

太陰太陽暦の数学：招差法と会円術

真貝寿明（大阪工業大学情報科学部）

hisaaki.shinkai@oit.ac.jp

概要

日本は古くから中国経由で天文学の知識を吸収してきた。改暦の必要に迫られた江戸時代前期，和算家も造暦に使われる数学の理解に参加した。ここでは，太陰太陽暦に含まれる天文学的背景をまとめ，数学的要素として補間公式と赤道黄道座標変換を確認する。付録で，関孝和の『授時發明（天文大成三条図解）』（1680年）の「黄赤道の差」を解説する。

1 Introduction

日本にとって，暦学は中国からもたらされる太陰太陽暦を理解することだった（図1）。江戸前期に，それまで800年近く使われていた宣明暦の不具合が顕著になり，渋川春海（1639-1715）や関孝和（1642?-1708）によって授時暦が研究された。

和算は，天文学や物理学とは独立に発展を続けた。以前から，「和算は自然科学より刺激を受けるというようなことはなく，もっぱら趣味的，芸術的に発達した」（三上義夫 [1]，小倉金之助 [2]）「江戸時代の数学者は多少とも暦学の素養をもっていたが，天文暦学よりの刺激が数学として1つの分野の創設にまで発展することがなかった」（藤原松三郎 [3]）などと称されている。しかし，和算の1つの流れとして暦術に端をなす研究が続いている。

関が円理を始める直接の原因は授時暦ではなかったか（若い頃に村松重清の方法で π の計算を行い，授時暦の研究によって弧弦矢の関係に開眼，また授時暦が採用している弧背術の理解から円周率計算の別方法に到達したのではないか）という広瀬 [4] による指摘はもっともと考えられる。関の取り組みがその後の建部賢弘（1664-1739）による円理弧背術・正弦表の作成へ，安島直円（1732-92）の弧背術へ，そして間重富（1756-1816）の弧矢案隱へと続く。また，彼らの弟子として中根元圭（1662-1733）の授時暦研究，中根彦循（1701-61）の開方盈昫，幸田親盈（1692-1759）の門下の千葉歳胤（1713-89）による蝕算法なども挙げられる。

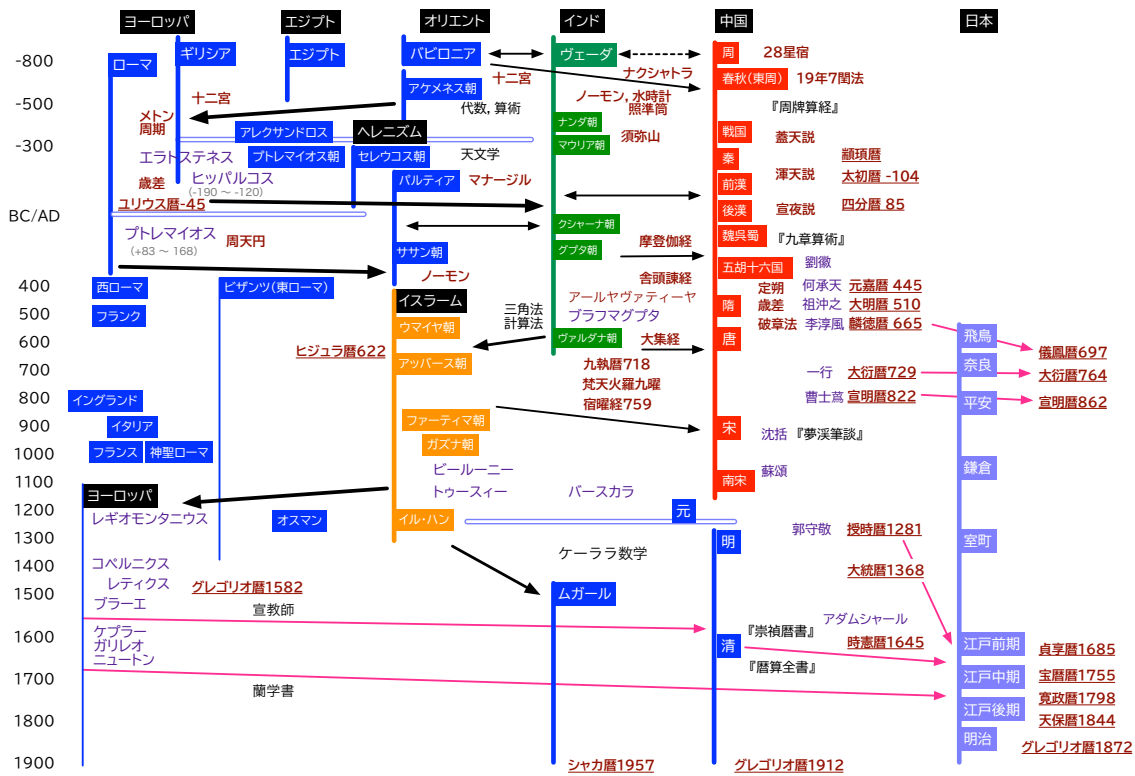


図1: 暦を中心にした天文学の歴史。江戸時代を中国から中国の数学や天文学のみが伝えられた「前期」，西洋の知識が中国経由で伝えられた「中期」，蘭学者によって西洋の知識が解説された「後期」に分けて呼ぶことにする。

2 暦の概略

2.1 長さの種類

太陽や月の運動をもとに暦が定められている。暦には3種類ある。

表 1: 暦の3種類

太陰暦 lunar calendar	朔望月の長さを唯一の基本定数とする。現在のイスラム諸国で使用されるヒジュラ暦 (Hijri calendar) は西暦 622 年を紀元とする 1 年 354 日の周期。第 9 月が断食月 (ラマダン, Ramadan) になる。
太陽暦 solar calendar	太陽年 (厳密には回帰年) の長さを基礎とする。エジプトが起源。ユリウス暦 (Julian calendar, 前 45 年以降) では、1 年を 365.25 日とした。グレゴリオ暦 (Gregorian calendar, 1582 年以降) では、1 年を 365.2425 日とする。現在の多くの国で使用。
太陰太陽暦 luni-solar calendar	上記 2 者の折中。毎月の日数は朔望月を基礎で決め、1 年の長さがほぼ太陽年となるように工夫する。バビロニア・ギリシャで使用され、中国・日本でも過去に使われた。

表 2 に 1 日の定義を示す。太陽の位置を基準に 1 日を決める (太陽日, 24 時間)。しかし、地球は太陽のまわりを公転しているため、1 回自転しても同じ方向に太陽はなく、若干余計に*1 自転して 24 時間となる。したがって地球が自転に要する時間は若干短く約 23 時間 56 分 (恒星日) になる。この差は、公転軌道が楕円のため、季節によって異なる。夜空の星を同じ時刻に観測すると、日々位置が西に進むことになる。

月の運動も同様で、(地球から見た) 月の見かけの形状変化で測る 1 ヶ月 (朔望月) と月の自転周期は異なる。1 年の長さも同様に、複数の定義がある (表 3)。季節感を重視するならば、太陽年を基準にすることになる。

表 2: 1 日の長さの定義

名称	基準	長さ	備考
太陽日 (solar day)	太陽が南中から南中	24 ^h 00 ^m 00 ^s	視太陽日, 真太陽日ともいう
恒星日 (sidereal day)	自転の時間。星の位置を基準	23 ^h 56 ^m 04.09 ^s (平均値)	楕円軌道のため時期で変化

表 3: 1 年の長さの定義

名称	基準	長さ	備考
太陽年, 回帰年 (Tropical Year)	春分点から春分点	365.24219 日	暦の基準。季節変化と合致。
近点年 (Anomalistic Year)	近日点から近日点	365.2594 日	近日点移動のため、回帰年より長い
恒星年 (Sidereal Year)	星座の位置に対する 1 周	365.2564 日	地球が 360 度公転する時間

惑星の公転軌道は一般に楕円であるが、他の惑星の影響・天体の扁平性・一般相対性理論の効果などにより、近日点に変化する。地球の近日点移動の周期は 21,000 年である。13 世紀頃は、地球軌道の近日点通過は冬至とほぼ一致していた。現在は、冬至が 12 月 22 日頃、近日点通過が 1 月 3 日頃である。毎年 1500 秒づつ近日点通過が遅くなるが、造暦の上では太陽の移動速度変化として影響を及ぼす。

現代の時刻制度では、太陽の動きは一定 (平均太陽) として時刻が制定されている。しかし、地球の公転は楕円軌道であるため、地球の移動速度は変化し、地球の自転軸が公転面に対して 23.4° 傾いていることも影響して、見かけの太陽の動きは様ではない。そのため、例えば日時計をつくった時には均時差 (equation of time) の補正が必要となる。均時差は近日点 (1 月 3 日頃) を原点とする年周期のずれ (地球の公転が楕円であることの影響) と、春分を原点とする半年周期のずれ (地球の自転軸が公転面から 23.4 度傾いていることの影響) の合成で表され、図 2 のようになる。毎日、正午に太陽を固定カメラで撮影すると、1 年間でアナレンマ (analemma) と呼ばれる 8 の字を描くのも、この影響である。

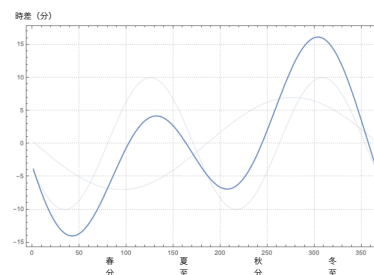


図 2: 均時差の年変化。平均太陽時と実太陽時のずれを分単位で示す。プラスの領域は、視太陽が平均太陽よりも西に進んでいる。マイナスの領域は、視太陽が平均太陽よりも東にある。

*1 自転の向きと公転の向きは 23.4 度異なるが同じ向きであるので。

2.2 太陽暦

太陽による1年(1太陽年)は、現在値^{*2}は365.24219日である。4年に1度^{うるうび}閏日を用いて調整することにしたユリウス暦(前45年1月1日以降)では、1年を365.25日とすることになる。これでは1000年後には7.80日のずれが生じてしまう。

現在使われているグレゴリオ暦(1582年以降)^{*3}では、4年に1度に閏日を入れ、100年に1度(西暦1700, 1800, 1900, …年)には閏日を入れず、400年に1度(西暦1600, 2000, …年)には閏日を入れる。これにより、400年間に97回の閏日が入り、

$$365.2422 \times 400 = 146096.88 \text{ 日} \quad (1)$$

$$365 \times 400 + 97 = 146097 \text{ 日} \quad (2)$$

となつて、ほぼ合う。日本では、明治6年(1873年)1月1日から実施された^{*4}。月の運動を考慮しない暦であるが、1年の日数は365あるいは366で固定され、季節感は変わらない。

2.3 太陰太陽暦法の展開

太陰太陽暦は、月の見かけが変わる周期(1朔望月^{さくぼうげつ}、現在値は29.530589日)と1回帰年を組み合わせられてつくられる。

1ヶ月を30日とする月(大月)と29日とする月(小月)を交互にすれば、1ヶ月は平均して29.5日になる。しかし、これでは若干不足するので、どこかで大月を2回続ける(連大)必要がある^{*5}。

1朔望月を12回繰り返すと354.4日であり、毎年11日(10.875日)ずれが生じる。そこで、閏月を入れる年と入れない年を設けて調整する。閏月も大月と小月の可能性があり、この閏月をどのように入れるのかが太陰太陽暦の最も重要な課題であった。

■一九年七閏の法(章法)から破章法へ

中国では「章法」と呼ばれる「一九年七閏の法」は、19年間に7回閏月を入れる法則である(ギリシャのメトンによって前432年に唱えられたものとして、メトン周期(Meton's cycle)と呼ばれるが、それよりも50年前にバビロニアで知られていた。また、メトンよりも160年前には中国で知られていた[6, 7])。グレゴリオ暦と比較すると、19年間に7回の閏月を置くとその月数は、 $19 \times 12 + 7 = 235$ であり、

$$365^{\text{d}}.2422 \times 19 = 6939^{\text{d}}.6018 \quad (3)$$

$$29^{\text{d}}.53058 \times 235 = 6939^{\text{d}}.688415 \quad (4)$$

となつてほぼ等しい。^{*6}本稿の付録Aに、この比が連分数展開で見られることを触れる。

1年を $365\frac{1}{4}$ 日とすると、1章19年では、 $6939\frac{3}{4}$ 日となつて端数がでる。4章76年とすれば端数が生じない。76年周期は前4世紀の天文学者の名をとってカリポス周期(Calippus' cycle)と呼ばれる。中国の四分暦では、76年周期を節と呼んだ^{*7}。

なお、上記の式で見られるように、長い間、一九年七閏の法を使うと、誤差が生じるため、閏月の出現頻度を減少させる必要がある。玄始暦(412年)では、章法を廃止し、600年に221回の閏月を入れた(19年間に6.9983回の閏月)。5世紀、南朝宋の祖沖之(429-500)は、「破章法」と呼ぶルールを導入し、391年間に144回の閏月を入れた(19年間に6.9974回の閏月)。

■歳終置閏法から歳中置閏法へ

閏月をおく場所を年末とするのが歳終置閏法である。だが、こうすると季節感がずれてしまうので、1年の間のどこかに入れる工夫が考えられた(歳中置閏法、前600年前後)。

季節を表すものとして、太陽の視黄経を基準にする二十四節気(表4)が使われる。周の王朝が作ったもので、華北の気象状態にちなんだものである。二十四節気は節気と中氣に分けられる。単純に平均化すると、二十四節気それぞれの間隔は $365\frac{1}{4}/24 = 15.21875$ 日、中氣から中氣(節気から節気)は、30.4375日になる。表4の二十四節気は、現代式の太陽の位置(黄経)を等分した分け方(定気)で対応したものだが、これは天保暦(1844年)以降での用法である。それ以前は、太陽の黄道上の速度は一定とした分け方すなわち1年を24等分する分け方(常気あるいは恒気、平気)が採用されていた。中国の暦法では元嘉暦(445年)までが常気による暦だが、それが『宋書律曆志』に記載され、日本には飛鳥時代に伝えられた[5]。

^{*2} 以下、現在値の出典は、『理科年表2026』(丸善出版)。

^{*3} 復活祭の時期を定める基準となる春分の日を3月21日頃に修正するため、1582年10月4日(木)の翌日を10月15日(金)とした。

^{*4} 天保暦(旧暦)の明治5年12月2日の翌日を、1873年1月1日として適用した。

^{*5} 連大を入れるタイミングは、 $0.5/(29.530589 - 29.5) \approx 16.35$ 月ごとになる。

^{*6} 漢代の四分暦(85-)では、1年を $365\frac{1}{4}$ 日とし、19太陽年=235朔望月が厳密に成立する、とした。このとき、朔望月の日数は、 $1 \text{ 朔望月} = 365\frac{1}{4} \times 19/235 = 29\frac{499}{940} = 29.530851$ 日。

^{*7} 干支が復帰する60年周期も重要視した中国では、60の倍数にもなる次の周期も考え出された。

- 一紀 $76 \times 20 = 1520$ 年 (日の干支が復帰する最小の周期)
- 一元 $1520 \times 3 = 4560$ 年 (年の干支も復帰する最小の周期)

表 4: 二十四節気一覧. 左列が節気, 右列が中気.

季節	節名	名称 (節気)	太陽黄経	新暦の目安	名称 (中気)	太陽黄経	新暦の目安
春	寅節	立春 りっしゅん	315°	2月4日頃	雨水 うすい	330°	2月19日頃
	卯節	啓蟄 けいちつ	345°	3月5日頃	春分 しゅんぶん	0° / 360°	3月21日頃
	辰節	清明 せいめい	15°	4月5日頃	穀雨 こくう	30°	4月20日頃
夏	巳節	立夏 りっか	45°	5月5日頃	小満 しょうまん	60°	5月21日頃
	午節	芒種 ぼうしゅ	75°	6月6日頃	夏至 げし	90°	6月21日頃
	未節	小暑 しょうしょ	105°	7月7日頃	大暑 たいしょ	120°	7月23日頃
秋	申節	立秋 りっしゅう	135°	8月7日頃	処暑 しょしょ	150°	8月23日頃
	酉節	白露 はくろ	165°	9月8日頃	秋分 しゅうぶん	180°	9月23日頃
	戌節	寒露 かんろ	195°	10月8日頃	霜降 そうこう	210°	10月23日頃
冬	亥節	立冬 りっとう	225°	11月7日頃	小雪 しょうせつ	240°	11月22日頃
	子節	大雪 たいせつ	255°	12月7日頃	冬至 とうじ	270°	12月22日頃
	丑節	小寒 しょうかん	285°	1月5日頃	大寒 だいかん	300°	1月20日頃

冬至の日時は、表あるいは^ひの^{の-もん} (gnomon) による太陽の影の測定から求められることから、中国暦では、ふつう冬至が暦元となり、冬至を含む月を11月とした。天保暦では、春分・夏至・秋分・冬至がそれぞれ2月・5月・8月・11月になるように設定された。歳中置閏法は、中気をそれぞれの月に固定する考えである。中気-中気間の30.4375日は、朔望月よりも長いので、何年かたつと中気を含まない月が生じる。この月を「閏月」とし、その前月と同じ月名を付ける(例: 閏2月)*8。

表 5: 2025年~2035年 太陰太陽暦・太陽暦対応表 (大の月・小の月・閏月)。日付の後ろの「*」は新暦(太陽暦)で翌年になることを示す。2033年の閏11月設定は「旧暦2033年問題」における一般的な採用案(閏11月案)に基づく。旧暦で8月15日を中秋といい「中秋の名月」としてお月見が行われる。

旧暦月	2025年	2026年	2027年	2028年	2029年	2030年	2031年	2032年	2033年	2034年
正月	大 1/29	大 2/17	小 2/6	大 1/26	大 2/13	小 2/3	大 1/23	小 2/11	大 1/31	大 2/19
2月	小 2/28	小 3/19	大 3/7	小 2/25	小 3/15	大 3/4	小 2/22	大 3/11	小 3/2	小 3/20
3月	大 3/29	小 4/17	小 4/6	大 3/25	大 4/13	小 4/3	大 3/23	小 4/10	大 3/31	大 4/18
4月	小 4/28	大 5/16	大 5/5	小 4/24	小 5/13	大 5/2	小 4/22	大 5/9	小 4/30	小 5/18
5月	小 5/27	大 6/15	小 6/4	大 5/23	大 6/11	小 6/1	大 5/21	小 6/8	大 5/29	大 6/16
閏5月	—	—	—	小 6/22	—	—	—	—	—	—
6月	大 6/25	小 7/14	大 7/3	大 7/21	小 7/11	大 6/30	小 6/20	大 7/7	小 6/28	小 7/16
閏6月	小 7/25	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7月	大 8/23	大 8/12	小 8/2	小 8/20	大 8/9	大 7/30	小 7/19	大 8/6	大 7/26	大 8/14
閏7月	—	—	—	—	—	—	小 8/18	—	—	—
8月	小 9/22	大 9/11	大 8/31	大 9/18	小 9/8	小 8/29	大 9/16	小 9/5	大 8/25	小 9/13
9月	小 10/21	小 10/11	大 9/30	小 10/18	大 10/7	大 9/27	小 10/16	大 10/4	大 9/23	大 10/12
10月	小 11/20	大 11/9	小 10/30	大 11/16	小 11/6	大 10/27	小 11/14	大 11/3	小 10/23	小 11/11
閏10月	—	—	小 11/28	—	—	—	—	—	—	—
11月	大 12/20	小 12/9	大 12/27	小 12/16	大 12/5	小 11/26	大 12/13	小 12/3	大 11/22	大 12/11
閏11月	—	—	—	—	—	—	—	—	小 12/22	—
12月	大 1/19*	大 1/8*	小 1/26*	大 1/14*	小 1/4*	大 12/25	大 1/12*	大 1/1*	大 1/20*	小 1/10*

■平朔法から定朔法へ

毎月の第一日を経朔または朔と呼ぶ。朔の決め方には、^{へいさく}平朔 (mean conjunction) と^{ていさく}定朔 (true conjunction) がある。

平朔は単純に平均朔望月ごとに朔にする。大と小の月が交互に並ぶことが7回または8回続くと大が2つ続く連大が現れる。

定朔は月および太陽の運行の変動を考慮した複雑で精密なものである。定朔は、太陽や月の運動を詳しく知る必要が生じる。後述する月の運動の不等性、太陽運動の不等性などの発見ごとに修正がなされていった。

唐の頃から以後の暦はすべて定朔である。日本では飛鳥時代まで用いられた元嘉暦だけが平朔で、それ以降はすべて定朔である。

*8 このルールに従うと、2033年から2034年にかけて、中気のない月が3回生じてしまうことから閏月が定まらない「旧暦の2033年問題」が発生する。

3 天文学的に必要な修正

3.1 度数の表記, 度数以下の表記

バビロニアからはじまった天文学では, 円周を 360 度とし, 度以下は 60 進法 (1 度 = 60 分, 1 分 = 60 秒) を用いた. 小数の概念はイスラム圏で生まれ, 10 進小数の記法が定着したのは, 16 世紀後半のヨーロッパである.

中国では, 太陽の毎日の平均運動を 1 度としたため, 全天を (四分暦では) 周天度数 $365\frac{1}{4}$ とした. したがって, 中国の 1 度 (以下 1# とする) は,

$$\text{中国 } 1\# = \text{現行 } 0.9856^\circ. \quad (5)$$

漢以降の暦ではこの値も若干変化する (『晋書』天文志では

$365\frac{145}{589}$). また, 度以下の端数は, 分数値で表記されたり, 100 進法が使われたり (1 度 = 100 分, 1 分 = 100 秒) した. 『後漢書』律曆志以降, 表 6 のような呼び方も使われた. 日本での表記もこれに準ずる.

中国天文学では, 1 日を 12 等分した「辰刻」と, 1 日を 100 等分した「刻」と呼ぶ時刻表記が併用された. 単純計算すると 1 刻は約 14.4 分になる. 日本では江戸時代まで, 昼夜をそれぞれ 6 等分する不定時法が使われた. 庶民の使う 1 刻 (約 2 時間) は, 季節によって長さが変化した.

表 6: 中国での分数値の表記.

$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$
	少			半			太	
少弱	少	少強	半弱	半	半強	太弱	太	太強

3.2 歳差と章動

地球は完全な球ではなく, 赤道方向が少し広がった扁平楕円体形状である. また, 地球の自転軸は, 公転軌道面に対して約 23.4 度 ($23^\circ 24'$) 傾いている. すなわち自転軸を基準とした赤道面と, 太陽が動く黄道面は 23.4 度傾いている (中国ではこの値を $23.9\# (= 23.5^\circ)$ とした). 太陽から地球にはたらく万有引力は, 公転させる作用以外にも偶力 (潮汐力) として, 「赤道の膨らみ」を公転面の方へ引き戻そうとする力 (トルク, torque) がはたらく. この結果, 自転軸の傾いたコマのように, 自転軸がふらつく現象 (みそすり運動) が生じる. 自転軸が「大きな円を描く動き」を歳差 (precession)[赤道の歳差] といい, 「細かなギザギザの揺れ」を章動 (nutation)[黄道の歳差] という.

歳差の周期は, 約 25,772 年 ~ 26,000 年である. 歳差によって, 天の北極は円を描いて移動する (北極星の位置は変化する). その半径は, $23^\circ 27'$ で, その中心は, 黄道の極 $\alpha = 18^h, \delta = 66^\circ 23'$ である. 歳差によって, 恒星の黄経は, 毎年 $50''.27$ ずつ増加するが, 黄緯は変化しない. しかし, 赤経・赤緯は変化する. 歳差は, 前 2c にヒッパルコスが発見した. 中国では, 340 年に虞喜が発見した. 値が異なるので, 独立した発見とされる.

章動の主成分の周期は, 18.6 年 (月の軌道である白道面の黄道面に対する傾きが約 5° あり, その回転周期) であり, 歳差が引き起こす黄道傾斜角に $\pm 9''$ 角程度の振動を加える. 章動は, 1748 年にイギリスの天文学者ブラッドリーにより発見された.

惑星による歳差 (黄道の歳差) もふくめ, すべてを考慮した歳差の大きさを一般歳差という. 一般歳差の大きさは春分点の赤道方向で $50''/\text{年}$, さらに春分点の黄道方向に $0.11''/\text{年}$ 程度である [8]. 天文年鑑 (誠文堂新光社) に掲載された最近の値を表 7 に示す. これらから, 2000 年から t 年後の歳差の大きさ (1 年分) は,

$$50''.2920 + a_1 t + a_2 t^2; \quad a_1 = 2''.909 \times 10^{-4}, \quad a_2 = -3''.420 \times 10^{-5} \quad (6)$$

で与えられる. 2000 年から t 年後の歳差によるずれ P は, この式を積分することにより,

$$50''.2920t + \frac{a_1}{2}t^2 + \frac{a_2}{3}t^3 \quad (7)$$

となる. 歳差の大きさの年次変化は, 後の「1 年の長さの変化」を含めて消長法と呼ばれることになる.

表 7: 天文年鑑に記載された一般歳差角

年	一般歳差
1996	$50''.2902$
2006	$50''.2927$
2016	$50''.2919$
2026	$50''.2937$

表 8: 歳差の発見の比較. 現代値では, 1 度/72 年となる.

	西洋	中国
発見	前 2c. ヒッパルコス	340. 虞喜
発見時の値	1 度/100 年.	1 度/50 年.
発見時の解釈	恒星の位置が東へ移動.	冬至の太陽の位置が西へ移動.
備考		大明暦 (510) にて採用. 1 度/46 年

3.3 太陽運動の不等性

地球の公転は楕円運動を描き、その公転速度は近日点（冬至）のときに最も速く、遠日点（夏至）のときに最も遅い。地球から太陽を観測すると、太陽は天球面上を等速には動いていないことになる。これを太陽運動の不等性 (inequality) という。中国では、**日行盈縮**と表現した。平均的な速度で計算した太陽の位置と実際の観測位置との間に差が生じるが、この差を「中心差 (Equation of Center)」と呼んだ。

皇極暦・大衍暦にて取り入れられた（皇極暦は暦としては使われなかった）。各節気間の日数が等間隔でないことを示す表が用意された。その影響は、太陽の見かけの運動を楕円として考えれば、円と考えたときとの中心差（正弦関数で表される）で表されるものになるが、正弦関数的な対称性が見られないことから、張子信や劉■（544-610、■は火+卓）の理解は不十分であった、と藪内 [6] は指摘している。

表 9: 太陽運動の不等性発見の比較

	西洋	中国
発見	前 2c. ヒッパルコス	6c. 張子信
暦の基準	遠日点	近日点
備考		随代の劉■（■は火+卓）、皇極暦に取り入れる。大衍暦 (729-) にて実際に使われる。

3.4 月の運動の不等性

月の軌道も楕円であるため、地球に最も近い「近地点」付近では動きが速くなり、最も遠い「遠地点」付近では遅くなる。地球だけでなく太陽の引力も受けるため、軌道の形や向き自体も刻々と変化する。月行遲疾（第二の不等）とも言われる。例えば、月の出は、平均して毎日約 50 分ずつ遅れると表現するが、実際にはその遅れ方は日によって数十分単位で変動（出差, Evection）する。朔望月は平均で約 29.5 日だが、実際には約 29.27 日から 29.83 日の幅で変動する。

出差の発見は、朔望時の観測だけでは無理である。西洋では上弦・下弦の月の観測で発見されたが、中国では朔望時の観測に重点が置かれたため未発見となった [6]。

表 10: 月の運動の不等性発見の比較

	西洋	中国
発見	前 2c. ヒッパルコス	2c. 後漢書律曆志、劉洪 (140-206)
	2c. プトレマイオス	乾象曆 (223-) で導入
備考	ヒッパルコスは中心差の発見、 プトレマイオスは出差の発見	19 年周期で黄白道の交点が逆行（交点月の導入） 月の最速地点がほぼ 9 年で東へ移動（近地点移動。近点月の導入） 出差は未発見

3.5 1 年の長さの短縮、消長法

歳差による春分点の移動で、地球の 1 年間の長さは、100 年あたり 0.53 秒長くなる（1 年あたり 5.3 ミリ秒長くなる）。

潮汐摩擦（月の引力による海水の摩擦）などの影響で、地球の自転は非常にゆっくりと遅くなる。自転が遅くなると「1 日」が長くなる（100 年あたり 2 ミリ秒）ため、1 太陽年に含まれる「日（自転の回数）」は、長い年月をかけて少しずつ減る。この効果は地球史的には重要であるが、天文観測への影響は考えなくてよい。

南宋の統天暦で導入された消長法は、過去のデータに比べて 1 年の長さが変化している、というものだが、過去の不正確な値を盲目的に信じることで逆に不正確さを拡大した。授時暦では、消長法による修正値は、「1 年の長さは、100 年で 2/10000 日ずつ（1 年で 17 ミリ秒）減少する」とした。この値は、貞享暦・宝暦暦で使われた。後に麻田剛立が、消長法の値を「1 年で 37.6 ミリ秒増加する」とし、寛政暦で使われたが、天保暦では廃止された。

4 観測・測定のために使われた数学

4.1 補間法・近似法

表や髀 (gnomon) による南中時の太陽の影の測定から、冬至・夏至の日時が計測された。計測精度を高めるために、圭表と呼ばれる巨大な垂直の棒^{*9}や、建造式のノーモンが使われた。計測結果から精度の高い冬至の瞬間を求めることを目的に、補間公式が開発されることになる。

■『周髀算経』に記載された二十四節気の影の長さを求める方法

前2世紀頃のものとして『周髀算経』には、8尺の表の影の長さについて、24節気ごとの記載がある。冬至の南中時は1丈3尺5寸、夏至のときは1尺6寸として、それ以外の節気のときの影の長さは等間隔で与えられるとしている。実際には、影の長さは、三角関数のように変化するので、この表記はだいたい実際のものとは異なることになる。

『周髀算経』に記載された影の長さから、測定値の緯度を計算すると、冬至のときは北緯35.9度、夏至のときは北緯35.7度となる。東周(前770~前256)の首都・洛邑(現在の河南省洛陽市, N34.7)、秦(前221~前202)の首都・咸陽(現在の陝西省咸陽市, N34.4)、前漢(前202~前2)の首都・長安(現在の陝西省西安市付近, N34.2)のいずれとも合致しないが、この程度の誤差があった時代といえよう。

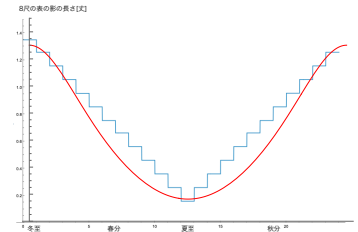


図3: 『周髀算経』に記載された8尺の表の影の長さの24節気ごとの記載(青線)と実際の影の長さ(北緯35度の位置での南中時)。

■祖沖之による冬至の決定方法

正確に日時を決めるために、影の長さが極値を取る計算がなされた。祖沖之によって考案された方法は、冬至・夏至の前後の3回の計測を用いるものである。例えば、冬至を挟んで、冬至の前に2日計測する。 t_1 と t_2 日の影の長さがそれぞれ、 p, q とする。冬至の後に、影の長さ r が $[p, q]$ 間となる日を t_3 と求める。この3つのデータから、 $[t_1, t_2]$ 間で、影の長さが r と一致する瞬間 x は、

$$\frac{x - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{p - r}{p - q} \quad (8)$$

より、求められ、冬至の瞬間 T は、その前後で影の長さが対称であるとすれば、

$$\frac{t_3 - x}{2} = T \quad (9)$$

として求められる[6]。江戸時代には「沖之法」あるいは「勾配法」と呼ばれた[9]方法である。

ただし、地球の公転軌道が楕円であること(近日点付近では太陽の動きが速いこと)や、冬至点と近日点のズレを考慮する必要がある。そのため、単なる左右対称の計算ではなく、実際のズレ量を補正する必要があった^{*10}。

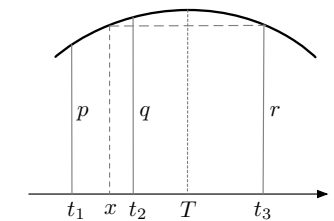


図4: 影の長さから、冬至の瞬間 T を決定する祖沖之の方法。

■随代：等間隔データの2次式補間

平朔から定朔への移行にあたっては、月の位置観測によるデータ処理が必要になる。月の運動の不等性による補正を求めるために、月は毎日観測された。このため、等間隔データの補間公式が開発された。

随代の劉^{りゅうしやく} (544-610, ^{こうきやく}は火+卓)は、皇極曆(建議したが、公的には採用されなかった)の中で、2次式を用いた補間公式を考案した。節気間のある日の長さ(遅速数)を求める/月の朔弦望の予定日を推算/月の朔弦望を日の入りの遅速度に合わせて求める/月の日動への入交を求める、の4箇所て補間公式を求めているという[10]。

例えば1年を24の節気で等分し、1日の長さを考える。平均的な長さに対して遅いか早いかの遅速数を調べる。ある節気から次の節気への差 Δ_1 と、その次の節気への差 Δ_2 を既知として、ある日 x での遅速数を求めたい。すなわち、 $(0, f(a)), (n, f(a) + \Delta_1), (2n, f(a) + \Delta_1 + \Delta_2)$ の3点のデータがあるとき、この関数を $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ として近似すると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{3\Delta_1 - \Delta_2}{2n}x - \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2n^2}x^2 \\ &= f(a) + \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} \frac{x}{n} + (\Delta_1 - \Delta_2) \frac{x}{n} - \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} \frac{x^2}{n^2} \end{aligned} \quad (10)$$

^{*9} 通常は8尺のノーモンだが、授時暦を作成した郭守敬(1231-1316)は40尺のものを用いた。渋川春海ははじめ8寸のものを用い、後に8尺のものを用いた。

^{*10} 中山[11]には、対称性からのずれとして、 $2e \cos \omega(1 + \sin \lambda)$ の誤差が生じることが記載されている。ここで、 e は地球公転軌道の離心率、 ω は太陽の近日点黄経、 λ は観測時の太陽黄経である。

■唐代：不等間隔データの2次式補間

二十四節気は等間隔ではない。不等間隔の補間法が必要となった。

唐代の一行 (張遂, 683-727) は、不等間隔の補間法を導き出し、大衍曆 (729-) にて利用された。いま、 $(0, f(a)), (w_1, f(a) + \Delta_1), (w_1 + w_2, f(a) + \Delta_1 + \Delta_2)$ の3点のデータがあるとき、この関数を $f(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ として近似すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) - \frac{\Delta_2 w_1^2 - 2\Delta_1 w_1 w_2 - \Delta_1 w_2^2}{w_1 w_2 (w_1 + w_2)} x - \frac{-\Delta_2 w_1 + \Delta_1 w_2}{w_1 w_2 (w_1 + w_2)} x^2 \\ &= f(a) + 2\Delta_1 \frac{x}{w_1 + w_2} + \left(\frac{\Delta_1 w_2}{w_1} - \frac{\Delta_2 w_1}{w_2} \right) \frac{x}{w_1 + w_2} - \left(\frac{\Delta_1}{w_1} - \frac{\Delta_2}{w_2} \right) \frac{x^2}{w_1 + w_2} \end{aligned} \quad (11)$$

となる。 $w_1 = w_2 = n$ と等間隔にすれば劉^{りゅうしやく}の公式 (10) に戻る。後の宣明曆で、徐昂が太陽や月の視運行速度を計算したとき、「大衍曆の旧術に因った」と記しているのは、式 (11) である [10]。*11

■3次式補間

太陽の運動の不等性の観測は長期間のデータを扱うことになる。天体の視運行は等加速度運動ではないことがわかると、3次補間が必要となった。趙^{ちやう}知微^{ちひ}は、等間隔データに対する3次補間法を用いて重修大明曆 (1171年-) を作成した。その際、関数を

$$f(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (15)$$

として、定数項をゼロとする工夫がなされた。

授時曆 (§5.2) を編纂した元代の郭守敬 (1231-1316)・王恂 (1235-81) は、太陽や月の位置の日ごとの位置 (階差) の記述に、1次の差 (速度) だけでなく、2次の差 (加速度)、さらには3次の差 (加速度の変化率) まで考慮した立招差法 (3次補間) あるいは累招差法 (累^{たいり}は、土へんに几+木)*12 (高次補間) を開発した。招差とは、天体の位置データなどの「観測値の差 (階差)」から、求めたい未知の値を「招き寄せる (補間・推定する)」という意味である。

冬至から春分までの1象限 (91.31[#]) を太陽は 88.91 日で動く。春分から夏至までは 93.71 日である。これらを平均値からの盈縮積差として「2.4[#]の盈積」「2.4[#]の縮積」と呼んだ。式 (15) にて、 x を冬至からの日数、 $f(x)$ を積差とすると、 $f(x)/x$ は「日平差」である。式 (15) の $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は、それぞれ「定差」「平差」「立差」という。授時曆では具体的に

$$f(x) = 513.32x - 2.46x^2 - 0.0031x^3 \quad (16)$$

と求めていた [10]。

■累裁招差之法

これは曆学とは異なるが触れておく。関孝和の遺稿をまとめた『括要算法』 (1712) 巻元には、朶積術^{だせき}として、自然数の k 乗の和

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k \quad (17)$$

を求める問題が扱われている。高校数学で、数列の和として教えられる公式

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \quad (18)$$

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6}n + \frac{3}{6}n^2 + \frac{2}{6}n^3 \quad (19)$$

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{4}n^3 \quad (20)$$

などを一般化したものである。ベルヌーイ数 (本稿の付録 B) の発見とも言われる箇所である。これらを導くプロセスに、招差法が応用された。

たとえば、 $S_2(n)$ は、階差を3回とるとすべて1になることから、 n^3 までの多項式と予測される。式 (15) を3次多項式まで拡張した式を用いて、その係数を決定することで $S_2(n)$ を求める、という方針である。

*11 一行は、等差数列の和の公式も導いている。惑星の速度が、初日が a_1 、毎日の速度差が d のとき、 n 日後の速度 a_n と、その総変化 S_n は

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad S_n = \sum_{n=1}^n a_n = n \left(a_1 + \frac{n-1}{2}d \right) \quad (12)$$

となる。もし、 S_n, a_1, d が既知であれば、 n は2次方程式

$$dn^2 + (2a_1 - d)n - sS_n = 0 \quad (13)$$

の解として、

$$n = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{2a_1 - d}{d} \right)^2 + \frac{8S_n}{d}} - \frac{2a_1 - d}{d} \right] \quad (14)$$

となる。この式も大衍曆に登場する [10]。

*12 累^{れい}は、俄、球やブロックをピラミッド状に積み上げる「積み木 (離散数学・数列の和)」の問題を指す。

4.2 天測の座標系

■極黄道座標系

天体の位置を記録する座標系には、大きく分けて、地球の自転軸方向を天の北極としそれに対する赤道を用いる赤道座標系 (Equatorial Coordinate System) (α, δ) と、太陽の運動を黄道としそれに対する黄極を想定する黄道座標系 (Ecliptic Coordinate System) (λ, β) の2つがある。現代天文学では赤道座標系を用いるが、その創始は16世紀のティコ・ブラーエとされている。プトレマイオスは黄道座標を用いて天体位置を記載した。これはイスラーム、中世ヨーロッパでも踏襲された。しかし、黄道座標での記載は、星の観測から直接行うのは難しい。インドでは、占星術が先行し、月や太陽が通る黄道座標系を重視し、極黄道座標 (極黄経 polar longitude, 極黄緯 polar latitude) と呼ばれる座標を用いた。これは、黄道座標と赤道座標をミックスしたものである (後述する式 (24))。

中国では、赤道座標系を用いる方法と、極黄道座標系を用いる方法の両者があった [20]。

恒星の位置を決めるにあたっては、二十八宿とよぶ星座、およびその代表的な星として28の距星を重要視し、星々の位置は、距星を基準にして (入宿度, 去極度) の表記で与えられた。図5を用いて説明すると、照準とする星Sの赤経・赤緯を (α, δ) 、近くの距星の赤経・赤緯を (α_0, δ_0) とするとき、

$$\text{入宿度} = \alpha - \alpha_0, \quad \text{去極度} = 90^\circ - \delta \quad (21)$$

である。ただし、距星は必ずしも明るい星が選ばれたわけでもないし、赤経で等間隔に配置されたわけでもない。時代によって距星の選び方も若干変化した。このため、中国星座の同定などは、いまでも研究対象となっている。

中国の観測装置である渾天儀は、はじめは赤道環のみであったが、後漢以降は黄道環も加えられた。黄道環をもつ渾天儀では黄経座標の観測が容易である。だが、黄極方向に天体があるわけではないため、渾天儀の設置には天の北極を基準にする方が簡単であろうことは想像がつく。おそらくそのような理由で、極黄道座標が使われた、と考えられる。図6で、Sを天体、Pを赤道極、P'を黄道極とする。大円PSが赤道および黄道と交わる点をそれぞれT, Kとする。大円P'Sが黄道と交わる点をLとする。春分点をEとすると、

$$\text{赤道座標: 赤経 } \alpha = \widehat{ET}, \quad \text{赤緯 } \delta = \widehat{TS} \quad (22)$$

$$\text{黄道座標: 黄経 } \lambda = \widehat{EL}, \quad \text{黄緯 } \beta = \widehat{LS} \quad (23)$$

$$\text{極黄道座標: 黄経 } \lambda' = \widehat{EK}, \quad \text{黄緯 } \beta' = \widehat{KS} \quad (24)$$

となる。

ただし、黄道座標1度の長さ、赤道座標1度の長さは差が生じる。そこで、座標変換の問題が生じた。黄道と赤道の傾き ϵ (図6で角KET) は24度である (正確には、23度66分である)。三角形KETに、球面三角法を用いると、

$$\tan \lambda' \cos \epsilon = \tan \alpha \quad (25)$$

が成立するので、 α と λ' の対応が得られる。中国では、5度の角度を限とも称したので、それを合わせて差異を計算したのが表11になる。 α が45度付近で最も差が大きい。球面三角法がなかった中国では、次に述べる特殊な近似「会円術」が使われた。

本稿の付録Cにて、関孝和の『授時發明』の前半を紹介する。これは、関が授時暦の研究をして、『天文大成管窺輯要』の「論黄赤差」の計算手順の詳細を記したものである。ここでは、表11の $\lambda' - \alpha$ の差を ($\lambda' = 45^\circ$ の場合に) 会円術を用いて導出することになる。(会円術は近似なので、表11の値とは若干異なる)。

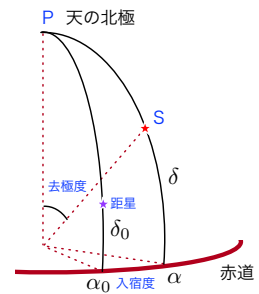


図5: 赤道座標系 (α, δ) と、中国で使われた距星を基準として測る場合の入宿度 $\alpha - \alpha_0$ と去極度 $90^\circ - \delta$ の定義。

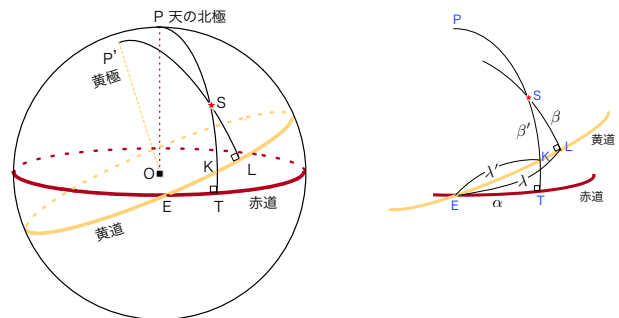


図6: 黄道座標系 (λ, β) と極黄道座標系 (λ', β') 。

表 11: 黄道座標 1 度と, 赤道座標 1 度の対応.

限	赤経 α (中国度)	赤経 $\bar{\alpha}$ (現行度)	黄経 $\bar{\lambda}$ (現行度)	黄経 λ' (中国度)	$\lambda' - \alpha$
初	0	0.00	0.00	0.00	0.00
2	5	4.93	5.39	5.47	0.47
3	10	9.86	10.77	10.93	0.93
4	15	14.78	16.11	16.35	1.35
5	20	19.71	21.42	21.73	1.73
6	25	24.64	26.66	27.05	2.05
7	30	29.57	31.84	32.31	2.31
8	35	34.50	36.95	37.49	2.49
9	40	39.43	41.99	42.60	2.60
10	45	44.35	46.94	47.63	2.63
11	50	49.28	51.82	52.58	2.58
12	55	54.21	56.63	57.46	2.46
13	60	59.14	61.37	62.26	2.26
14	65	64.07	66.05	67.01	2.01
15	70	68.99	70.67	71.70	1.70
16	75	73.92	75.25	76.35	1.35
17	80	78.85	79.79	80.96	0.96
18	85	83.78	84.31	85.54	0.54
19	90	88.71	88.82	90.11	0.11
	91.3125	90.00	90.00	91.31	0.00

■会円術

北宋時代, 沈括 (1031-1095) は、『夢溪筆談』(1088)にて, 弧の長さに対する「会円術」を提示した. 円の直径を d , 矢 CD の長さを c , 弦 AB の長さを a とする [図 7(左)] と, 弧 ACB の長さ s は

$$\text{会円術} \quad s = \frac{2c^2}{d} + a \quad (26)$$

とする近似式である. 図を半分にしたときの関係は, 半弧 (半背) を ℓ , 半弦を p として

$$\text{会円術} \quad \ell = \frac{c^2}{d} + p \quad (27)$$

となる. この近似式の誤差については, 筆者が 2026 年 4 月に報告した「三角法の伝播: 江戸前期に存在した 2 つの三角関数表」のプリント [13] の一部にて記載したが, 杉本 [14] は, この会円術は, 円周率を 3 とすれば π とするときよりも良い近似式となることに触れ, 円周率を 3 とすることは, 沈括の「定義」と考えられると述べている^{*13}.

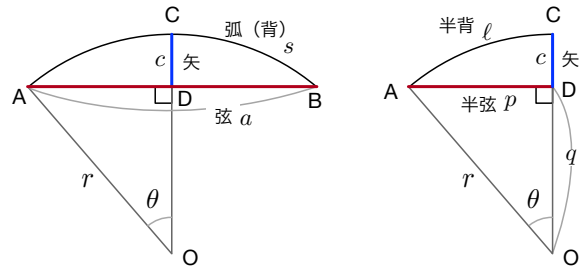


図 7: (左) 沈括『夢溪筆談』の会円術での変数定義図. (右) 半弦・半背としたときの変数定義図.

5 太陰太陽暦法の発展

5.1 おもな暦の一覧

中国での主な暦を表 12 にまとめる. それぞれの暦で使われた定数 (1 年の長さ, 1 月の長さ, 5 惑星の会合周期) は, 藪内 [6] の付録にまとめられている.

時代ごとにインド・オリエント・イスラームから天文学の知識の伝来はあったが, 根幹を変えるような影響はなかった [15]. 大きく影響を与えたのは, 16 世紀後半のキリスト教宣教師だった. アダム・シャルル (Johann Adam Schall von Bell, 湯若望, 1591-1666) らによって西洋天文学の成果を取り入れた時憲暦 (1645-) は中国伝統の暦の基本を本質的に変更し, それは, 江戸後期の寛政暦・天保暦の理論的基礎となった [16].

^{*13} 弧長と直径を同じ長さで測ることで π という値が得られるが, 中国度は円周を 365.25 等分し, 直径を 121.75 等分したから, 周径率は 3 と考えても構わない, という理由である.

表 12: 中国で使われた主な暦. (A は山 + 而 + 頁, B は王 + 頁, C は登 + おおざと, D は言 + 斤, E は火 + 卓, F は草かんむり + 爲, G は目 + 候)

時代名	暦名	使い始め	終わり	作成者	特徴	日本への影響
殷・周代					太陰太陽暦の原型, 二十四節気が農耕の目安として整備	
秦-前漢	せんぎよく A B 暦					
前漢	太初暦	前 104 年	84 年	C 平・落下 紘ら	中国初の計算体系が整った暦. 24 節気を導入.	中国暦の基本モデルとして伝来.
前漢	三統暦		84 年	りゅうきん 劉 D	食周期 135 月, 暦元を過去におく上元積年法.	
後漢	四分暦	85 年	220 年	へんきん 編 D・李梵	1 年=365.25 日	日本で最初に公的に採用されたという説あり.
呉	けんしやう 乾象暦	223 年	280 年	劉洪	章法 (19 年 7 閏月), 月の遅疾 (近地点移動, 黄道白道の交点の逆行) 1 年 = $365\frac{145}{589} = 365.2462$ 日, 1 朔望月 = $29\frac{773}{1457} = 29.53054$ 日.	
南朝宋	げんか 元嘉暦	445 年	509 年	かしやうてん 何承天	定朔の導入.	飛鳥時代に伝来し, 初の公暦に.
南朝梁	だいてい 大明暦	510 年	589 年	祖冲之	歳差, 破章法 (391 年 144 閏月) 1 年 = $365\frac{9589}{39491} (= 365.24281)$ 日 1 朔望月 = $29\frac{2090}{3939} (= 29.5303)$ 日	元嘉暦とともに伝来. 日本初期の暦法に多大な影響
隋	こうきよく 皇極暦	-	-	りゅうしやく 劉 E	日行盈縮, 破章法 (676 年に 249 閏月), 歳差 (76.5 年で 1 度) 1 年 = 365.24454 日, 1 朔望月 = $29\frac{659}{1242} (= 29.53059581)$ 日	
唐	りんとうく 麟徳暦	665 年	728 年	李淳風	各計算の分母を 1340 に統一. 1 年 = 365.24478 日.	ぎほう 儀鳳暦の名で 697 年から採用.
唐	だいえん 大衍暦	729 年	761 年	一行	太陽の動きに基づく定気法, 月の速度変化. 1 年 = 365.2444 日.	吉備真備が持ち帰り, 764 年から使用.
唐	五紀暦	762 年	821 年	郭献之	大衍暦を簡略・修正したもの.	大衍暦と併用される形で伝来.
唐	符天暦	-	-	そうし 曹士 F	暦元を 660 年とした (近距法). 九曜 (日/月/五星/羅 G/計都) の位置, 1 年 = 365.2448 日.	暦博士や宿曜師が利用
唐	宣明暦	822 年	892 年	徐昂	定朔の計算法を改良 (加減速) 1 年 = 365.2446 日.	平安~江戸初期まで約 800 年間使われた.
元	授時暦	1281 年	1367 年	郭守敬	定朔の計算法を改良 (3 次補間). イスラーム天文観測を取り入れ. 1 年 = 365.2425 日	貞享暦 (渋川春海) 作成のモデルになった.
明	大統暦	1368 年	1644 年	(元の暦を継承)	授時暦をほぼ踏襲し, 定数を一部変更.	民間暦や改暦議論に大きな影響.
清	時憲暦	1645 年	1911 年	Adam Schall ら	西洋天文学の成果を取り入れ	江戸後期の寛政暦・天保暦の理論的基礎となった.
近代	グレゴリオ暦	1912 年	現在		世界標準の太陽暦. 1 年=365.2422 日	1872 年の日本の改暦と足並みを揃える形に.

関孝和らによって研究された.

授時暦は北宋の紀元暦や南宋の統天暦を基準にしている, 外来天文学の影響はないが, イスラーム天文学の観測技術を取り入れ精密な儀器 (簡儀, 高表, 渾天象など) を制作し, 慎重な観測を行ったことに特徴がある [6, 17]. 正確な冬至の観測から 1 年の長さを 365.2425 日とした (統天暦と同じ). 冬至の太陽の位置の測定, 月の運動の追跡, 二十八宿の距離の測

5.2 授時暦

中国・元代の郭守敬 (1231-1316)・王恂 (1235-81) らが編纂した授時暦 (1281-1644 年) は, (明末に西洋天文学が導入された時憲暦までの) 中国史上で固有の, また最も精度が高い太陰太陽暦だった. 日本の江戸初期の改暦の際, 渋川春海や

定、日の出・日の入の時刻測定などを行い、天文定数の再検討を進めた。

また、計算方法に関しては、先行する暦法にはなかった次の「五つの新しい創法（術）」が『元史』巻 164 の郭守敬伝（暦志）に列挙されている。

1. 太陽の盈縮（不等速運動）を求める算法
立招差法（3次補間法の一つ）を用いた。
2. 月の運行の遲疾（不等速運動）を求める算法
累招差法（ 累 は、土へんに几+木）（高次の差分法）を用いた。
3. 黄道・赤道差を求める算法
勾股弧矢之法を用いた。
4. 黄道去極度を求める算法
円容方直矢接勾股之法（円と内接する図形の関係を利用した近似算法）を応用した。
5. 白道・黄道交差を求める算法
渾比散法という立体幾何学的手法を用いて算出し、交差する距離を制限・算出した。

後半の3つに対して、関孝和が『授時發明』で解説している（§付録C）。また、それまで慣例的に継続されていたいくつかの方法を取りやめた。定朔法における進朔法の廃止、暦元を施行年とする、諸定数の端数を小数記法で表す、1年の長さに消長法を採用する、などである [18]。

6 Outlook

今回は、前回の「三角関数の伝播」の調査で浮上した『天文学史と数学史のクロスオーバー』の問題に「着手した」報告である。日本に確実に影響を与えた天文暦学に注目したが、まだまだ途上である。今回は補間公式と座標変換に限定する形になったが、他にも惑星運動の表現や日食月食の予報など、大きなテーマが残されている。天文観測技術や器具、および観測データの誤差評価、測量術への影響なども取り上げなければならぬ問題である。

例えば、中国天文学史に与えた諸外国の影響（とくに、イスラムやインドからの数学・暦（占い）の影響）、あるいはその逆ルートでの影響の調査、和算として天文暦学の独自の発展についても、いずれ取り組み、文化の伝播の観点から科学史を捉え直したいと考えている。

本発表準備には、科研費 挑戦的研究（開拓）24K21170『天文学文化の新展開：数理的手法の導入で文化史と科学論から自然観を捉える研究の加速』のサポートを受けた。

参考文献

- [1] 三上義夫『文化史上より見たる日本の数学』（創元社、1947）
- [2] 小倉金之助『日本の数学』（岩波新書 61、岩波書店、1940）
- [3] 日本学士院編『明治前日本数学史 第4巻』（岩波書店、

1959） p.190

- [4] 広瀬秀雄「関孝和と天文暦学」数学史研究 56 (1973) 1-11.
- [5] 斉藤国治『日本・中国・朝鮮 古代の時刻制度 古天文学による検証』（雄山閣出版、1995）
- [6] 藪内清『中国の天文暦法』（平凡社、1969）が初版。ここでは、訂正などが宮島一彦によってなされた『定本 中国の天文暦法』（藪内清著作集第1巻（臨川書店、2017）所収を参考にした。
- [7] 陳遵 陳 （女+為）著、浅見 遼（翻訳）『中国古代天文学簡史』（滝川巖、1983）
- [8] 福島登志夫『天体の位置と運動（シリーズ現代の天文学 13巻）』（日本評論社、2009）
- [9] 城地 茂『『貞享暦』と『授時暦』に用いられた「沖之之法」』科学史研究 54 (2016) 349-354.
- [10] 李迪（編著）、大竹茂雄、陸 人瑞（共訳）『中国の数学通史』（森北出版、2002）
- [11] 中山 茂「渋川春海の二至観測と消長法」天文月報 58-9 (1965), 199
- [12] 小川 東「関孝和によるベルヌーイ数の発見」数理解析研究所講究録 1583 (2008) 1-18.
- [13] 真貝寿明「三角法の伝播：江戸前期に存在した2つの三角関数表」、近畿和算セミナー 2026年4月.
- [14] 杉本敏夫「関孝和の天文暦学研究」数理解析研究所講究録 1513 (2006) 104-111.
- [15] 橋本敬造「比較科学史からみた中国の天文暦学」、伊藤俊太郎・村上陽一郎編『講座科学史 3 比較科学史の地平』（培風館、1984）所収
- [16] 真貝寿明「星図・星座図の系譜」大阪工業大学紀要 69-1 (2024) p27-54
- [17] 山田慶児『授時暦の道』（みすず書房、1980）[山田慶児著作集第3巻（臨川書店、2021）に所収]
- [18] 竹迫 忍「渋川春海の貞享暦の研究」数学史研究 233(2019) p.1-46 (2019)
- [19] 山本啓二「アラビアの星宿について」科学史研究 24 (1985) 225-230.
- [20] 藪内 清「中国科学の伝統と特色」、藪内清編『世界の名著 12 中国の科学』（中央公論社、1979）
- [21] 小林博行「『関訂書』に見られる明代後期の中国・回回暦法研究について」科学史研究 53 (2014) 85-98.
- [22] 上野健爾、小川 東、小林龍彦、佐藤賢一（編）『関孝和全集』（岩波書店、2023）
- [23] 平山 諦、下平和夫、広瀬秀雄（編）『関孝和全集』（大阪教育図書、1974）



付録 A 連分数展開による近似分数

小数を近似分数で表す手法に連分数を用いる方法がある。いま、ある小数 x が、

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \dots}}} \equiv \{a, b, c, d, \dots\} \quad (28)$$

という連分数で表されるとき、近似分数は、

$$a + \frac{1}{b}, \quad a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}, \quad a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}, \dots \quad (29)$$

などとなる。次の 2 例を与える。

- 円周率 3.1415926535 を連分数にすると、

$$3.1415926535 = \{3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 6, 2, 13, \dots\} \quad (30)$$

となり、これから近似分数は、

$$\frac{22}{7}, \quad \frac{333}{106}, \quad \frac{355}{113}, \quad \frac{103993}{33102}, \quad \frac{104348}{33215}, \dots \quad (31)$$

- 現在値の太陽年/朔望月を連分数にすると、

$$\frac{365.24219}{29.530589} = \{12, 2, 1, 2, 1, 1, 17, 3, 14, 1, 7, 3, 3, 1, 2, \dots\} \quad (32)$$

となり、これから近似分数は、

$$\frac{25}{2}, \quad \frac{37}{3}, \quad \frac{99}{8}, \quad \frac{136}{11}, \quad \frac{235}{19}, \quad \frac{4131}{334}, \quad \frac{12628}{1021}, \dots \quad (33)$$

となってメトン周期（19 年で 235 月）が出てくる。あるいはもっと古代の太陽年/朔望月の値を用いても同じである。

$$\frac{365.25}{29.53} = \{12, 2, 1, 2, 2, 7, 2, \dots\} \implies \frac{25}{2}, \quad \frac{37}{3}, \quad \frac{99}{8}, \quad \frac{235}{19}, \quad \frac{1744}{141}, \quad \frac{3723}{301}, \quad \frac{5467}{442}, \dots \quad (34)$$

玄始暦の定数 [6]（1 年 = $365 \frac{1759}{7200}$ 日、1 月 = $29 \frac{47251}{89052}$ 日）を用いると、近似分数に

$$\frac{25}{2}, \quad \frac{37}{3}, \quad \frac{99}{8}, \quad \frac{136}{11}, \quad \frac{235}{19}, \quad \frac{7421}{600}, \dots$$

となって $\frac{7421}{600}$ （すなわち、600 年で 221 回の閏月）が登場する。

大明暦の定数 [6]（1 年 = $365 \frac{9589}{39491}$ 日、1 月 = $29 \frac{2090}{3939}$ 日）を用いると、近似分数に

$$\frac{25}{2}, \quad \frac{37}{3}, \quad \frac{99}{8}, \quad \frac{136}{11}, \quad \frac{235}{19}, \quad \frac{4836}{391}, \dots$$

となって $\frac{4836}{391}$ （すなわち、391 年で 144 回の閏月）が登場する。

付録 B ベルヌーイ数

自然数のべき乗和

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k \quad (35)$$

を求める式が、

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j} \quad (36)$$

$$\text{where } B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \dots \quad (37)$$

となることを関は見出ししていた（ヤコブ・ベルヌーイは、1723 年に見出した）。 B_j はベルヌーイ数と呼ばれる。

付録 C 関孝和『授時發明（天文大成三条図解）』

中国で1652年に黄鼎が授時暦の数理をまとめた全80巻の『天文大成管窺輯要』が出版された。関は、この中から重要な15条を抄出し、訓点を施して読みやすく訂正・編集した写本を作成した(表13)。「関訂書」とされるもので、後書きに貞享3年(1686年)とある。黄鼎は、先行文献をまとめた人物であり、個々の文献は他に込れる(小林[21])という。とくに、関が写本した15条のうち、天文総論をのぞく14条は、原文が明末の周述学(?-1583?)による文章であることが小林[21]によって指摘されている。論日度、論月度、論五星経度、論五星緯度の4編は、周述学が中国暦法とイスラム暦法(回回暦)との比較について言及しており、関は知らずにこれらを写したことになる。

表13: 『関訂書』に写本された『天文大成管窺輯要』の箇所とその内容。*印は『授時發明』で解説されているもの。■は、日+咎

卷之三の内	歳差	(地球の自転軸の首振り運動による)春分点の移動
	論中■差	各地で測定した正午の影の長さ
	論黄赤差*	黄道と赤道のずれ(黄赤交角)によって生じる太陽の運行のズレや補正
	論黄赤内外差*	(地球の自転軸が公転面に対して傾いていることで生じる)季節ごとの昼夜の長さや太陽の出没位置の変化
	論白与黄赤道差*	白道・赤道・黄道の対応, 日月食や天体の位置を正確に予測するための幾何学
卷之四の内	天文総論之内	
卷之七の内	日月交食差	日食や月食の「計算上の予測と実際の観測とのズレ(食の時刻や規模の誤差)」
	論日度	太陽の天球面上の位置(角度)
卷之八の内	論日躔盈縮差	(地球の公転軌道が楕円であるために生じる)太陽の運動の速度変化
卷之十の内	論月度	月の天球面上の位置(角度)
	論月離遲疾差	月の天球面上の動き(月離)の速度変化
	定朔加減差	天体の平均的な動き(平均朔日=経朔)から, 太陽や月の運動の速度変化を計算し, 実際の新月(定朔)の日時を求めるための補正值(加減)
卷之十二	五星常变差	5つの惑星(水星・金星・火星・木星・土星)が, 規則正しい動き(常)からズレる現象やその計算(变差)
	論五星経度	5つの惑星(水星・金星・火星・木星・土星)の位置(黄経)
	論五星緯度	5つの惑星(水星・金星・火星・木星・土星)の位置(黄緯)

1680年の作とされる『授時發明』は、黄道・赤道・白道の変換に関する3条を選び、解釈文と図を交えて計算手順を解き明かしたものである。「黄赤道の差を論ず」「黄赤内外の差を論ず」「白道と黄赤道の差を論ず」と題された章立てで、『管窺輯要』の各文に対して、1字下げで計算例が示されている。この3編は、授時暦に新たに採用された計算方法(郭守敬の五新術, §5.2)の最後の3つに相当する。

「黄道・赤道差を求める算法」について、関の解釈の部分の書き下し文[22]とそれらの解説を表14に添える。図8は、説明に用いる各点の記号を説明したものである。目的は、太陽Aの位置を黄道座標(弧BA, 長さ l)で測定したとき、赤道座標(弧CI, 長さ a)を求めることである。関は、円周を 365.25° 、直径 $d = 121.75$ の円を考えている(すなわち円周率を3とするが、直線の長さの単位と弧の長さの単位が異なることに注意)。関は、例として、弧BAが 45° の場合で計算例を示している。使われる数学は、会円術(と、それを解くための4次方程式の解法)・三平方の定理・方べきの定理・三角形の相似である。

「黄赤内外の差を論ず」の目的は、季節によって変化する太陽の南中高度(求めているのは天の北極からの角度なので、緯度に依存しない)を求めることである。使われる数学は上記と同じである。夏至や冬至のとき以外でも求められる手法になっている。

両者とも現代数学を使う手法に比べれば、遠回りで洗練されていないが、授時暦で使われた手法を完全に理解していることがわかる。もう一編、「白道と黄赤道の差を論ず」も含めた解説は、将来に回す。

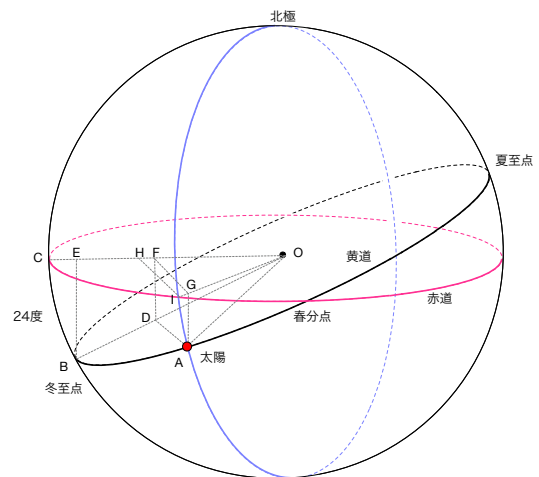


図8: 『授時發明』の「黄道・赤道差を求める」図。記号は[22]と同じとした。

表 14: 関孝和全集『授時發明』の「黄赤道の差」の計算. 書き下し文は岩波本 [22] のもの.

『授時發明』書き下し文	解説	備考
<p>仮如 (たとへば)、黄道の半弧背四十五度を以てこれを求む。</p> <p>天元の一を立て黄道の矢と為す。</p> <p>これを自して天径に因る黄道半弧背弦の差と為す。</p> <p>左に寄す。</p> <p>黄道半弧背を列し、天径一百二十一度太を以てこれに乗じて得る内、左に寄せたるを減じて、余りこれを自して、天径幕に因る黄道半弧弦幕と為す。</p> <p>再び寄す。</p> <p>天径を列し、内、黄道の矢を減じて、余りを黄道の矢を以てこれに乘じ、黄道半弧弦幕と為す。</p> <p>天径幕を以てこれに相乗して得る数と再び寄せたるを相消して開方の式を得る。</p> <p>以て三乗の方にこれを開き、黄道の矢一十七度三十二分五十三秒を得る。</p>	<p>解説</p> <p>黄道の弧の長さ (半弧背 BA) を $\ell = 45^\#$ とする。</p> <p>求めたい「黄道の矢 BD」を x と置く。</p> <p>x を 2 乗して、直径 d で割った値は、黄道半弧背弦 (AD, 長さ p_1) との差 $\ell - p_1$ と等しくなる. $\frac{x^2}{d} = \ell - p_1$</p> <p>$x^2 = d(\ell - p_1)$ とする。</p> <p>ℓ に対して、$d = 121.75$ を乗じ、先の x^2 を減じ、その差を 2 乗して d^2 で割る式の値は、p_1^2 となる. $(d\ell - x^2)^2/d^2 = p_1^2$</p> <p>$(d\ell - x^2)^2 = d^2 p_1^2$ (式 1)</p> <p>d に対して x との差をとり、x をかけた値は、p_1^2 と等しくなる. $p_1^2 = x(d - x)$</p> <p>d^2 を両辺にかけて $d^2 p_1^2 = d^2 x(d - x)$ とする. 先に得た (式 1) と等しいと置く (相消す). $(d\ell - x^2)^2 = d^2 x(d - x)$ これより、解くべき式が得られる。</p> <p>この 4 次方程式を解くと、実数解として $x = 17.3253^\#$ を得る. 黄道の矢 BD が求められた。</p>	<p>備考</p> <p>太陽が黄道の位置 A (弧 BA の長さ ℓ) にある. これに対応する赤道の弧の長さ CI を求めるのが目的. 天径 (直径) を $d = 121.75$, 円周を $365.25^\#$ (円周率 3) としている.</p> <p>(天元術による変数立て)</p> <p>会円術の式 (27) $\ell - p = \frac{x^2}{d}$ を適用.</p> <p>太は $3/4$.</p> <p>円の幾何学的性質 (方べきの定理) を適用. 半弦の 2 乗は「矢」と「直径から矢を引いた残り」の積に等しい.</p> <p>以下の 4 次方程式が導かれる.</p> $x^4 + (d^2 - 2d\ell)x^2 - d^3x + (d\ell)^2 = 0$ <p>「三乗の方」とは 4 次方程式 (最高次が x^4) のこと. 授時曆は 100 進法 (1 度 = 100 分、1 分 = 100 秒).</p>
<p>黄道の矢を列し、これを自乗して得る数を実と為す。天径を以てこれを除し、黄道の半弧背弦の差二度四十六分を得る。</p>	<p>x^2 を d で割り、$\ell - p_1$ を得る. $\ell - p_1 = 2.46$ を得る。</p>	
<p>黄道の半弧背弦の差を以て黄道の半弧背を減じて、余り四十二度五十四分を黄道の半弧弦と為す。</p>	<p>$\ell = \ell$ の両辺から $\ell - p_1 = 2.46$ を減じることで、$p_1 = 42.54$ を得る。</p>	<p>$p_1 = \ell - 2.46 = 42.54$ を得る。</p>
<p>黄道の矢を以て天の半径六十零度八十七分半を減じ、余り四十三度五十四分半を黄赤道の小弦と為す。</p>	<p>半径 $r = d/2 = 60.875$ より、矢 x を引き、余りを黄赤道の小弦 (DO, 長さ q_1) が得られる $q_1 = r - x = 43.545$.</p>	<p>ここで黄道面上での話が終わる。</p>
<p>黄赤道の小弦を列し、黄赤道の大股五十六度零六分半 (二至出入する赤道の内外二十三度九十分を以て半弧背と為す。術に依りて黄赤道の大弧矢四度八十一分を求め得て、これを以て天の半径を減ずるの余りなり) を以てこれに相乗して得る数を実と為す。黄赤道の大弦六十零度八十七分半を以てこれを除し、黄赤道の小股四十零度零九分を得る。</p>	<p>(夏至または冬至のとき、黄道と赤道の間は $23.90^\#$ の弧の長さ BC がある. 先の術をここでも用いて、黄赤道の大弧矢 (CE, 長さ x_0) を $x_0 = 4.81^\#$ と求め、天の半径 r から x_0 を引いた余りで得られる $r - x_0 = 56.065^\#$ を黄赤道の大股 (EO, 長さ q_0) とする.) 黄赤道の小弦 (DO) q_1 と、黄赤道の大股 q_0 を乗じたものを黄赤道の半径 $r = 60.875$ で割ることで、黄赤道の小股 (FO, 長さ ω) $\omega = 40.09$ を得る。</p>	<p>夏至または冬至のとき、原点と黄道面と赤道面で囲まれる円弧の話になる. 三角形 OEB と三角形 OFD の相似を用いて、黄赤道の小股 (FO, 長さ ω) を求める。</p>

<p>黄赤道の小股を列し、これを自乗して得る数と、黄道の半弧弦これを自乗して得る数とを二位相併せて共に得る数を実と為す。平方にこれを開き、赤道の小弦五十八度四十五分三十秒を得る。</p>	<p>黄赤道の小股 (FO, ω) の 2 乗と黄道の半弧弦 (AD) を 2 乗して加えた数を実とする。平方にこれを開き、赤道の小弦 (GO) を得る。 赤道の小弦 (GO) $= \sqrt{(\text{小股 (FO)})^2 + (\text{黄道半弧弦 (AD)})^2} = \sqrt{40.09^2 + 42.54^2} \approx 58.455^\#$</p>	<p>三角形 OFG に三平方の定理を適用。AD=GF としているが、本来は、赤道面と黄道面の傾きを考慮すべき。</p>
<p>黄道の半弧弦を列し、天の半径を以てこれに相乗して得る数を実と為す。赤道の小弦を以てこれを除し、赤道の大股四十四度三十零分四十三秒を得る。就いて赤道の半弧弦と為す。</p>	<p>$\frac{\text{黄道の半弧弦 (GF)} \times \text{天の半径 (OI)}}{\text{赤道の小弦 (OG)}}$ を計算することによって、赤道の半弧弦 (IH) を得る。44.3043[#] となる。この弦 IH (長さ p_3) が求められたので、弧 IC (長さ a) が求められることになる。</p>	<p>三角形 OGF と三角形 OIH が相似なので、OG : GF = OI : IH .</p>
<p>黄赤道の小股を列し、黄赤道の大弦を以てこれに相乗して得る数を実と為す。赤道の小弦を以てこれを除し、赤道の横の大鈎四十一度七十五分を得る。</p>	<p>$\frac{\text{黄赤道の小股 OF}_{(40.09)} \times \text{大弦 OI}_{(60.875)}}{\text{赤道の小弦 OG}_{(58.455)}}$ より、赤道の大鈎 OH を得る。41.75.</p>	<p>三角形 OGF と三角形 OIH が相似なので、OF : OG = OH : OI .</p>
<p>以て半径を減じて、余りを赤道の横の弧矢と為す。赤道の横の大鈎を以て天の半径を減じ、余り一十九度一十二分半を赤道の横の弧矢と為す。</p>	<p>赤道面での弧 OIC にて、弧矢 (CH) を求める。 (半径)-(大鈎 OH)=(弧矢 CH)=19.125</p>	<p>赤道面の OIC にて、会円術を適用する準備。</p>
<p>これを自して円径の如く而も一にして、赤道の半背弦の差を得る。赤道の横の弧矢を列し、これを自乗して得る数を実と為す。天径の如く而も一にして、赤道の半弧背弦の差三度零零四十二秒を得る。</p>	<p>$CH^2/\text{直径} = 3.0042^\#$ となる。これは、弧 IC (長さ a) - 弦 IH (長さ p_3) に等しい。</p>	<p>会円術を適用。 $a - p_3 = CH^2/d$</p>
<p>赤道の半弧弦に去加して赤道の半弧背と為す (去は当に以て作るべし)。赤道の半弧背弦の差を以て赤道の半弧弦を加入して、赤道の半弧背四十七度三十零分八十五秒を得る (余はこれに倣へ)。図に云く (朱を以て経を見、墨を以て緯を見る)</p>	<p>得られた値 3.0042[#] に、弦 IH (長さ $p_3 = 44.3043^\#$) を加えることで、弧 CI (長さ a) が求められる。47.3085[#]</p>	<p>これにより、「黄道上で冬至点から 45 度の位置にある太陽は、赤道上では 47.3085[#] の位置にあたる」</p>
<p>赤道の半弧背を列し、内、黄道の半弧背を減じて、余り二度三十零分八十五秒を黄赤道の極差と為す。</p>	<p>黄道との差は、2.3085[#] となる。</p>	
<p>稍 (やや) 庚午より減ず。この術、循弧宛転、実まことに天道と ふんごう 合す。(ふんごう は、月+勿+口) 最も微妙為 (た) り。古今に冠絶すと謂ふべし。</p>		<p>「(赤道の値が) わずかに庚午の値から減じられる。この算法は、曲線を巧みに扱い、実に天体の運行(天道)とぴったり合致している。最も精妙(極めて精密で奥深い)である。古今に比類なき(天下無双の)優れた術であると言わべきだろう。」(Google AI 訳)</p>