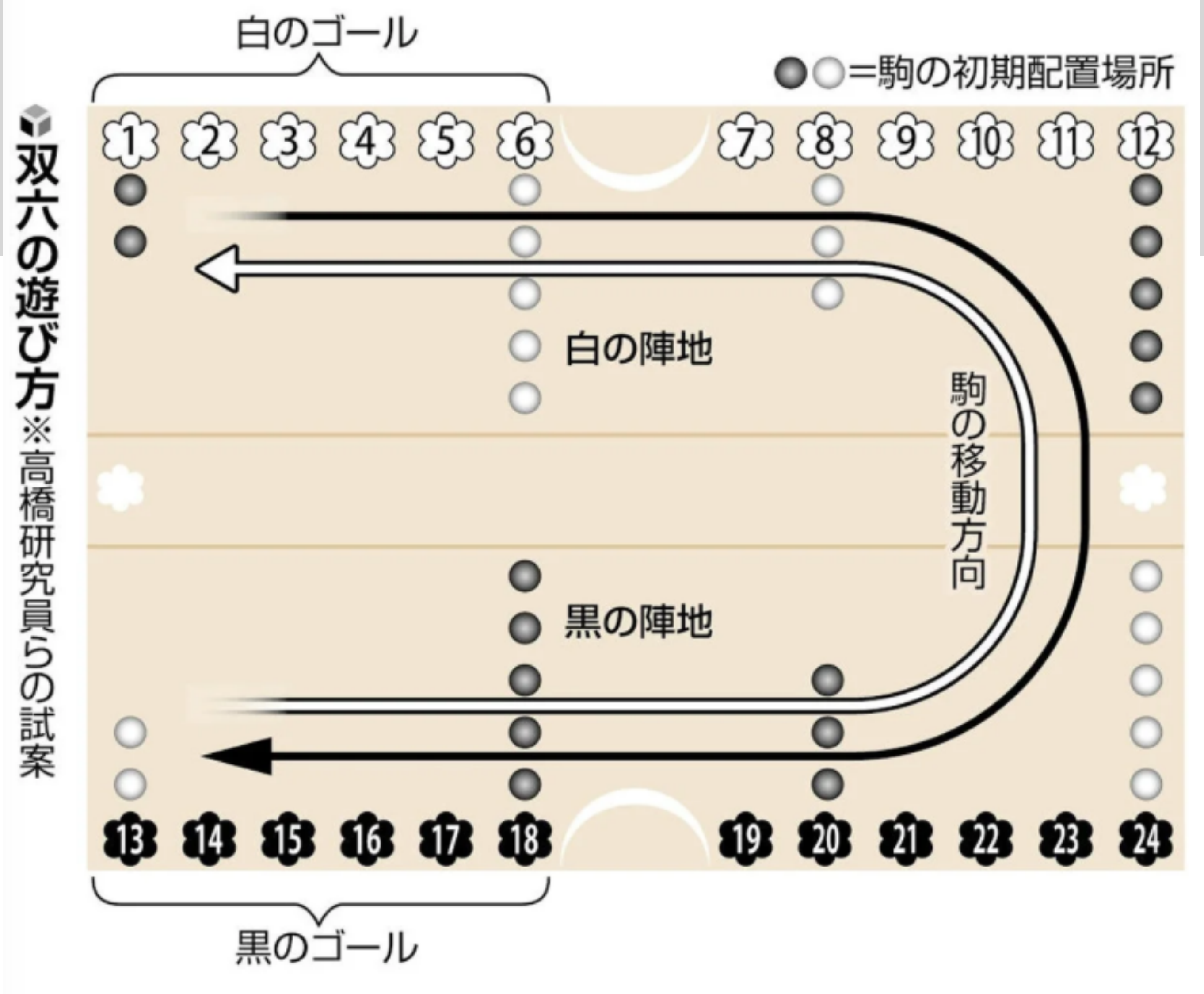
展示されているのは、双六盤の「木画紫檀双六局（もくがしたんのすごろくきょく）」、水晶や琥珀（こはく）、ガラスで作った駒「双六子（すごろくし）」、象牙製のサイコロ「双六頭（すごろくとう）」、サイコロの振り筒「双六筒（すごろくのつつ）」など。いずれも聖武天皇の遺愛品だ。

「木画紫檀双六局」

双六頭

黄瑠璃双六子

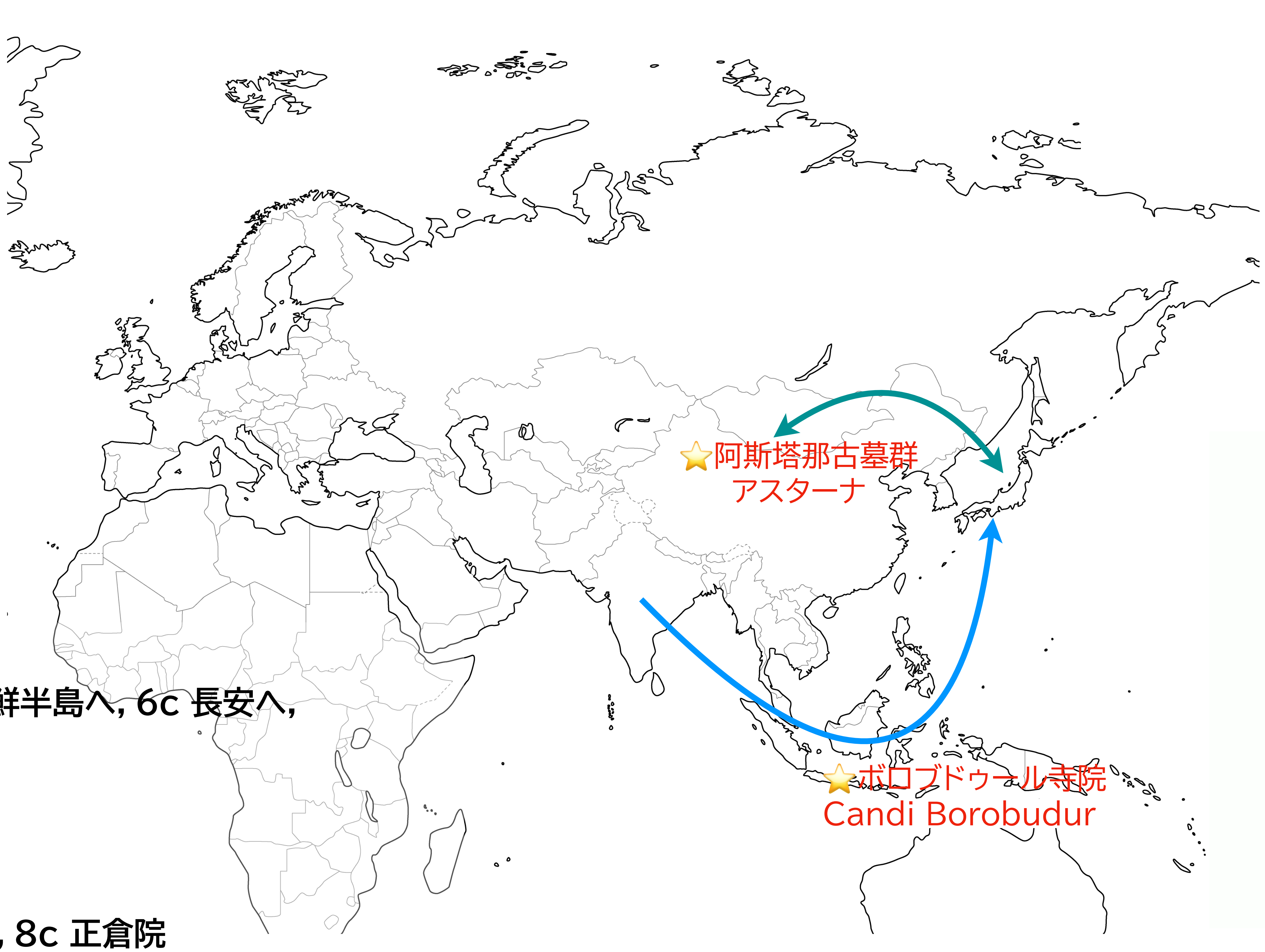
双六筒

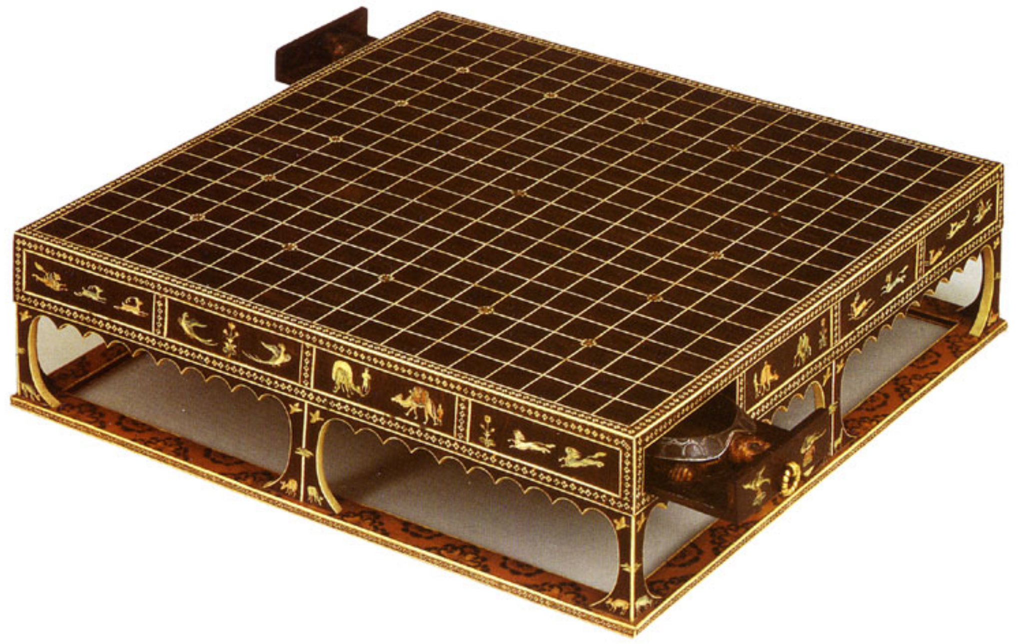


双六の遊び方

- 対戦は2人で行う。双六局の盤面には長辺側の上下に12個ずつ、短辺側の中央に1個ずつ花文様があり、駒を置く位置を示している。
- 宝物の駒は緑や黄など色とりどりだが、通常は白と黒で、最初にそれぞれ計15個の駒を配置する。黒は上段左端の○1に2個、右端の○12に5個、下段の○18に5個、○20に3個、白は下段左端の○13に2個、右端の○24に5個、上段の○6に5個、○8に3個を置く＝イラスト＝。
- 黒は下段、白は上段が「陣地」、それぞれ左側6個分（黒は○13～○18、白は○1～○6）がゴール。交互に振り筒で二つのサイコロを振り、出た目に従って、黒は時計回り、白が反時計回りに駒を花文様を1マスとして進める。この時、1個の駒を出た目の合計分進めることも、2個の駒をそれぞれの目だけ進めることもできる。
- 相手の駒が2個以上ある所には進めないが、1個だけの所には、相手の駒をゴールから遠いマスに追いやって進むことができる。
- すべての駒を自分の陣地のゴールに入れたら勝ちとなる。相手を妨害しながら、有利に進めるような工夫が必要になる。

盤上遊戯の伝播　正倉院の時代, すでにシルクロードは陸路と海路があった





「木画紫檀棊局」

「木画紫檀双六局」

中国の盤上遊戯　囲碁

文献上はBC3cから. 出土品はAD3cから. 4cには朝鮮半島へ, 6c 長安へ,
7c トルファン唐墓, 8c 正倉院

西方の盤上遊戯　ナルド・双六(双陸)・バグギャモン

西方 → 4-5c ナルド【中央アジア】→ 7c 双陸【中国】, 8c 正倉院
→ 16c バグギャモン【欧州】
→【インド】 → 8c 正倉院, ボロブドール【インドネシア】

南方の盤上遊戯　将棋・象棋・チェス

6c インド北西部 -> 1100 象棋【中国】

D.E. Smith & Y.Mikami, A History of Japanese Math.(1914)

132 VII. Seki's contemporaries and possible Western influences.

published his *Tengen Shinan* or Treatise on the Celestial Element Method. In this his method of finding the area of a circle is distinctly Western (Fig. 31), although it is so simple as to claim no particular habitat.

This list is rather meaningless in itself, without further description of the works and a statement of their influence upon Japanese mathematics, and hence it may be thought to be of no value. It is inserted, however, for two purposes: first, that it might be seen that the Seki period, whether through Seki's influence or not, whether through the incipient influx of Western ideas or because of a spontaneous national awakening, was a period of special activity; and second, that it might be shown that out of a considerable list of contemporary writers, only those who in some way came under Seki's influence attained to any great prominence.

We now turn to the second and more important question, did Seki and his contemporaries receive an impetus from the West? Did the Dutch traders, who had a monopoly of the legitimate intercourse with mercantile Japan, carry to the scholars of Nagasaki and vicinity, where the Dutch were permitted to trade, some knowledge of the great advance in mathematics then taking place in the countries of Europe? Did the Jesuit missionaries in China, who had followed Matteo Ricci in fostering the study of mathematics in Peking, succeed in transmitting some inkling of their knowledge across the China Sea? Or did some adventurous scholar from Japan risk death at the order of the Shogun,[1] and venture westward in some trading ship bound homewards to the Netherlands? These are some of the questions that arise, and which there are legitimate reasons for asking, but they are questions that future research will have more definitely to answer. Some material for a reply exists, however, and the little knowledge that we have may properly be mentioned as a basis for future investigation.

It has for some time been known, for instance, that there

[1] Even the importation of foreign books was suppressed in 1630.

VII. Seki's contemporaries and possible Western influences. 133

was a Japanese student of mathematics in Holland during Seki's time,[1] doubtless escaping by means of one of the Dutch trading vessels from Nagasaki. We know nothing of his Japanese name, but the Latin form adopted by him was Petrus Hartsingius, and we know that he studied under Van Schooten at Leyden. That he was a scholar of some distinction is seen in the fact that Van Schooten makes mention of him in his *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico* in one of his editions of Descartes's *La Géométrie*,[2] as follows: "placuit majoris certitudinis ergo idem Theorema Syntheticé verificare, procendo à concessis ad quaesita, prout ad hoc me instigavit praestantessimus ac undequaque doctissimus juvenis D. Petrus Hartsingius, Iaponensis, quondam in addiscendis Mathematis, discipulus meus solertissimus."[3] The passage in Van Schooten was first noticed by Giovanni Vacca, who communicated it to Professor Moritz Cantor.

Some further light upon the matter is thrown by a record in the *Album Studiosorum Academiae Lugduno Batavae*,[4] as follows:

"Petrus Hartsingius Japonensis, 31, M. Hon. C." with the date May 6, 1669. Here the numeral stands for the age of the student, M. for medicine, his major subject, and Hon. C. for *Honoris Causa*, his record having been an honorable one.

[1] HARZER, P., *Die exacten Wissenschaften im alten Japan*, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 14, 1905, Heft 6; MIKAMI, Y., *Zur Frage abendländischer Einflüsse auf die japanische Mathematik am Ende des siebzehnten Jahrhunderts*, *Bibliotheca Mathematica*, Bd. VII (3), Heft 4.

[2] HARZER quotes from the 1661 edition, p. 413. We have quoted from the Amsterdam edition of 1683, p. 413.

[3] T. HAYASHI remarks that the same words appear in a posthumous work of Van Schooten's, but this probably refers to the above *editio tertia* of 1683. See HAYASHI, T., *On the Japanese who was in Europe about the middle of the seventeenth century* (in Japanese), *Journal of the Tokyō Physics School*, May, 1905; MIKAMI, Y., *Hatono Sōha and the mathematics of Seki*, in the *Nieuw Archief voor Wiskunde*, tweede Reeks, Negende Deel, 1910.

[4] Hague, 1875. It gives a list of students and professors from 1575 to 1875.

134 VII. Seki's contemporaries and possible Western influences.

Mathematics, his first pursuit, had therefore given place to medicine, and in this subject, as in the other, he had done noteworthy work. Possibly the death of Van Schooten in 1661 may have influenced this change, but it is more likely that the common union of mathematics and medicine, as indeed of all the sciences in those days,[1] led him to combine his two interests. Moreover certain other records inform us that Hartsingius lived in the house of one Pieter van Nieucasteel by the Langebrugge, a bit of information that adds a touch of reality to the picture. This record would therefore lead to the belief that he was only twenty-two years old when he was mentioned in the year of Van Schooten's death (1661), or probably only twenty-one when he, a *doctissimus juvenis*, and *quondam in addiscendis*, verified the theorem for his teacher.

A careful examination of the Leyden records as set forth in the *Album Studiosorum* throws a good deal more light on the matter than has as yet appeared. In the first place the Hartsingius was adopted as a good Dutch name, it appearing in such various forms as Hartsing and Hartsinck, and may very likely have belonged to the merchant under whose auspices the unknown student went to Holland. In the next place, Hartsingius was in Holland for a long time, fifteen years at least, and was off and on studying in the university at Leyden. He is first entered on the rolls under date August 29, 1654, as "Petrus Hartsing Japonensis. 20, P," a boy of twenty in the faculty of philosophy. This would have placed his birth in 1634 or 1635, but as we shall see, he was not very particular as to exactness in giving his age.[2] He next appears on the rolls in the entry of date August 28, 1660, "Petrus Hartzing Japonensis, 22, M." He has now changed his course to medicine, and his age would now place his birth in 1638 or 1639, four years later than stated before. Since, however,

[1] Witness, for example, the mention made by Van Schooten in the 1683 edition (p. 385) above cited, of the assistence received from Erasmius Bartholinus, mathematician and physician in Copenhagen.

[2] See *Album*, col. 438.

VII. Seki's contemporaries and possible Western influences. 135

the difficulty of language is to be considered, together with the fact that such records, hastily made, are apt to be inexact, this is easily understood. He next appears in the *Album* under date May 6, 1669, as already stated. He therefore began in 1654, and was still at work in 1669, but he had not been there continuously.

Further light is thrown upon his career by the fact that he was not alone in leaving Japan, perhaps about 1652. He had with him a companion of the same age and of similar tastes. In the *Album*, under date September 4, 1654, appears this entry: "Franciscus Carron Japonensis, 20, P." Within a week, therefore, of the first enrollment of Hartsingius, another Japanese of same age, and doubtless his companion in travel, registered in the same faculty. But while Hartsingius remained in Leyden for years, we hear no more of Carron. Did he die, leaving his companion alone in this strange land? Did he go to some other university? Or did he make his way back to Japan?[1]

Now who was this Petrus Hartsingius who not only braved death by leaving his country at a time when such an act was equivalent to high treason, but who was excellent as a mathematician? What ever became of him? Did he die, an unknown though promising student, in some part of the West, or did he surreptitiously find his way back to his native land? If he passed his days in Europe did he send any messages from time to time to his friends, telling them of the great world in which he dwelt, and in particular of the medical work and the mathematics of the intellectual center of Northern Europe? In other words, for our immediate purposes, could the mathematics of the West, or any intimation of what was being accomplished by its devotees, have reached Japan in Seki's time?

[1] SCHOTEL, G. D. J., *De Academie te Leiden in de 16e, 17e en 18e eeuw* Haarlem, 1875, speaks (p. 266) of Japanese students at Leyden, and a further search may yield more information. We have been over the lists with much care from 1650 to 1670, and less carefully for a few years preceding and following these dates.

関の数学が西洋に伝わった可能性はあるか？
Petrus Hartsingius Japonesis という日本人学生がオランダLeyden大学の学生簿に発見される.
1654年に数学を専攻する20歳の学生として. 1669年に31歳として. 後に担当教員の死により薬学へ転向.
疑問符だらけで終わる文.

ペーター・ハルツィンク (1637-1680） Petrus Hartsingius, Peter Hartzing

デカルトの『幾何学』をラテン語訳した数学者ファン・スホーテンの弟子のひとり.

以下はネット情報

https://note.com/savensatow/n/n7f57efe8d0b7

1637年　オランダ東インド会社の平戸館にいたドイツ人カール・ハルツィンクと平戸の豪商の娘との間に生まれる.
1641年　鎖国政策により出国せざるをえなくなり、オランダへ.
1680年　42歳の若さでクラウスタールの自宅で亡くなる.

ハルツィンク・クラウスタール財団（Harzing-Clausthal-Stiftung）
330年以上前に「ペーター・ハルツィンク（Peter Hartzing: Pieter Hartsinck）」の遺志によって創設された大学進学を支援する奨学金

継子立てとヨセフスの問題　　まとめ

継子立て問題の歴史　　12cから

関孝和編『算脱之法』（1683）

Josephus problemの歴史　10cから

Euler『新しく発見された特異な数列』（1776）

両者を結ぶものはあるか　　見つかっていない

（中国経由でなくてもよい？）

最後に残る人 (survivor) を $J_m(n)$ とする

$J_m(n) = p$ とする．

$$J_m(n+1) = \begin{cases} p+m, & \text{if } p+m \le n+1 \\ p+m-(n+1), & \text{if } p+m > n+1 \end{cases}$$

202511 継子立てヨセフス問題 print

202511 継子立てヨセフス問題 slide

概 要

『塵劫記』を通じて有名になった「継子(ままこ)立て」は，円形にならべた人を 10 人ごとに外し，最後に残る人を勝ちとする算数遊戯である．2 つのグループ（先妻の子と，後妻の子）を特別な順にならべると，1 つのグループだけが先にすべて取り除かれていくが，取り除かれていくグループの最後の一人の提案で，勝敗が逆転するというストーリー性を持っている．このような逆転劇がどのような設定で生じるか，という一般化された問題は，関孝和編『算脱之法』(1683 年) にて論じられ，再帰的方法で導かれている．

一方，継子立てとよく比較される西洋の Josephus（ヨセフス）の問題は，同じ設定でありながら，最後に残される人はどこの位置か，というシンプルな問いかけであり，逆転するような展開はない．オイラーによって，この問題が数学問題に格上げされたのは 1776 年のことで，その特異な数列として，算脱之法と，まったく同じ再帰的方法が述べられていたことを発見したので報告する．和算の方が 80 年以上早く，問題を扱って解決していたことになる．2 つの問題の間には，管見の限り，歴史的交流の跡は見つからない．