近畿和算セミナー（2026年6月13日）

太陰太陽暦の数学：招差法と会円術

概要

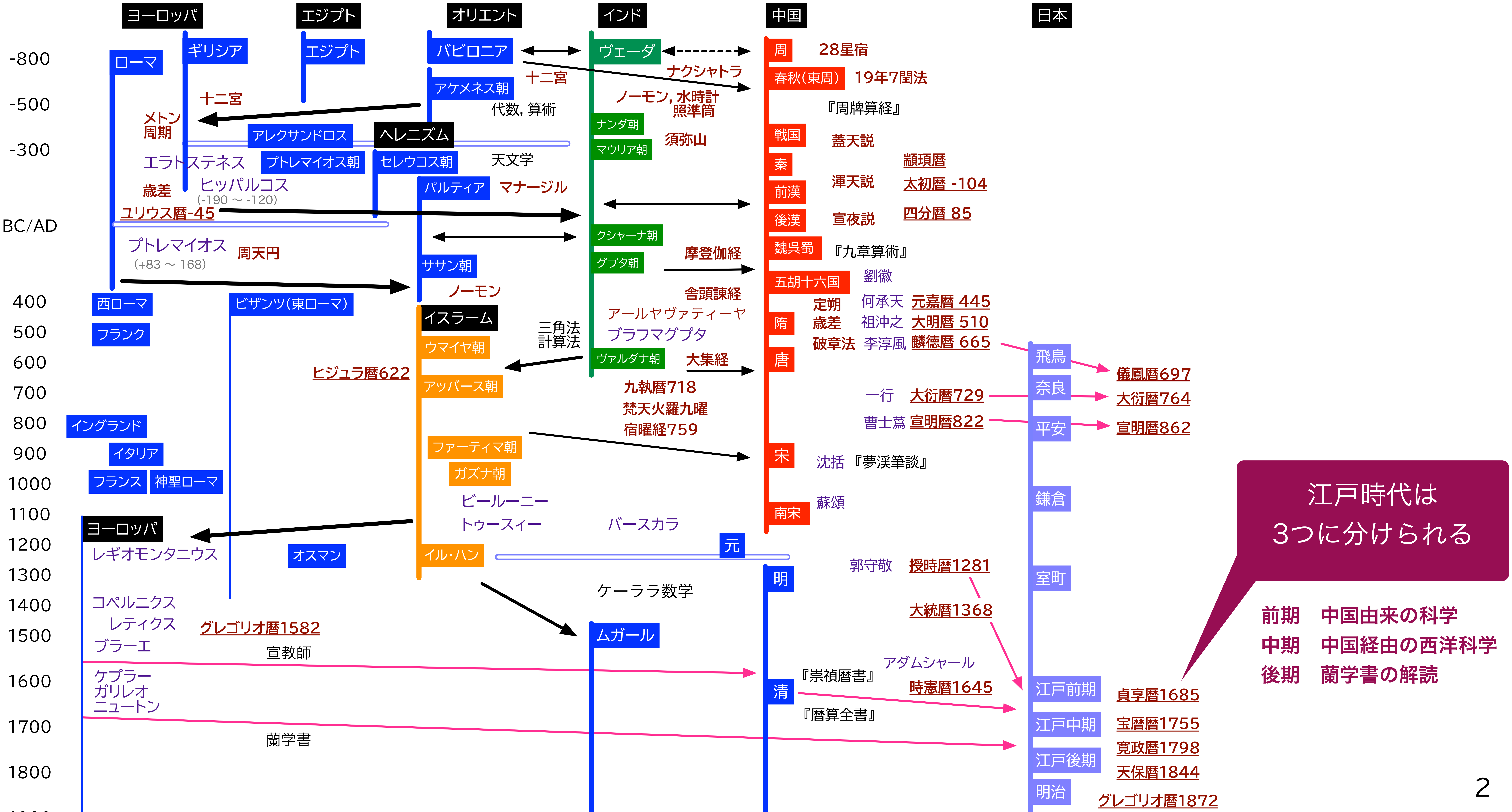
日本は古くから中国経由で天文学の知識を吸収してきた．改暦の必要に迫られた江戸時代前期，和算家も造暦に使われる数学の理解に参加した．ここでは，太陰太陽暦に含まれる天文学的背景をまとめ，数学的要素として補間公式と赤道黄道座標変換を確認する．付録で，関孝和の『授時発明（天文大成三条図解）』(1680 年）の「黄赤道の差」を解読する．

このプリント

このスライド

真貝寿明（大阪工業大学 情報科学部）
hisaaki.shinkai@oit.ac.jp
https://www.oit.ac.jp/labs/is/system/shinkai/

天文学史でみた文化の流れ



中国では独自の天文暦学が発展

表 12: 中国で使われた主な暦．(A は山＋而＋頁，B は王＋頁，C は登＋おおざと，D は言＋斤，E は火＋卓，F は草かんむり＋爲，G は目＋候)

時代名	暦名	使い始め	終わり	作成者	特徴	日本への影響
殷・周代					太陰太陽暦の原型，二十四節気が農耕の目安として整備	
秦–前漢	A B暦					
前漢	太初暦	前 104 年	84 年	C平・落下紘ら	中国初の計算体系が整った暦．24 節気を導入．	中国暦の基本モデルとして伝来．
前漢	三統暦		84 年	劉 D	食周期 135 月，暦元を過去におく上元積年法．	
後漢	四分暦	85 年	220 年	編D・李梵	1 年=365.25 日	日本で最初に公的に採用されたという説あり．
呉	乾象暦	223 年	280 年	劉洪	章法（19 年 7 閏月），月の遅疾（近地点移動，黄道白道の交点の逆行） 1 年 $= 365\frac{145}{589} = 365.2462$ 日，1 朔望月 $= 29\frac{773}{1457} = 29.53054$ 日．	
南朝宋	元嘉暦	445 年	509 年	何承天	定朔の導入．	飛鳥時代に伝来し、初の公暦に．
南朝梁	大明暦	510 年	589 年	祖沖之	歳差，破章法（391 年 144 閏月） 1 年 $= 365\frac{9589}{39491} (= 365.24281)$ 日 1 朔望月 $= 29\frac{2090}{3939} (= 29.5303)$ 日	元嘉暦とともに伝来．日本初期の暦法に多大な影響
隋	皇極暦	–	–	劉 E	日行盈縮，破章法（676 年に 249 閏月），歳差 (76.5 年で 1 度) 1 年 = 365.24454 日，1 朔望月 $= 29\frac{659}{1242} (= 29.53059581)$ 日	
唐	麟徳暦	665 年	728 年	李淳風	各計算の分母を 1340 に統一． 1 年 = 365.24478 日．	儀鳳暦の名で 697 年から採用．
唐	大衍暦	729 年	761 年	一行	太陽の動きに基づく定気法，月の速度変化． 1 年 = 365.2444 日．	吉備真備が持ち帰り，764 年から使用．
唐	五紀暦	762 年	821 年	郭献之	大衍暦を簡略・修正したもの．	大衍暦と併用される形で伝来．
唐	符天暦	–	–	曹士F	暦元を 660 年とした（近距法）．九曜（日/月/五星/羅 G/計都）の位置，1 年 = 365.2448 日．	暦博士や宿曜師が利用
唐	宣明暦	822 年	892 年	徐昂	定朔の計算法を改良（加減速） 1 年 = 365.2446 日．	平安～江戸初期まで約 800 年間使われた．
元	授時暦	1281 年	1367 年	郭守敬	定朔の計算法を改良（3 次補間）．イスラーム天文観測を取り入れ． 1 年 = 365.2425 日	貞享暦（渋川春海）作成のモデルになった．
明	大統暦	1368 年	1644 年	（元の暦を継承）	授時暦をほぼ踏襲し、定数を一部変更．	民間暦や改暦議論に大きな影響．
清	時憲暦	1645 年	1911 年	Adam Schall ら	西洋天文学の成果を取り入れ	江戸後期の寛政暦・天保暦の理論的基礎となった．
近代	グレゴリオ暦	1912 年	現在		世界標準の太陽暦	1872 年の日本の改暦と足並みを揃える形に．

1年＝365.2448日　とした宣明暦を
800年近く使い続けた日本では，暦が2日ずれてしまう
▶▶ 江戸初期，改暦の必要性が認識され，
中国の授時暦が研究された．

現在は1年＝365.2422日の
グレゴリオ暦を使用

日本

1年＝365.2448日

862 宣明暦

1685 貞享暦

1755 宝暦暦

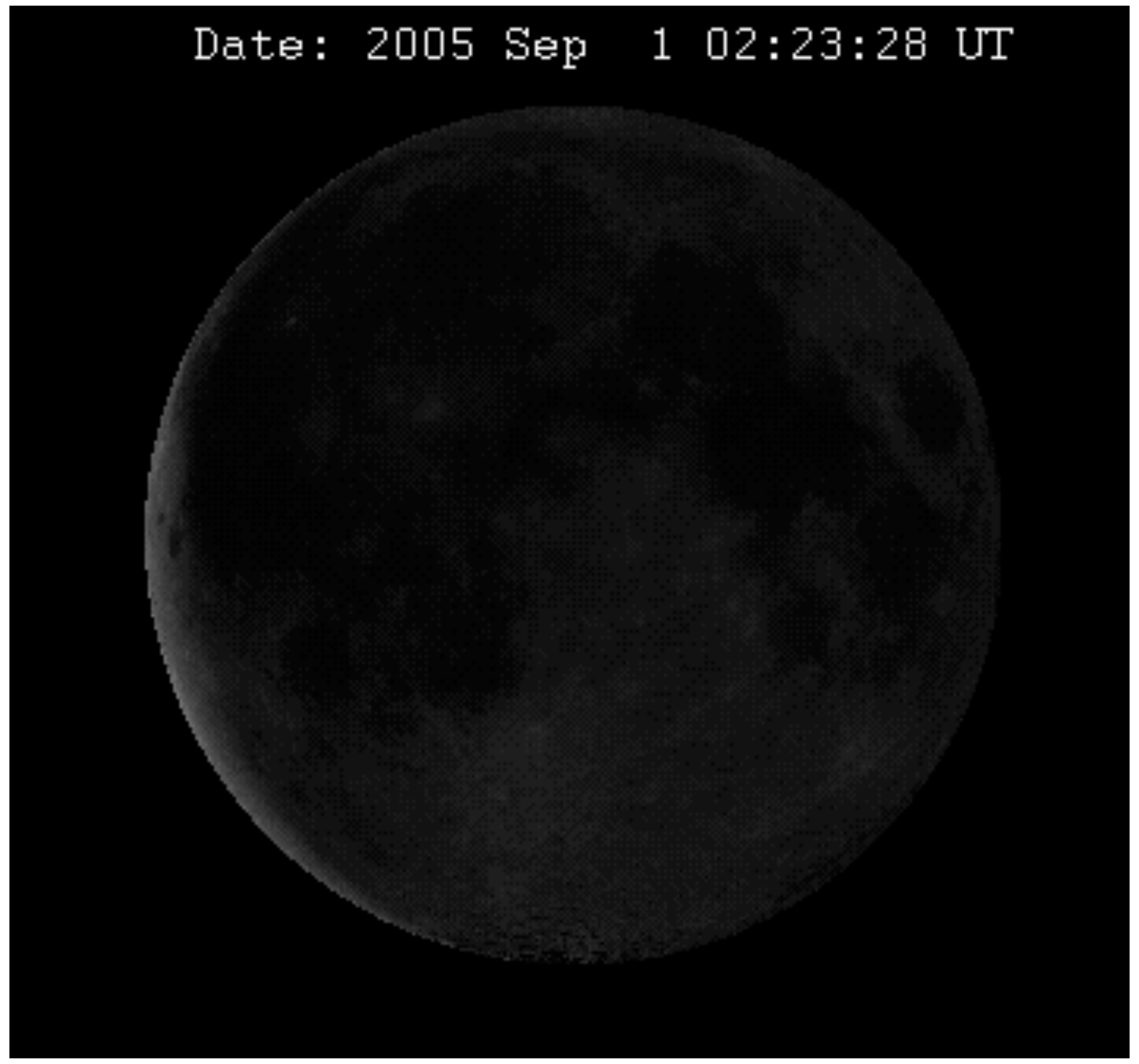
1798 寛政暦

1844 天保暦

暦の概略

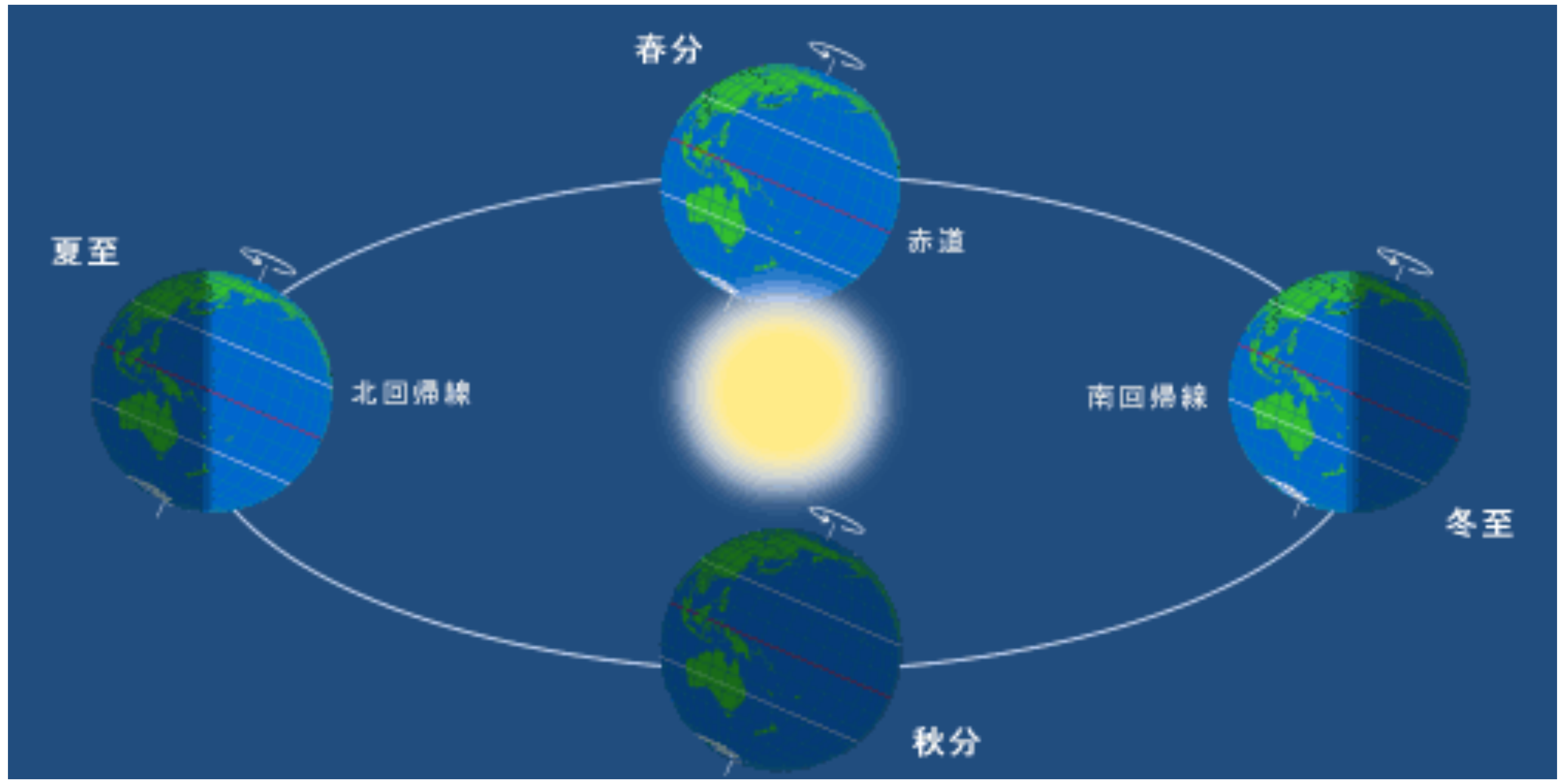
表 1: 暦の３種類

太陰暦 lunar calendar	朔望月の長さを唯一の基本定数とする．現在のイスラム諸国で使用されるヒジュラ暦 (Hijri calendar) は西暦 622 年を紀元とする 1 年 354 日の周期．第 9 月が断食月（ラマダン，Ramadan）になる．
太陽暦 solar calendar	太陽年（厳密には回帰年）の長さを基礎とする．エジプトが起源．ユリウス暦（Julian calendar, 前 45 年以降）では, 1 年を 365.25 日とした．グレグリオ暦(Gregorian calendar, 1582 年以降）では，1 年を 365.2425 日とする．現在の多くの国で使用．
太陰太陽暦 luni-solar calendar	上記 2 者の折中．毎月の日数は朔望月を基礎で決め，1 年の長さがほぼ太陽年となるように工夫する．バビロニア・ギリシャで使用され，中国・日本でも過去に使われた．



1朔望月＝29.53日

29日12時間44分
（月の形が一周する時間）



1太陽年＝365.2422日

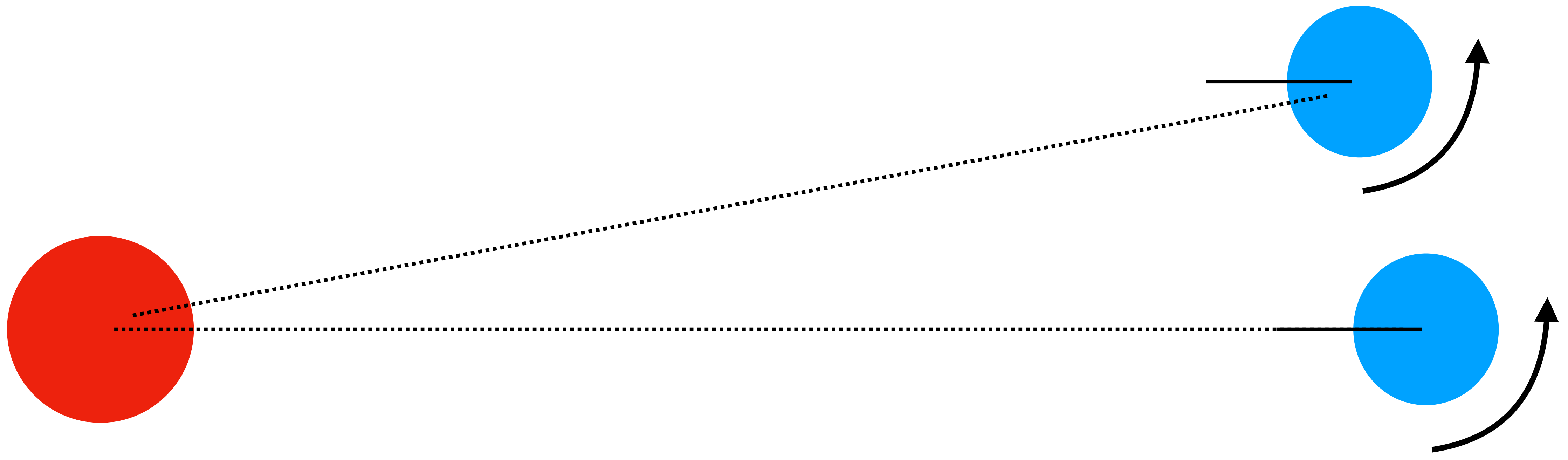
1日の長さ，1年の長さ

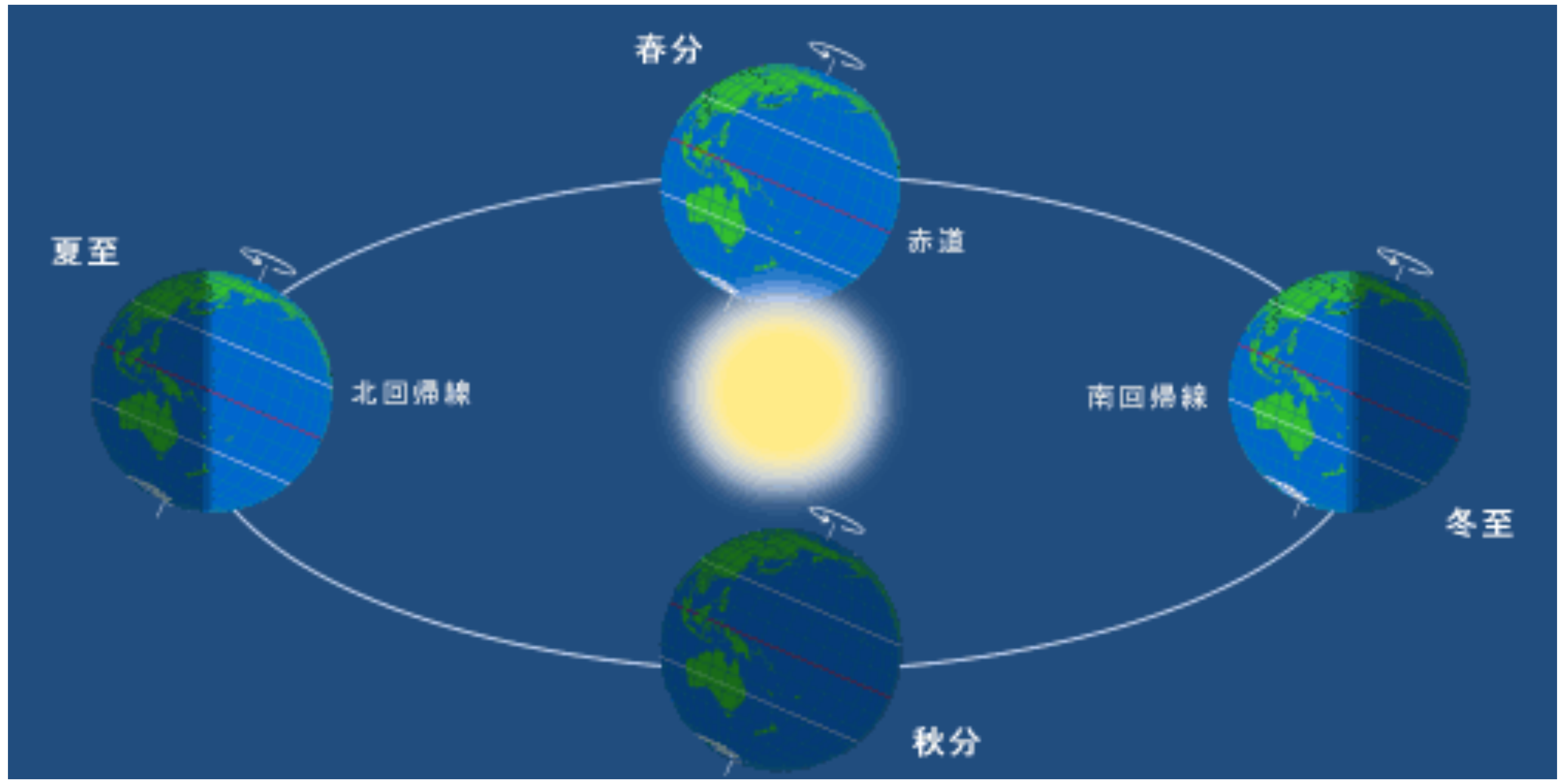
表 2: 1 日の長さの定義

名称	基準	長さ	備考
太陽日 (solar day)	太陽が南中から南中	$24^{h}00^{m}00^{s}$	視太陽日，真太陽日ともいう
恒星日 (sidereal day)	自転の時間．星の位置を基準	$23^{h}56^{m}04.09^{s}$(平均値)	楕円軌道のため時期で変化

表 3: 1 年の長さの定義

名称	基準	長さ	備考
太陽年，回帰年 (Tropical Year)	春分点から春分点	365.24219 日	暦の基準．季節変化と合致.
近点年 (Anomalistic Year)	近日点から近日点	365.2594 日	近日点移動のため，回帰年より長い
恒星年 (Sidereal Year)	星座の位置に対する 1 周	365.2564 日	地球が 360 度公転する時間



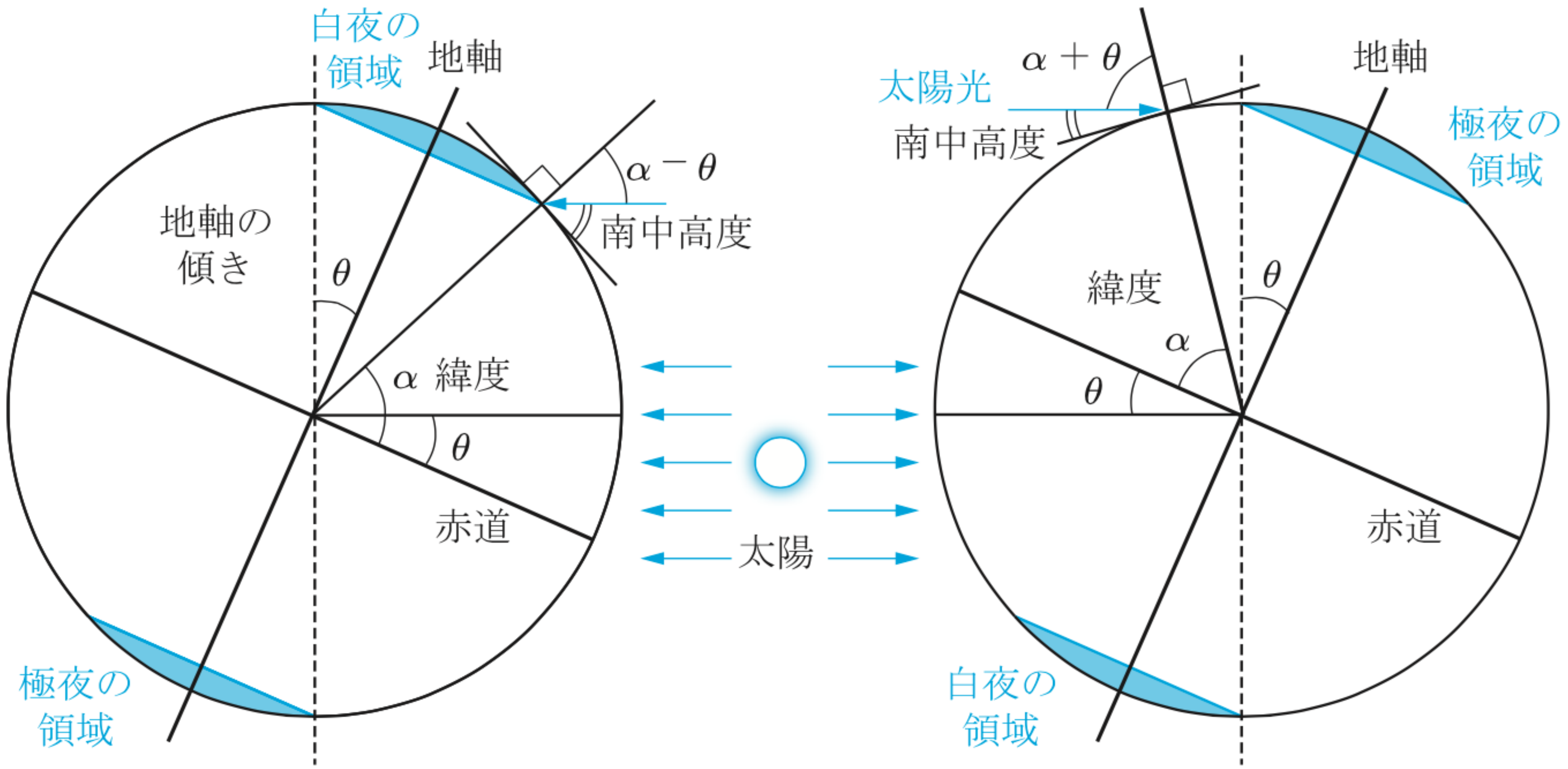


1太陽日＝24時間
1恒星日＝23時間56分（平均）

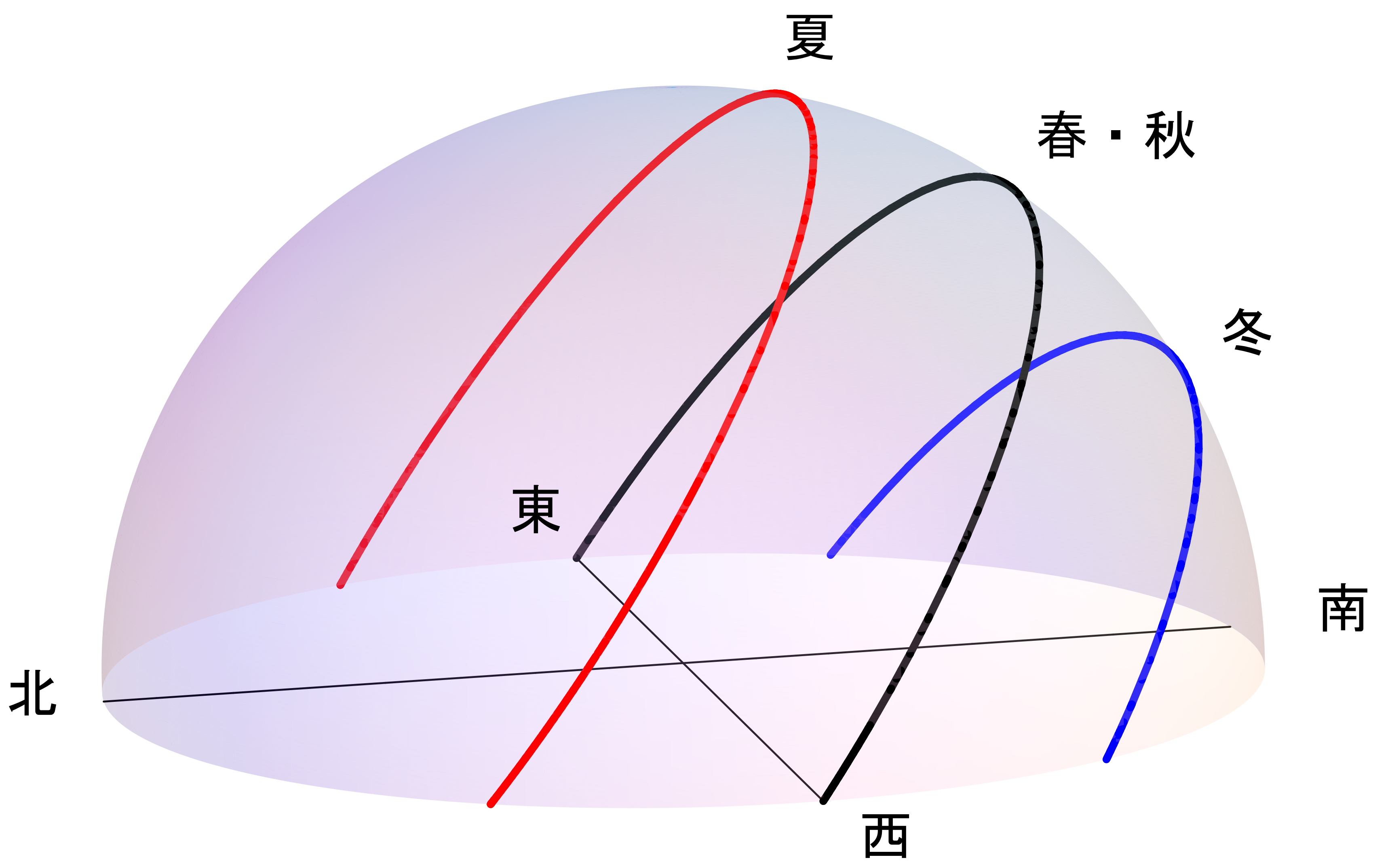
1太陽年＝365.2422日

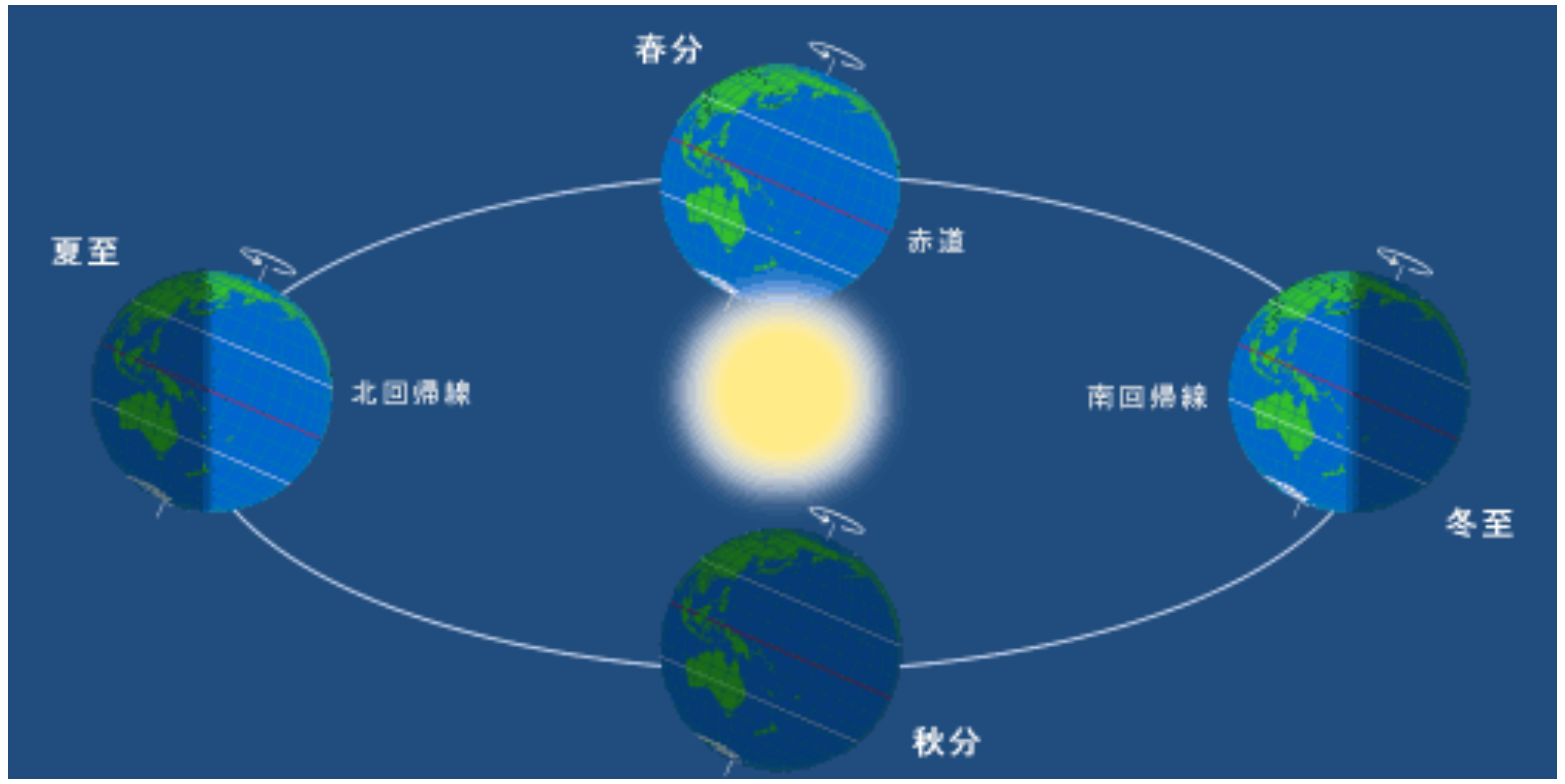
地球の自転軸は，公転面から23.4度傾いている ➡ 季節が生じる

夏至の頃（6月22日頃）　冬至の頃（12月22日頃）



（a）夏至の頃　（b）冬至の頃



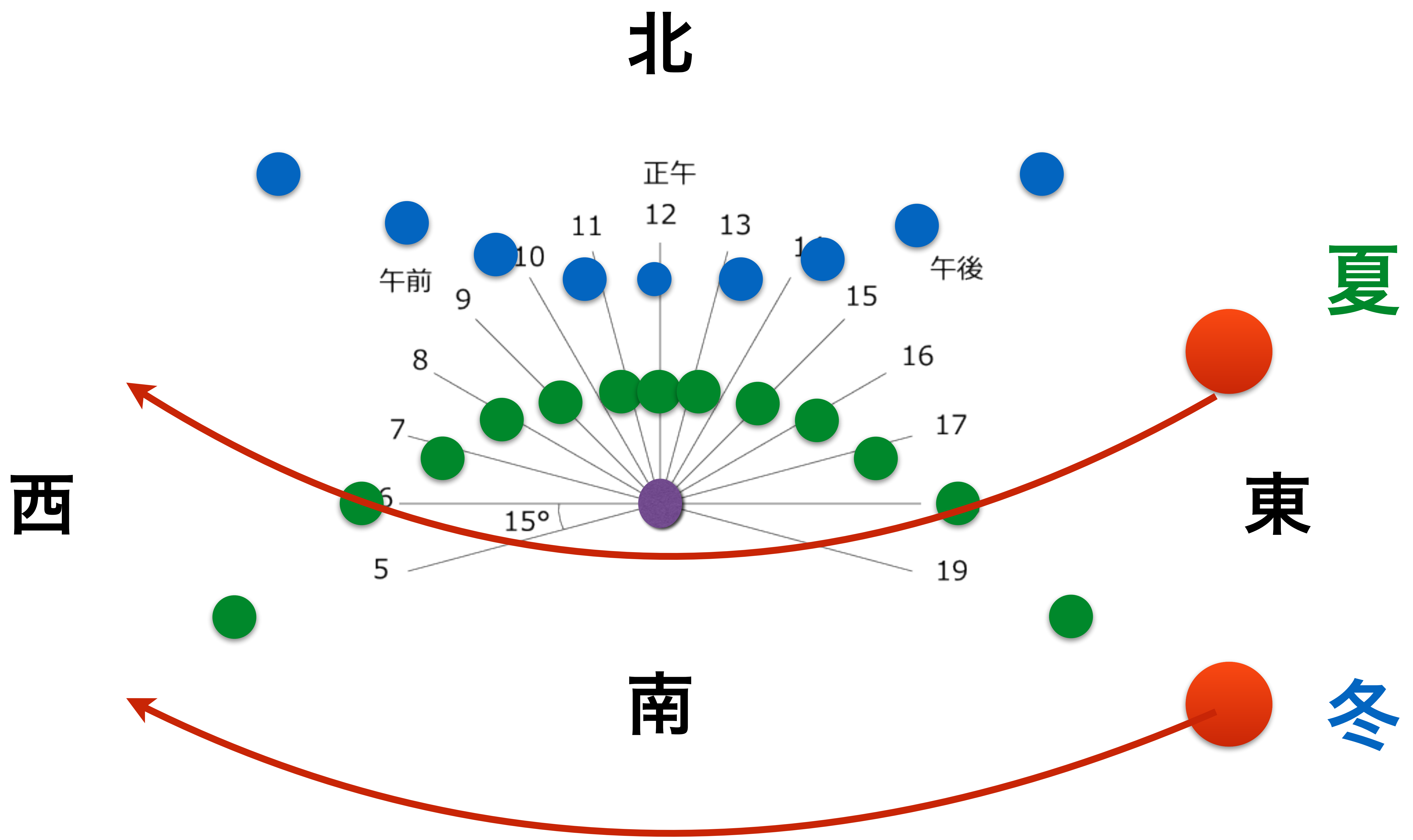


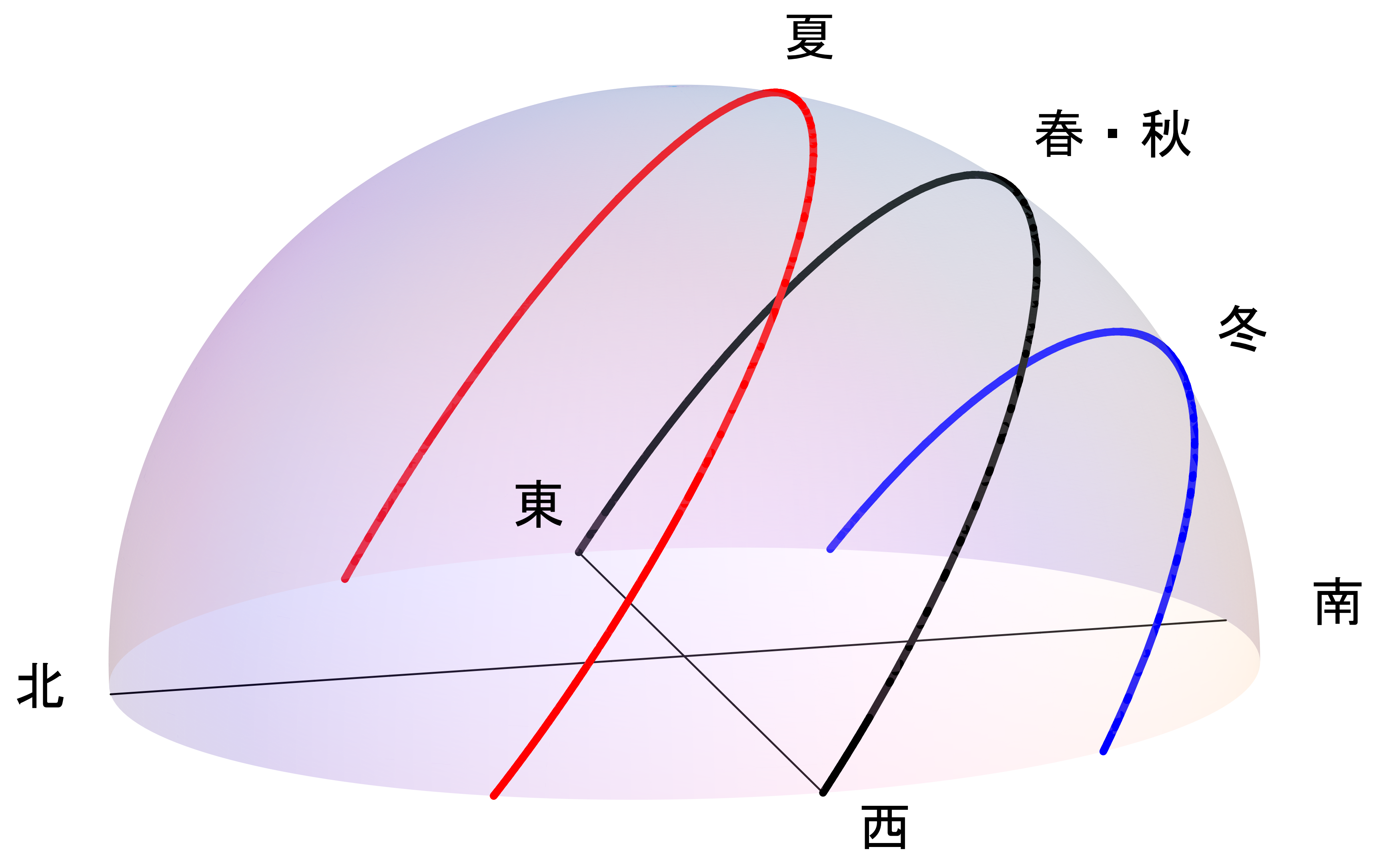
南中高度
北緯35度では78.5度

南中高度
北緯35度では31.6度

1太陽年＝365.2422日

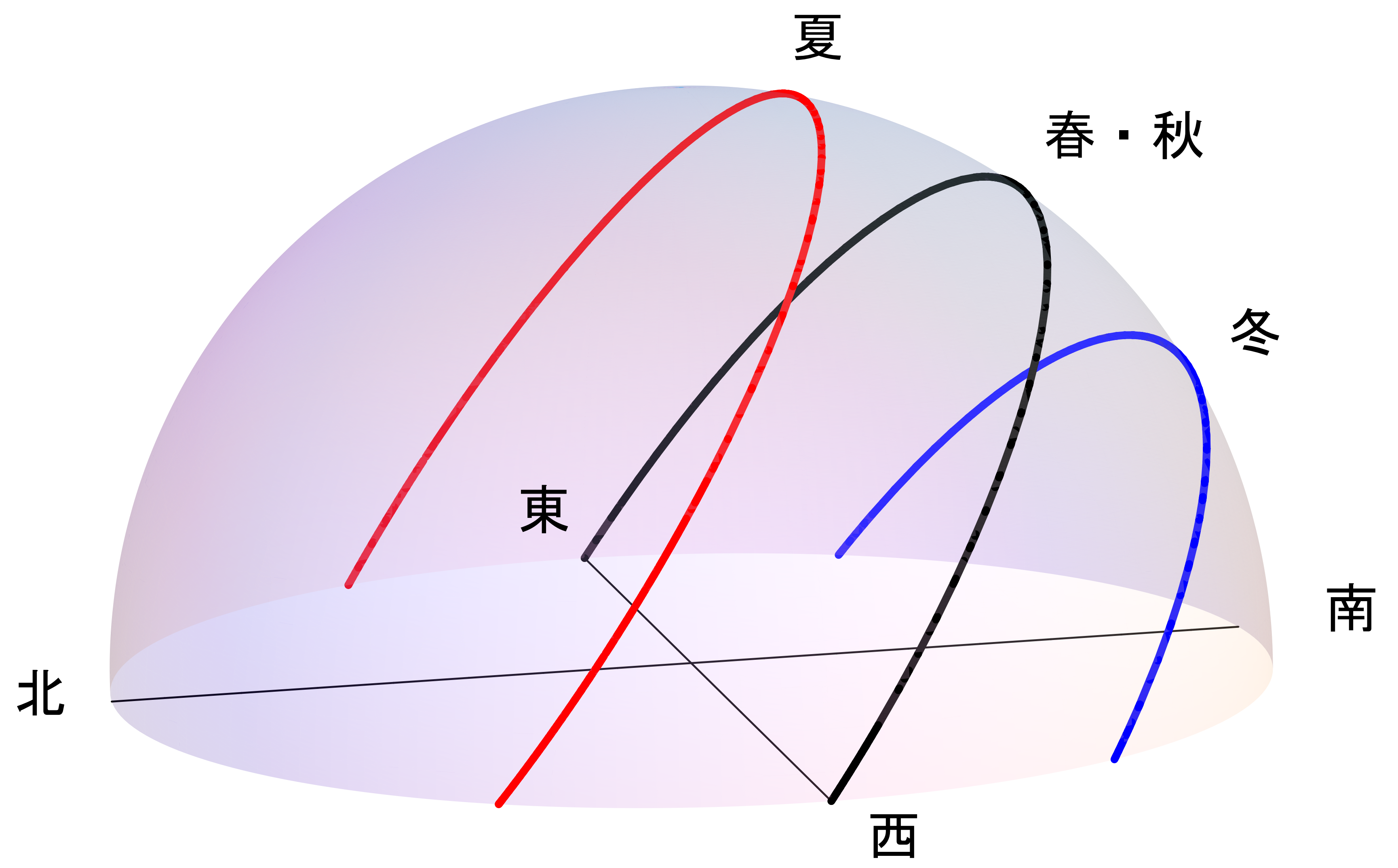
日時計の影の動き

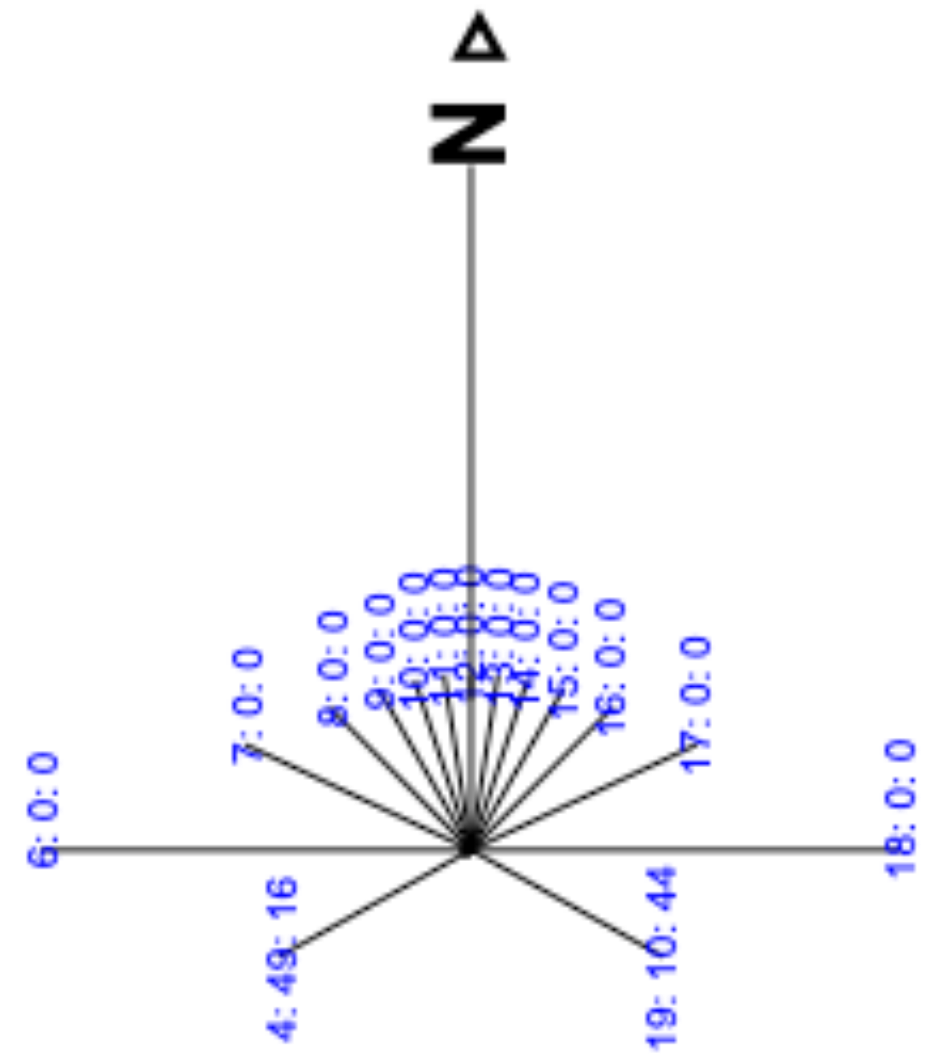




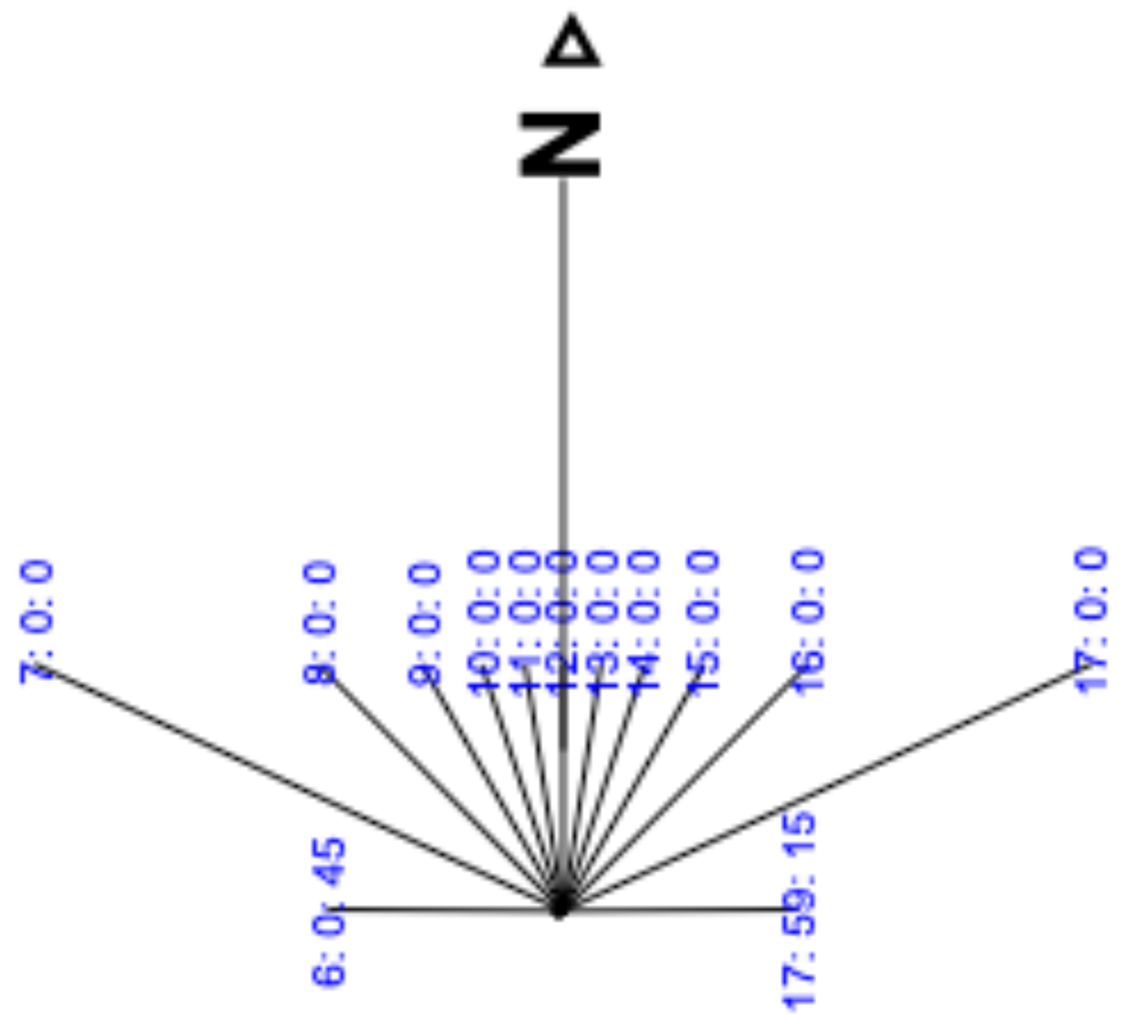
日時計の影の動き

南中時の影の長さで比べると，
夏至の頃が一番短い
冬至の頃が一番長い
春分・秋分の日は，太陽が真東から真西へ

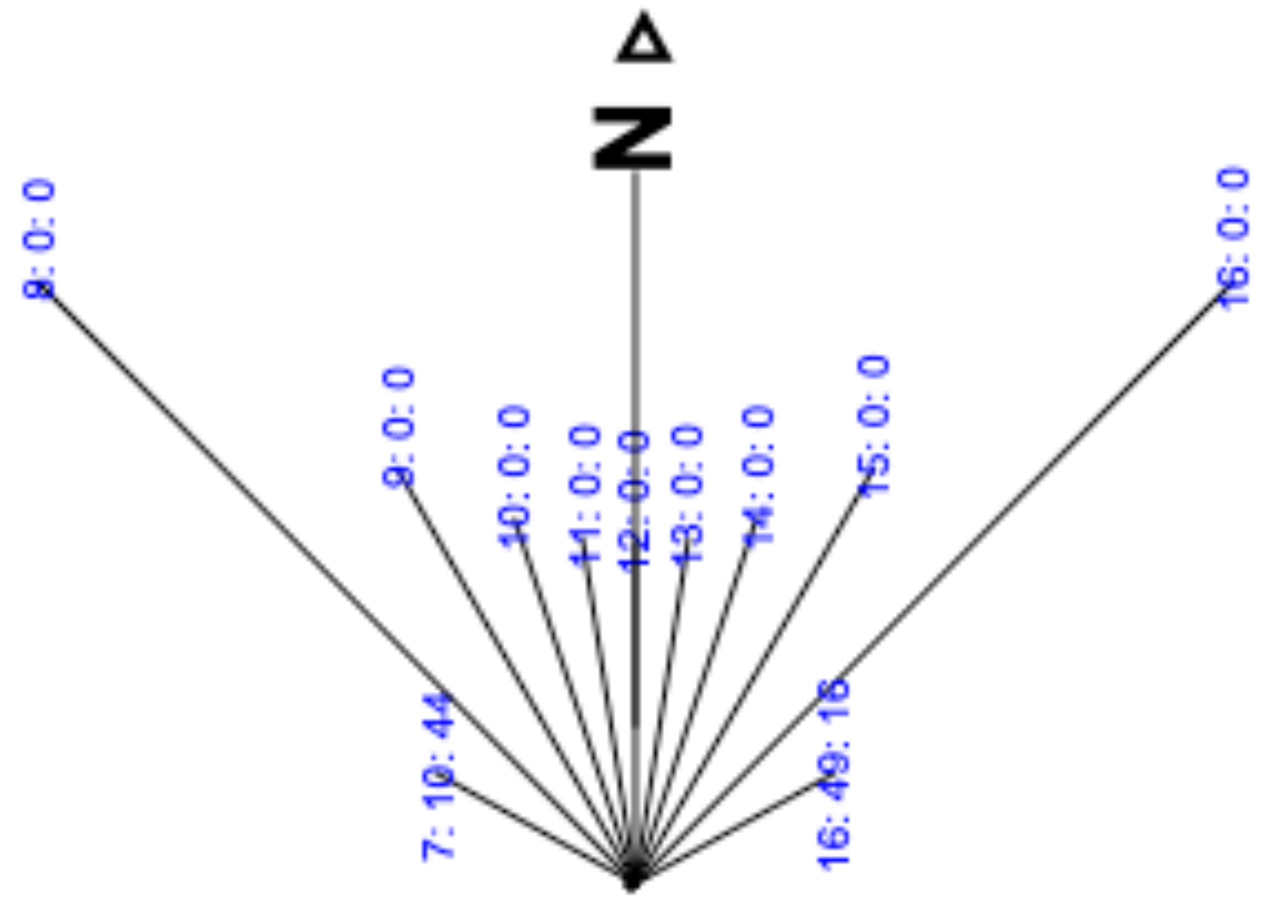




夏至の頃（6月22日頃）



春分・秋分の頃



冬至の頃（12月22日頃）

https://demonstrations.wolfram.com/UniversalSundial/

現在のカレンダー(太陽暦)

＊地球の公転周期（1太陽年 = 365.2422日）を1年とする暦

→ 閏日(うるうび)を入れて調整する

4年に一度, うるう日を入れる.	2020, 2024, 2028, ...
100年に一度, うるう日を入れない.	1700, 1800, 1900, ...
400年に一度, うるう日を入れる.	1600, 2000, 2400, ...
365.2422x400	=146096.88 日
365x400+97	=146097 日

グレゴリオ暦 (1582年以降) のルール

ユリウス暦 (BC45年1月1日以降)

＊365.25日を1年とする暦

4年に一度, うるう日を入れる.

→ 1年が365日or365日であることを基準に1時間の長さ, 1分の長さ, 1秒の長さを決めた.

→ 1967年, 1秒の長さを原子時計を基準に決めることにした.

1秒 = セシウム133原子が放射するマイクロ波の振動を9,192,631,770回カウントした時間

＊地球の自転がだんだん遅くなることから, ときどき閏秒をいれることになった

→ ときどき, 閏秒を入れる. 2017年1月1日9時59分60秒

1972年から2017年まで27回実施（27秒追加）

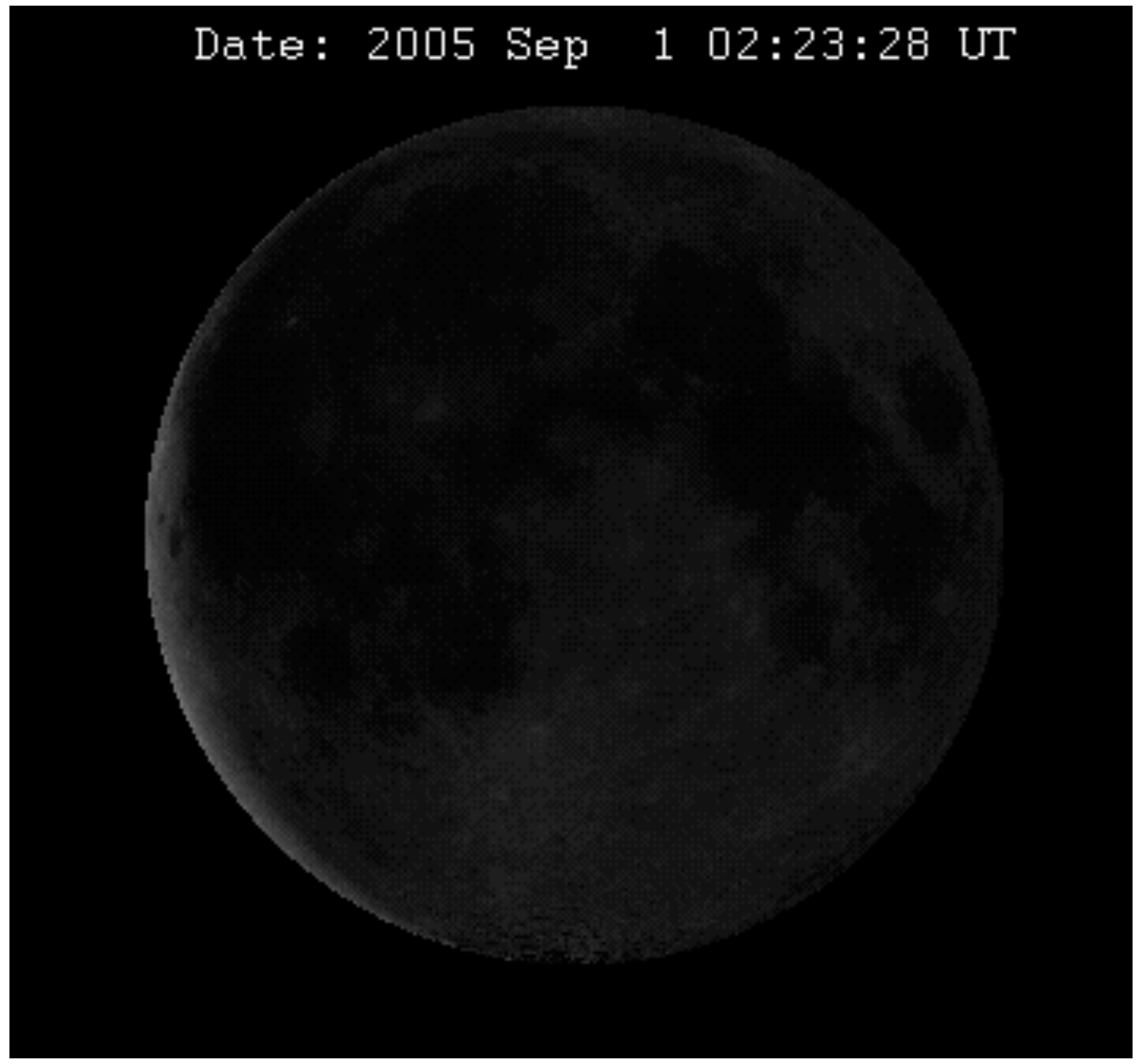
しかし, 閏秒の挿入はシステム上混乱を引き起こすようになった.

1980年の世界協定時UTCで設定されたGPSは19秒遅れのまま（受信機側で修正対応）

→ 閏秒を廃止する議論が起きたが, とりあえず2040年までは現状のまま, ときどき, 閏秒を入れる.

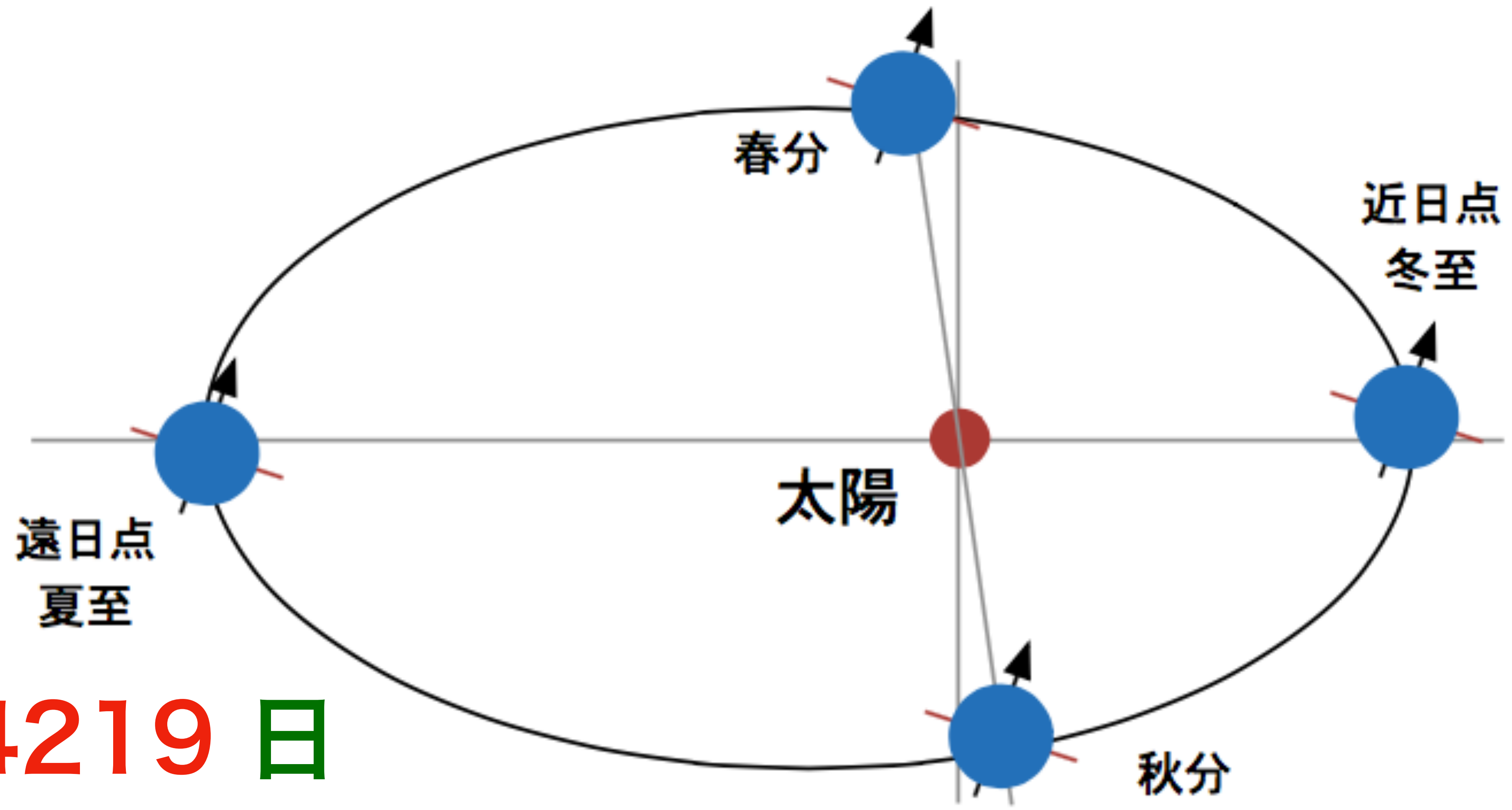
太陰太陽暦の問題

＊月の満ち欠け（新月から次の新月まで、約29.5日）を基準にして1か月（朔望月）を定める暦



1朔望月＝29.530589日

29日12時間44分
（月の形が一周する時間）



1太陽年＝365.24219 日

1ヶ月を30日とする月（**大月**（たいげつ））と29日とする月（**小月**（しょうげつ））を交互にすれば，1ヶ月は平均して29.5日になる．しかし，これでは若干不足するので，どこかで大月を2回続ける（**連大**（れんだい））必要がある．

連大を入れるタイミングは，$0.5/(29.530589-29.5) \simeq 16.35$ 月ごとになる．

1朔望月を12回繰り返すと354.4日であり，毎年11日（10.875日）ずれが生じる．そこで，閏月を入れる年と入れない年を設けて調整する．閏月も大月と小月の可能性があり，この**閏月をどのように入れるのか**が太陰太陽暦の最も重要な課題であった．

太陰太陽暦の要素：19年7閏の法（メトン周期，章法）から破章法へ

1年が12か月(約354日)とするため, 太陽暦より約11日短く, 季節とずれが生じる.

→　閏月(うるうづき)を入れて調整する　太陰太陽暦

約3年に一度, 閏月を入れる（正確には19年に7回）　太陽暦19年＝235朔望月＝6940日=メトン周期

365.2422x19　　　　　=6939.6018 日

29.530589x(19x12+7)=6939.6884 日

しかし, 219年で1日ずれる　→ 改暦

1 年を $365\frac{1}{4}$ 日とすると，1 章 19 年では，$6939\frac{3}{4}$ 日となって端数がでる．4 章 76 年とすれば端数が生じない．76 年周期は前 4 世紀の天文学者の名をとってカリポス周期 (Calippus' cycle) と呼ばれる．中国の四分暦では，76 年周期を蔀(ほう)と呼んだ[*7]．

長い間, 一九年七閏の法を使うと, 誤差が生じるため, 閏月の出現頻度を減少させる必要がある.

玄始暦(412年)では, 章法を廃止し, 600年に221回の閏月を入れた(19年間に6.9983回の閏月).

南朝宋の祖沖之(429-500)は,「破章法」と呼ぶルールを導入し, 391年間に144回の閏月を入れた(19年間に6.9974回の閏月)

連分数展開によるメトン周期の算出

小数を近似分数で表す手法に連分数を用いる方法がある．いま，ある小数 x が，

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cdots}}} \equiv \{a, b, c, d, \cdots\}$$

という連分数で表されるとき，近似分数は，

$$a + \frac{1}{b}, \quad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}, \quad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}, \cdots$$

円周率

- 円周率 3.1415926535 を連分数にすると，

$$3.1415926535 = \{3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 6, 2, 13, \ldots\}$$

となり，これから近似分数は，

$$\frac{22}{7}, \quad \frac{333}{106}, \quad \boxed{\frac{355}{113}}, \quad \frac{103993}{33102}, \quad \frac{104348}{33215}, \quad \cdots$$

メトン周期

- 現在値の太陽年/朔望月を連分数にすると，

$$\frac{365.24219}{29.530589} = \{12, 2, 1, 2, 1, 1, 17, 3, 14, 1, 7, 3, 3, 1, 2\}$$

となり，これから近似分数は，

$$\frac{25}{2}, \quad \frac{37}{3}, \quad \frac{99}{8}, \quad \frac{136}{11}, \quad \boxed{\frac{235}{19}}$$

となってメトン周期（19 年で 235 月）が出てくる．あるいはもっと古代の太陽年/朔望月の値を用いても同じである．

$$\frac{365.25}{29.53} = \{12, 2, 1, 1, 1, 1\} \quad \Longrightarrow \quad \frac{25}{2}, \quad \frac{37}{3}, \quad \frac{99}{8}, \quad \frac{235}{19}, \quad \frac{7384}{597}$$

中国の暦で使われた1年/1月の長さ

『藪内清著作集1』(臨川, 2017)付録より

付録

暦名	1 年（日）	1 月（日）
太初	365 385/1539(統法), 365.2502	29 43/81(日法), 29.53086
四分	365 1/4(日法), 365.2500	29 499/940(蔀法), 29.53085
乾象	365 145/589(紀法), 365.2462	29 773/1457(日法), 29.53054
景初	365 455/1843(紀法), 365.2469	29 2419/4559(日法), 29.53060
三紀	365 605/2451(紀法), 365.2468	29 3217/6063(日法), 29.53060
玄始	365 1759/7200(蔀法), 365.2443	29 47251/89052(日法), 29.53060
元嘉	365 75/304(度法), 365.2467	29 399/752(日法), 29.53058
大明	365 9589/39491(紀法), 365.2428	29 2090/3939(日法), 29.53059
正光	365 1477/6060(蔀法), 365.2437	29 39769/74952(日法), 29.53060
興和	365 4117/16860(蔀法), 365.2442	29 110647/208530(日法), 29.53060
天保	365 5787/23660(蔀法), 365.2446	29 155272/292635(日法), 29.53060
天和	365 5731/23460(蔀法), 365.2443	29 153991/290160(日法), 29.53071
大象	365 3167/12992(蔀法), 365.2438	29 28422/53563(日法), 29.53063
開皇	365 25063/102960(蔀法), 365.2434	29 96529/181920(日法), 29.53061
大業	365 10363/42640(度法), 365.2430	29 607/1144(日法), 29.53060
皇極	365 11406.5/46644(気日法), 365.2446	29 659/1242(朔日法), 29.53060
戊寅	365 2315/9464(度法), 365.2445	29 6901/13006(日法), 29.53060
麟徳(1)	365 328/1340(総法), 365.2448	29 711/1340(総法), 29.53060
大衍	365 743/3040(通法), 365.2444	29 1613/3040(通法), 29.53059
五紀	365 328/1340(通法), 365.2448	29 711/1340(通法), 29.53060
正元	365 268/1095(通法), 365.2447	29 581/1095(通法), 29.53059
観象	未詳	未詳
宣明	365 2055/8400(統法), 365.2446	29 4457/8400(統法), 29.53060
崇玄	365 3301/13500(通法), 365.2445	29 7163/13500(通法), 29.53059

諸暦の基本定数(1)これより年、月に対し同一の分母を採用。

付録

暦名	1 年（日）	1 月（日）
調元	未詳（日法一万）	未詳
欽天	365 1760.4/7200(統法), 365.2445	29 3820.28/7200(統法), 29.53059
応天	365 2445/10002(元法), 365.2445	29 5307/10002(元法), 29.53059
乾元	365 720/2940(元率), 365.2449	29 1560/2940(元率), 29.53061
儀天	365 2470/10100(宗法), 365.2446	29 5359/10100(宗法), 29.53059
崇天	365 2590/10590(枢法), 365.2446	29 5619/10590(枢法), 29.53059
明天	365 9500/39000(元法), 365.2436	29 20693/39000(元法), 29.53059
奉元(2)	365 5773/23700(日法), 365.2436	29 12575/23700(日法), 29.53059
観元	365 2930/12030(統法), 365.2436	29 6383/12030(統法), 29.53059
占天	365 6840/28080(日法), 365.2436	29 14899/28080(日法), 29.53059
紀元	365 1776/7290(日法), 365.2436	29 3868/7290(日法), 29.53059
重修大明	365 1274/5230(日法), 365.2436	29 2775/5230(日法), 29.53059
統元	365 1688/6930(元法), 365.2438	29 3677/6930(元法), 29.53059
乾道	365 7308/30000(元法), 365.2436	29 15917.76/30000(元法), 29.53059
淳熙	365 1374/5640(元法), 365.2436	29 2992.56/5640(元法), 29.53059
会元	365 9432/38700(統率), 365.2437	29 20534/38700(統率), 29.53059
統天	365 2910/12000(策法), 365.2425	29 6368/12000(策法), 29.53067
開禧	365 4108/16900(日法), 365.2431	29 8967/16900(日法), 29.53059
淳祐	365 857/3530(日法), 365.2428	29 1873/3530(日法), 29.53059
会天	365 2366/9740(日法), 365.2429	29 5168/9740(日法), 29.53060
成天	365 1801/7420(策法), 365.2427	29 3937/7420(策法), 29.53059
授時	365.2425	29.530593
時憲	365.2422 及び 365.2423	29.53059

(2)分母を呼ぶ術語は不明なので、一般的な呼称に従い、日法とする。以下の諸暦についてもほぼ同じ。

連分数展開によるメトン周期の算出

小数を近似分数で表す手法に連分数を用いる方法がある．いま，ある小数 x が，

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cdots}}} \equiv \{a, b, c, d, \cdots\}$$

という連分数で表されるとき，近似分数は，

$$a + \frac{1}{b}, \quad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}, \quad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}, \cdots$$

玄始暦の定数 [6]（1 年 $= 365\frac{1759}{7200}$ 日，1 月 $= 29\frac{47251}{89052}$ 日）を用いると，近似分数に

$$\frac{25}{2}, \quad \frac{37}{3}, \quad \frac{99}{8}, \quad \frac{136}{11}, \quad \frac{235}{19}, \quad \boxed{\frac{7421}{600}}, \cdots$$

となって $\frac{7421}{600}$（すなわち，600 年で 221 回の閏月）が登場する．

大明暦の定数 [6]（1 年 $= 365\frac{9589}{39491}$ 日，1 月 $= 29\frac{2090}{3939}$ 日）を用いると，近似分数に

$$\frac{25}{2}, \quad \frac{37}{3}, \quad \frac{99}{8}, \quad \frac{136}{11}, \quad \frac{235}{19}, \quad \boxed{\frac{4836}{391}}, \cdots$$

となって $\frac{4836}{391}$（すなわち，391 年で 144 回の閏月）が登場する．

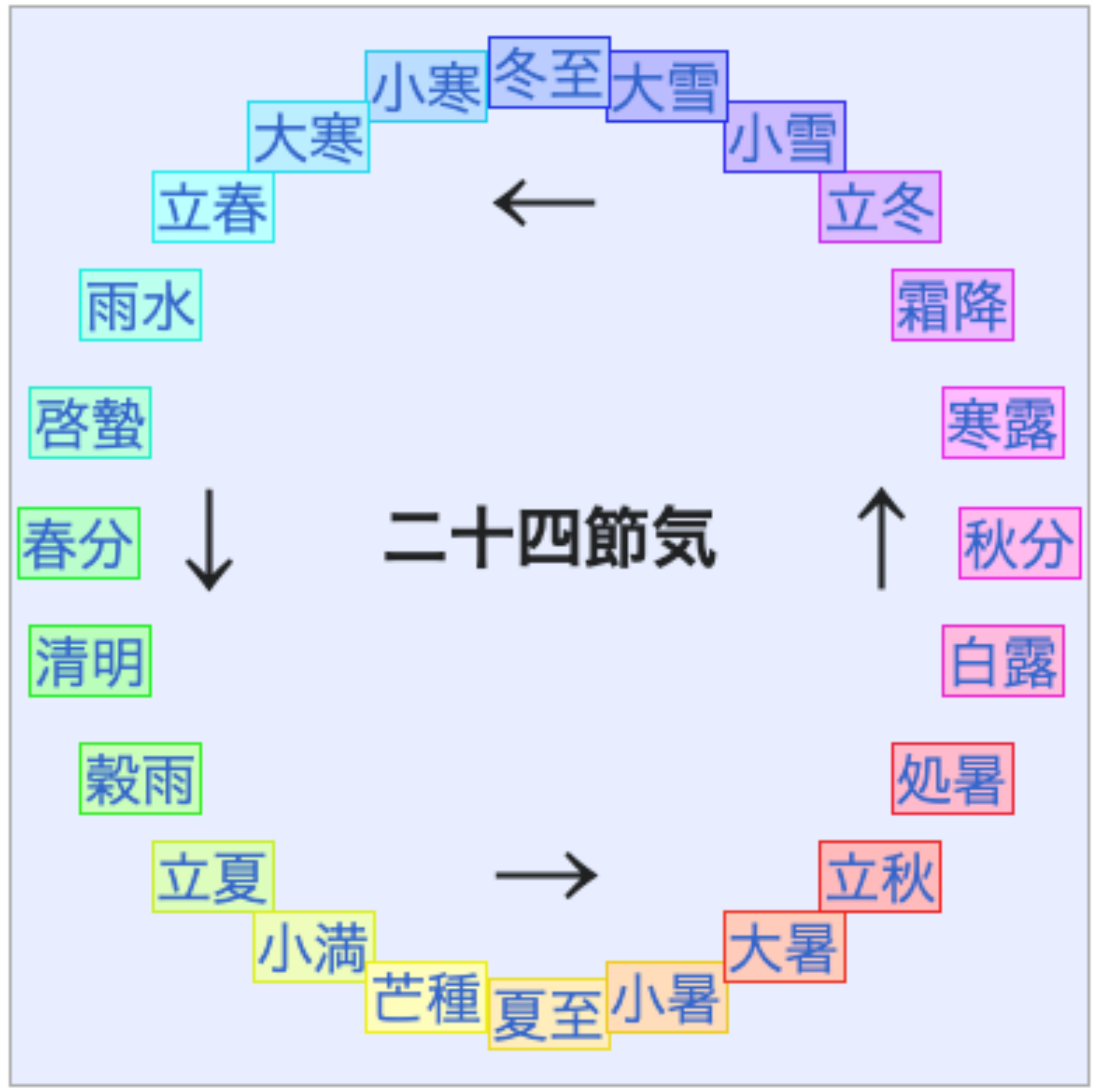
太陰太陽暦の要素：歳終置閏法から歳中置閏法へ

閏月をおく場所を年末とするのが**歳終置閏法** だが, こうすると季節感がずれてしまう

→ 1年の間のどこかに入れる工夫が考えられた(**歳中置閏法**, 前600年前後).

平均30.4日間隔

中気のない月があれば, そこに閏月を入れる



https://ja.wikipedia.org/wiki/二十四節気

表 4: 二十四節気一覧．左列が節気，右列が中気．

季節	節名	名称（節気）		太陽黄経	新暦の目安	名称（中気）		太陽黄経	新暦の目安
春	寅節	立春	りっしゅん	315°	2 月 4 日頃	雨水	うすい	330°	2 月 19 日頃
	卯節	啓蟄	けいちつ	345°	3 月 5 日頃	春分	しゅんぶん	0° / 360°	3 月 21 日頃
	辰節	清明	せいめい	15°	4 月 5 日頃	穀雨	こくう	30°	4 月 20 日頃
夏	巳節	立夏	りっか	45°	5 月 5 日頃	小満	しょうまん	60°	5 月 21 日頃
	午節	芒種	ぼうしゅ	75°	6 月 6 日頃	夏至	げし	90°	6 月 21 日頃
	未節	小暑	しょうしょ	105°	7 月 7 日頃	大暑	たいしょ	120°	7 月 23 日頃
秋	申節	立秋	りっしゅう	135°	8 月 7 日頃	処暑	しょしょ	150°	8 月 23 日頃
	酉節	白露	はくろ	165°	9 月 8 日頃	秋分	しゅうぶん	180°	9 月 23 日頃
	戌節	寒露	かんろ	195°	10 月 8 日頃	霜降	そうこう	210°	10 月 23 日頃
冬	亥節	立冬	りっとう	225°	11 月 7 日頃	小雪	しょうせつ	240°	11 月 22 日頃
	子節	大雪	たいせつ	255°	12 月 7 日頃	冬至	とうじ	270°	12 月 22 日頃
	丑節	小寒	しょうかん	285°	1 月 5 日頃	大寒	だいかん	300°	1 月 20 日頃

閏5月

閏10月

2033年問題

旧暦の2033年問題とは？

しかし、2033年の後半から2034年の前半にかけての間を見ると、下の表2で示したように、中気が無い月が3回、中気を二つ含む月が2回が生じるのです。

	旧暦の1ヶ月	中気の有無
1	8/25日~9/22の月	中気無し
2	11/22~12/21の月	11/22が小雪、12/21日が冬至
3	12/22~2034年1/19の月	中気無し
4	2034年1/20日~2/18日の月	1/20日が大寒、2/18日が雨水
5	2034年2/19日~3/19日の月	中気無し

表2. 2033~2034年における月の満ち欠けと中気の関係

月刊うちゅう 2016-11

嘉数次人氏の解説

表 5: 2025 年〜2035 年 太陰太陽暦・太陽暦対応表（大の月・小の月・閏月）. 日付の後ろの「*」は新暦（太陽暦）で翌年になることを示す. 2033 年の閏 11 月設定は「旧暦 2033 年問題」における一般的な採用案（閏 11 月案）に基づく. 旧暦で 8 月 15 日を中秋といい「中秋の名月」としてお月見が行われる.

旧暦月	2025 年	2026 年	2027 年	2028 年	2029 年	2030 年	2031 年	2032 年	2033 年	2034 年
正月	大 1/29	大 2/17	小 2/6	大 1/26	大 2/13	小 2/3	大 1/23	小 2/11	大 1/31	大 2/19
2 月	小 2/28	小 3/19	大 3/7	小 2/25	小 3/15	大 3/4	小 2/22	大 3/11	小 3/2	小 3/20
3 月	大 3/29	小 4/17	小 4/6	大 3/25	大 4/13	小 4/3	大 3/23	小 4/10	大 3/31	大 4/18
4 月	小 4/28	大 5/16	大 5/5	小 4/24	小 5/13	大 5/2	小 4/22	大 5/9	小 4/30	小 5/18
5 月	小 5/27	大 6/15	小 6/4	大 5/23	大 6/11	小 6/1	大 5/21	小 6/8	大 5/29	大 6/16
閏 5 月	—	—	—	**小** 6/22	—	—	—	—	—	—
6 月	大 6/25	小 7/14	大 7/3	大 7/21	小 7/11	大 6/30	小 6/20	大 7/7	小 6/28	小 7/16
閏 6 月	**小** 7/25	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7 月	大 8/23	大 8/12	小 8/2	小 8/20	大 8/9	大 7/30	小 7/19	大 8/6	大 7/26	大 8/14
閏 7 月	—	—	—	—	—	—	**小** 8/18	—	—	—
8 月	小 9/22	大 9/11	大 8/31	大 9/18	小 9/8	小 8/29	大 9/16	小 9/5	大 8/25	小 9/13
9 月	小 10/21	小 10/11	大 9/30	小 10/18	大 10/7	大 9/27	小 10/16	大 10/4	大 9/23	大 10/12
10 月	小 11/20	大 11/9	小 10/30	大 11/16	小 11/6	大 10/27	小 11/14	大 11/3	小 10/23	小 11/11
閏 10 月	—	—	**小** 11/28	—	—	—	—	—	—	—
11 月	大 12/20	小 12/9	大 12/27	小 12/16	大 12/5	小 11/26	大 12/13	小 12/3	大 11/22	大 12/11
閏 11 月	—	—	—	—	—	—	—	—	**小** 12/22	—
12 月	大 1/19*	大 1/8*	小 1/26*	大 1/14*	小 1/4*	大 12/25	大 1/12*	大 1/1*	大 1/20*	小 1/10*

太陰太陽暦の要素：平朔法から定朔法へ

毎月の第一日を経朔または朔と呼ぶ．朔の決め方には，平朔(mean conjunction)と定朔(true conjunction)がある．

平朔は単純に平均朔望月ごとに朔にする．大と小の月が交互に並ぶことが7回または8回続くと大が2つ続く連大が現れる．

定朔は月および太陽の運行の変動を考慮した複雑で精密なものである．定朔は，太陽や月の運動を詳しく知る必要が生じる．後述する月の運動の不等性，太陽運動の不等性などの発見ごとに修正がなされていった．

唐の頃から以後の暦はすべて定朔である．日本では飛鳥時代まで用いられた元嘉暦だけが平朔で，それ以降はすべて定朔である．

中国では周天度は365 1/4

バビロニアからはじまった天文学では，円周を 360 度とし，度以下は 60 進法（1 度= 60 分，1 分= 60 秒）を用いた．小数の概念はイスラム圏で生まれ，10 進小数の記法が定着したのは，16 世紀後半のヨーロッパである．

中国では，太陽の毎日の平均運動を 1 度としたため，全天を（四分暦では）周天度数（しゅうてんど） $365\frac{1}{4}$ とした．したがって，中国の 1 度（以下 $1^{\#}$ とする）は，

$$\text{中国} \quad 1^{\#} = \text{現行} \quad 0.9856^{\circ}. \tag{5}$$

漢以降の暦ではこの値も若干変化する（『晋書』天文志では $365\frac{145}{589}$）．また，度以下の端数は，分数値で表記されたり，100 進法が使われたり（1 度= 100 分，1 分= 100 秒）した．『後漢書』律暦志以降，表 6 のような呼び方も使われた．日本での表記もこれに準ずる．

表 6: 中国での分数値の表記．

$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$
	少			半			太	
少弱	少	少強	半弱	半	半強	太弱	太	太強

中国天文学では，1 日を 12 等分した「辰刻」と，1 日を 100 等分した「刻」と呼ぶ時刻表記が併用された．単純計算すると 1 刻は約 14.4 分になる．日本では江戸時代まで，昼夜をそれぞれ 6 等分する不定時法が使われた．庶民の使う 1 刻（約 2 時間）は，季節によって長さが変化した．

ケプラーによる惑星の運動法則

Johannes Kepler
(1571-1630)

ケプラーによる惑星の運動法則（1609 年, 1619 年）

第 1 法則　**楕円軌道の法則**

惑星は太陽を 1 つの焦点とする楕円軌道を描く.

第 2 法則　**面積速度一定の法則**

太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に描く扇形の面積（面積速度）は，惑星それぞれについて一定である.

第 3 法則　**調和の法則**

惑星の公転周期 T の 2 乗と，惑星の描く楕円の長軸半径（長軸の長さの半分）R の 3 乗の比 T^2/R^3 は，惑星によらず一定である.

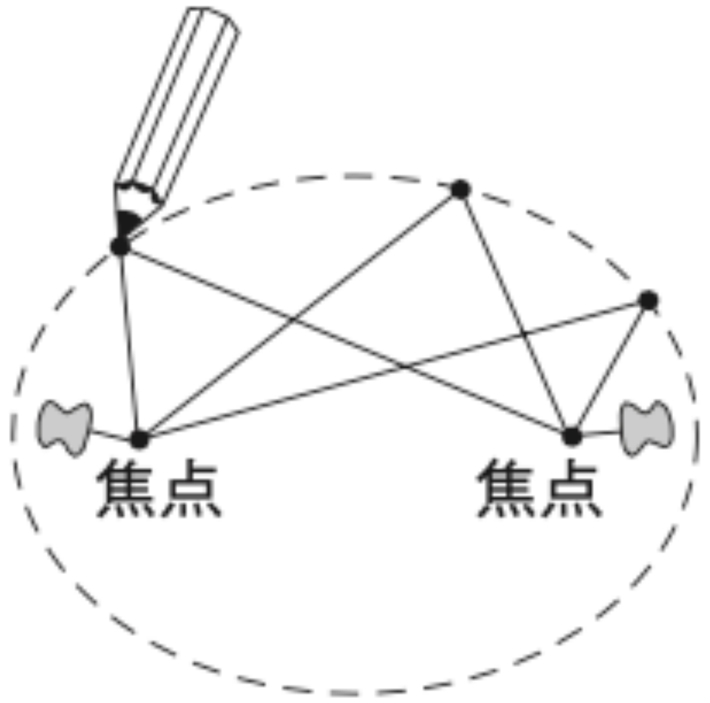
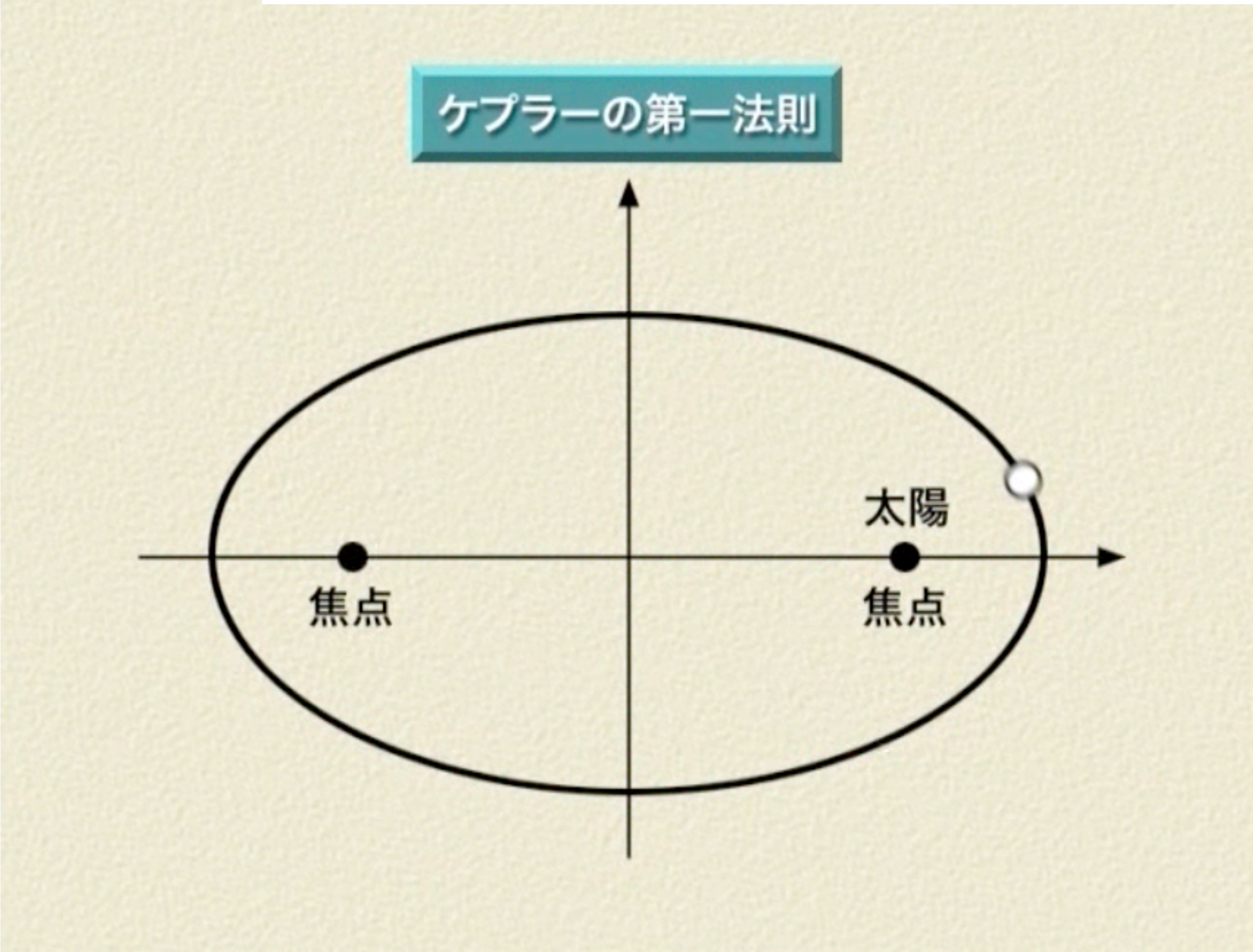
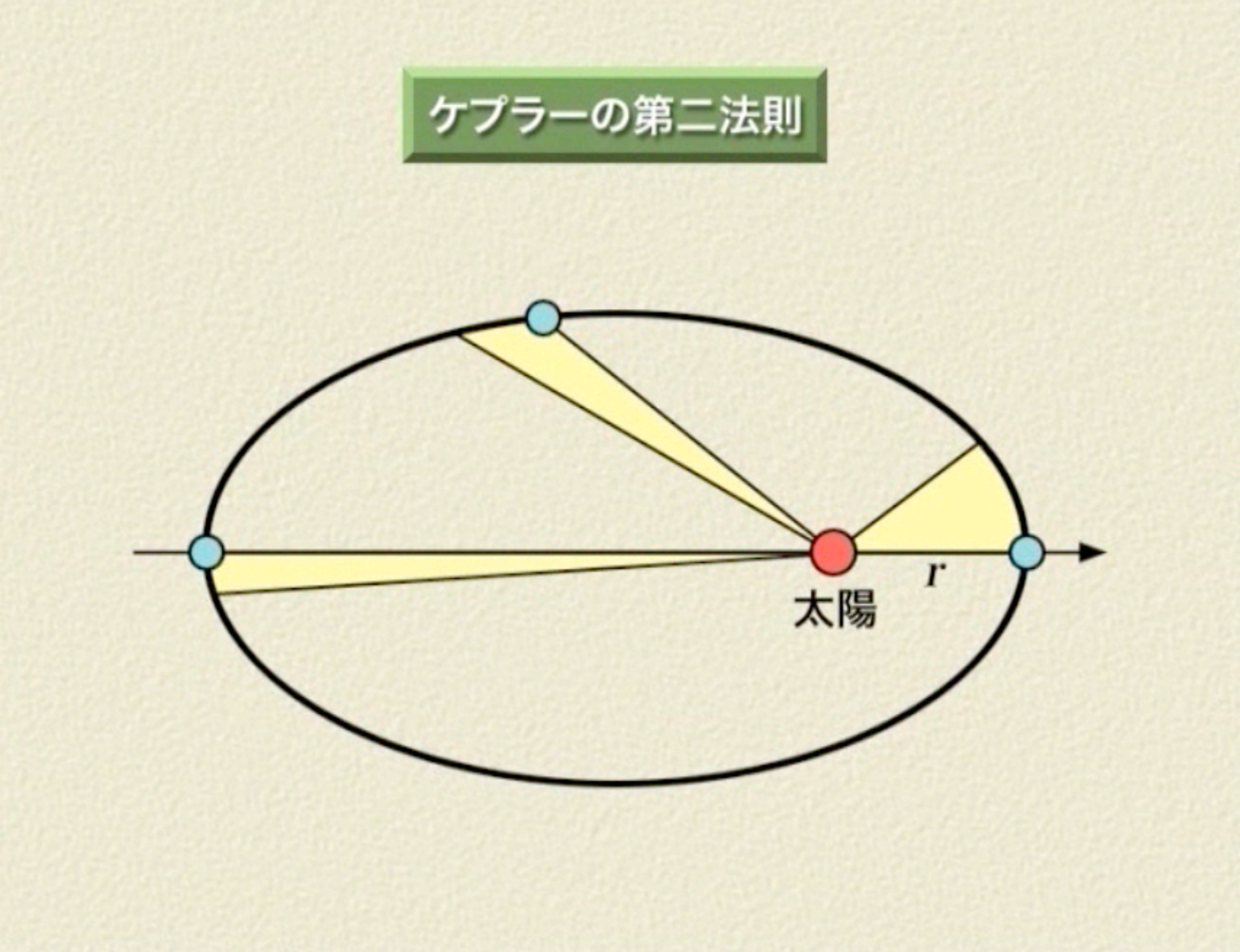
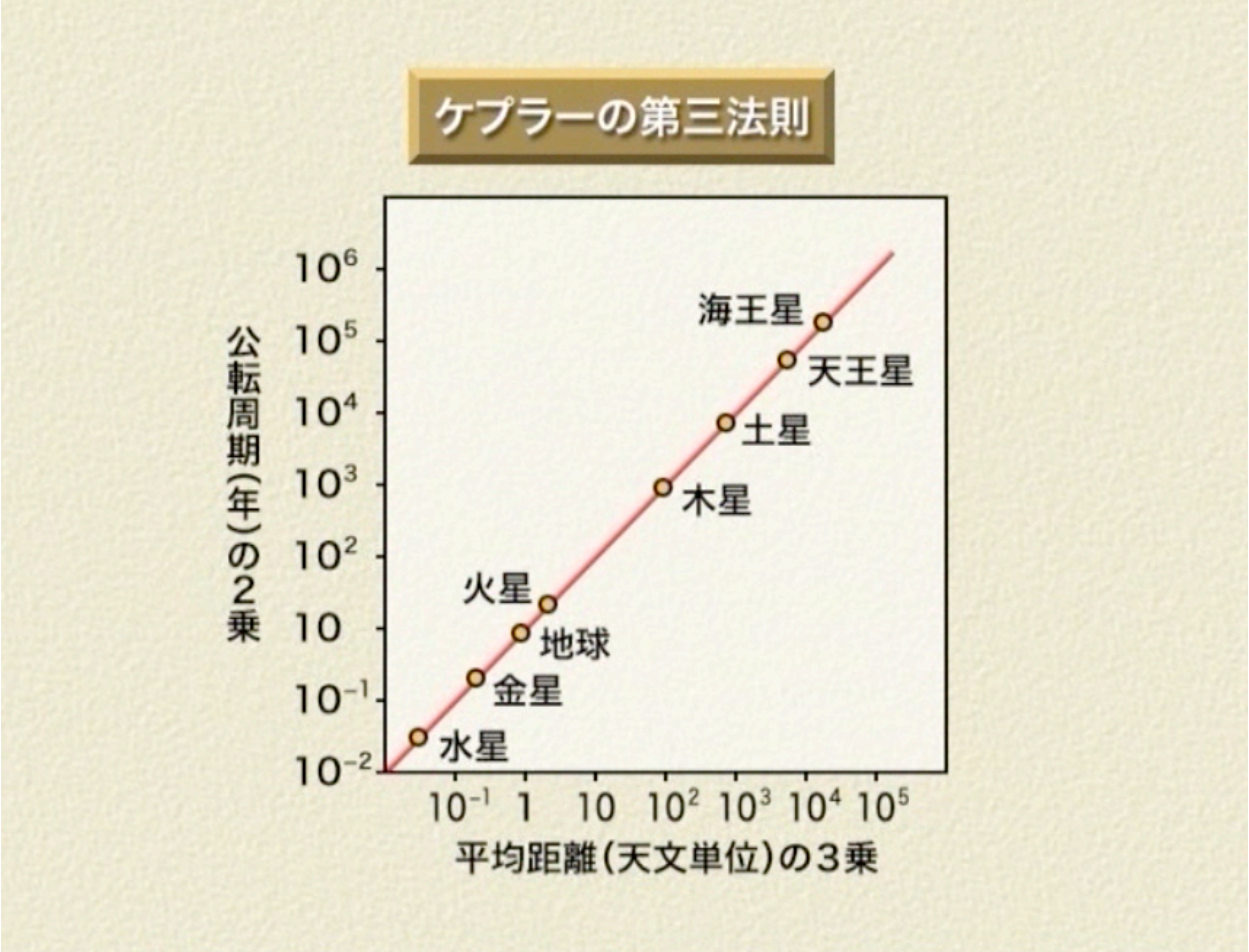


図 2.13　楕円は 2 つの焦点から糸を張り，ペンで一周すると描ける形である．焦点が 1 つに重なっていれば円になる．円は特殊な楕円である．



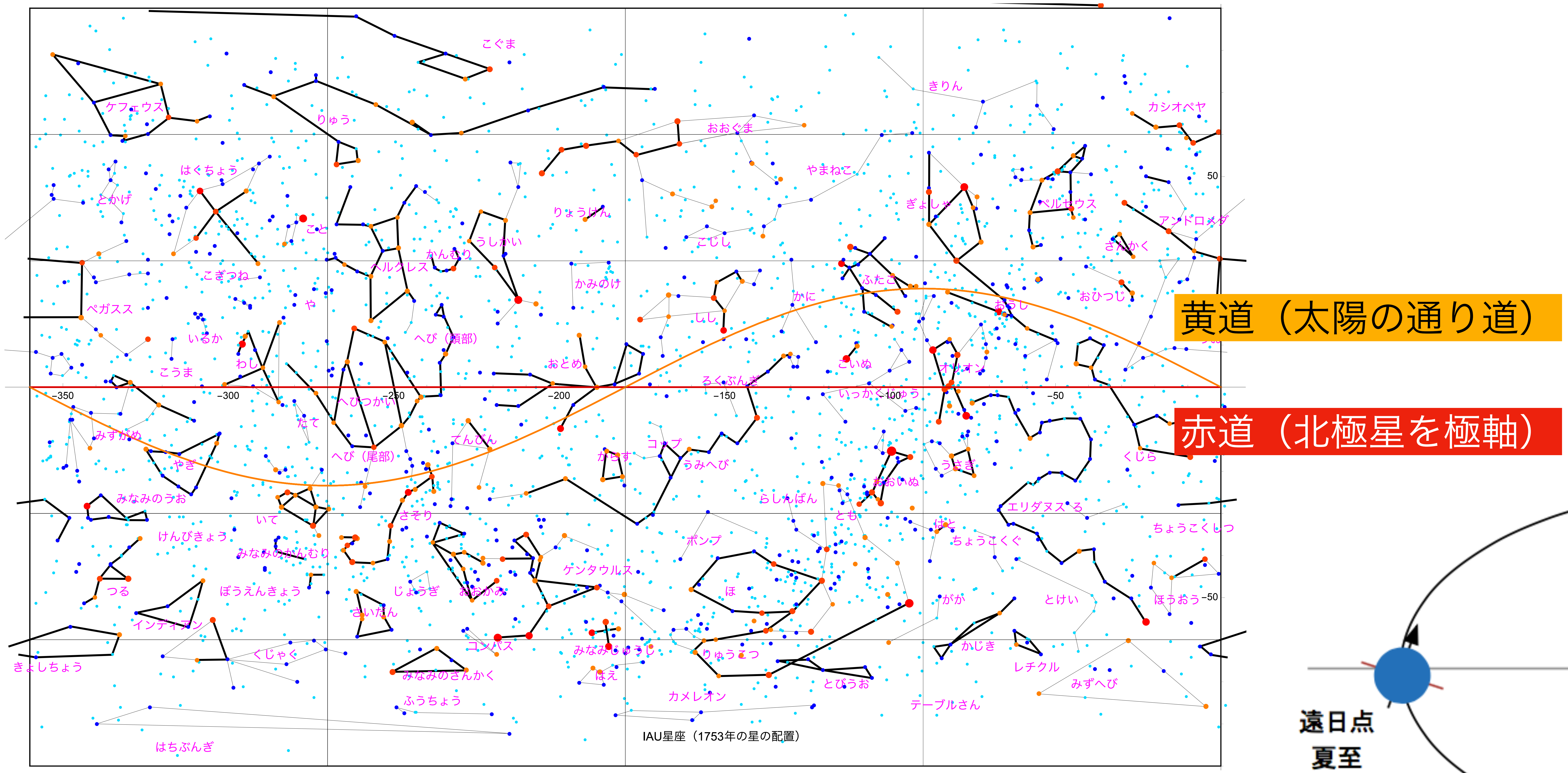




暦に対する天文学的に必要な修正

万有引力による惑星運動は楕円 ➡ 運動の速さは面積速度一定の法則にしたがう

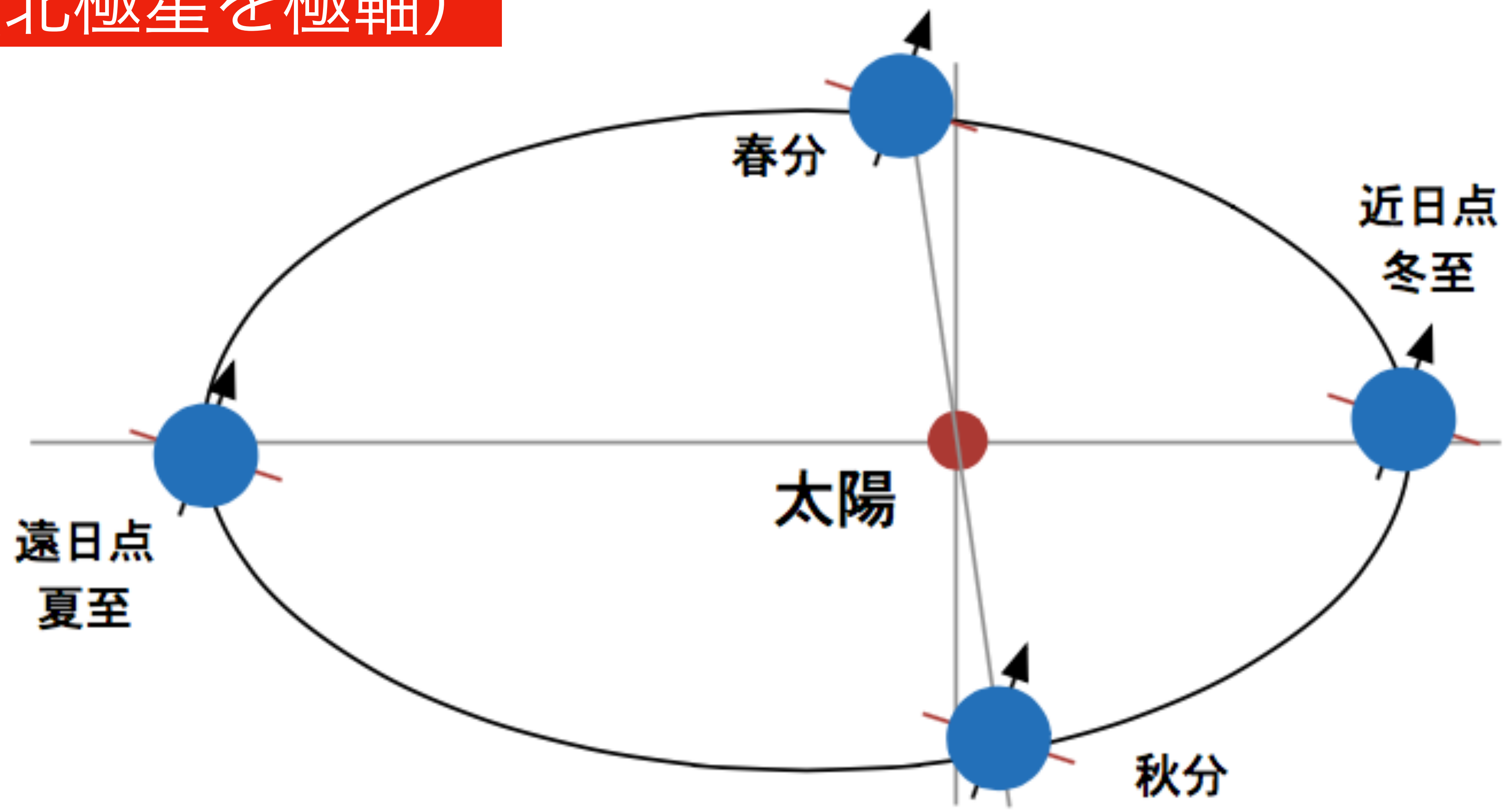
＊　太陽が天球面上を移動する速さは季節によって違う　**太陽運動の不等性，日行盈縮**



177 日　　　　186 日

2025/2026 年の場合，

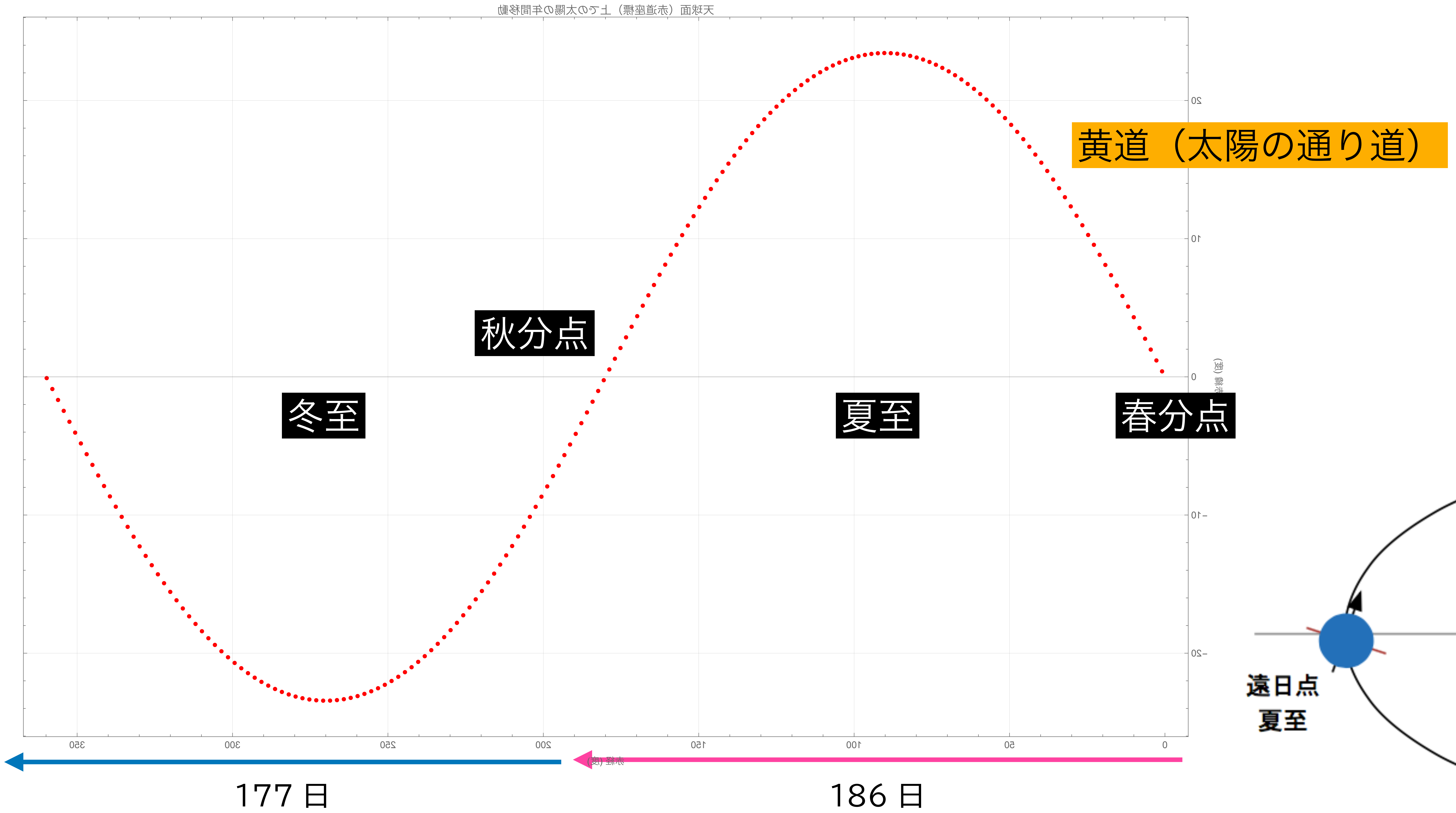
春分の日(3/20)から秋分の日(9/23)までは 186 日
秋分の日(9/23)から春分の日(3/20)までは 177 日



暦に対する天文学的に必要な修正

万有引力による惑星運動は楕円 ➡ 運動の速さは面積速度一定の法則にしたがう

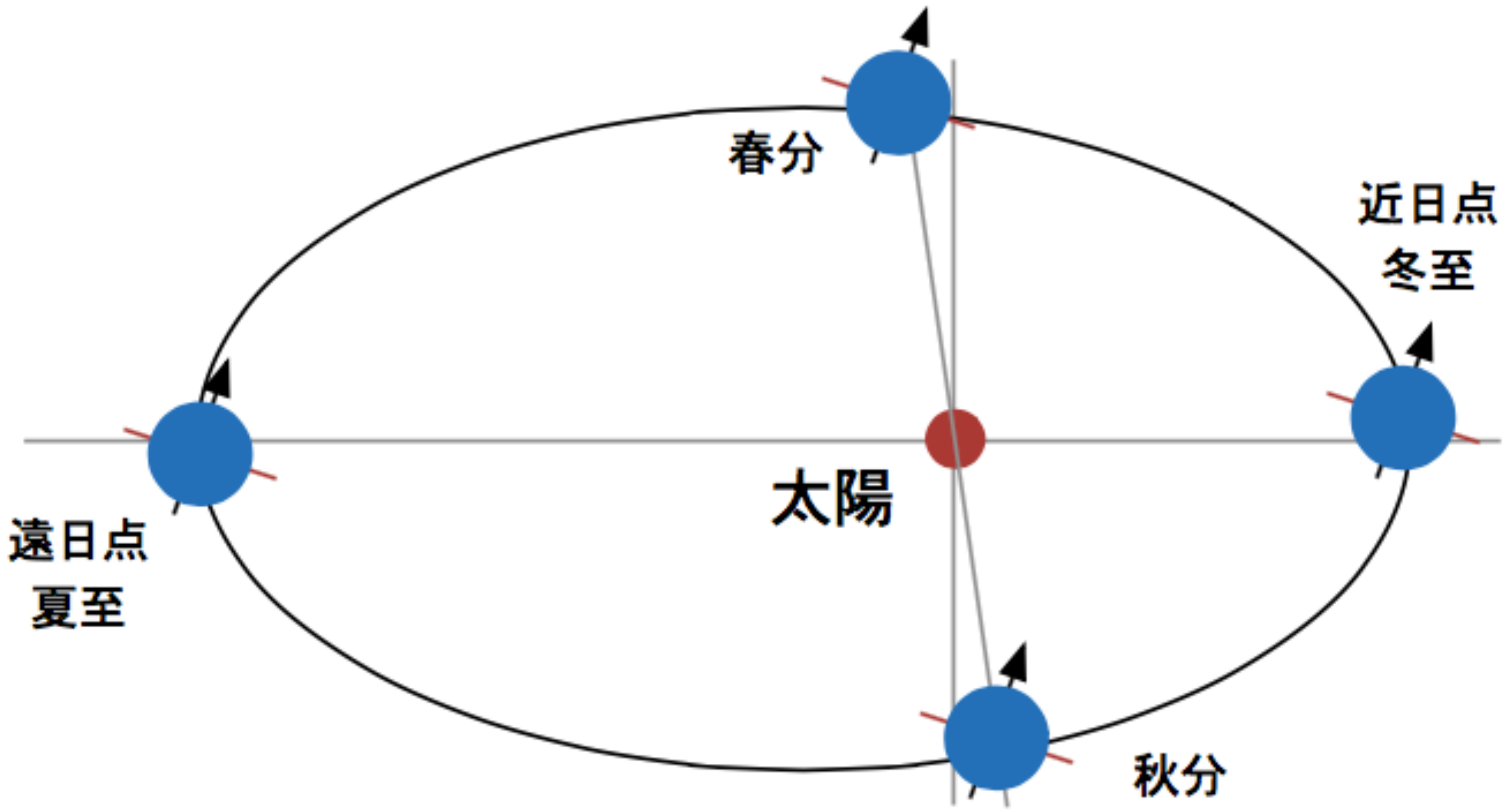
＊　太陽が天球面上を移動する速さは季節によって違う　**太陽運動の不等性，日行盈縮**



2025/2026 年の場合，

春分の日(3/20)から秋分の日(9/23)までは 186 日
秋分の日(9/23)から春分の日(3/20)までは 177 日

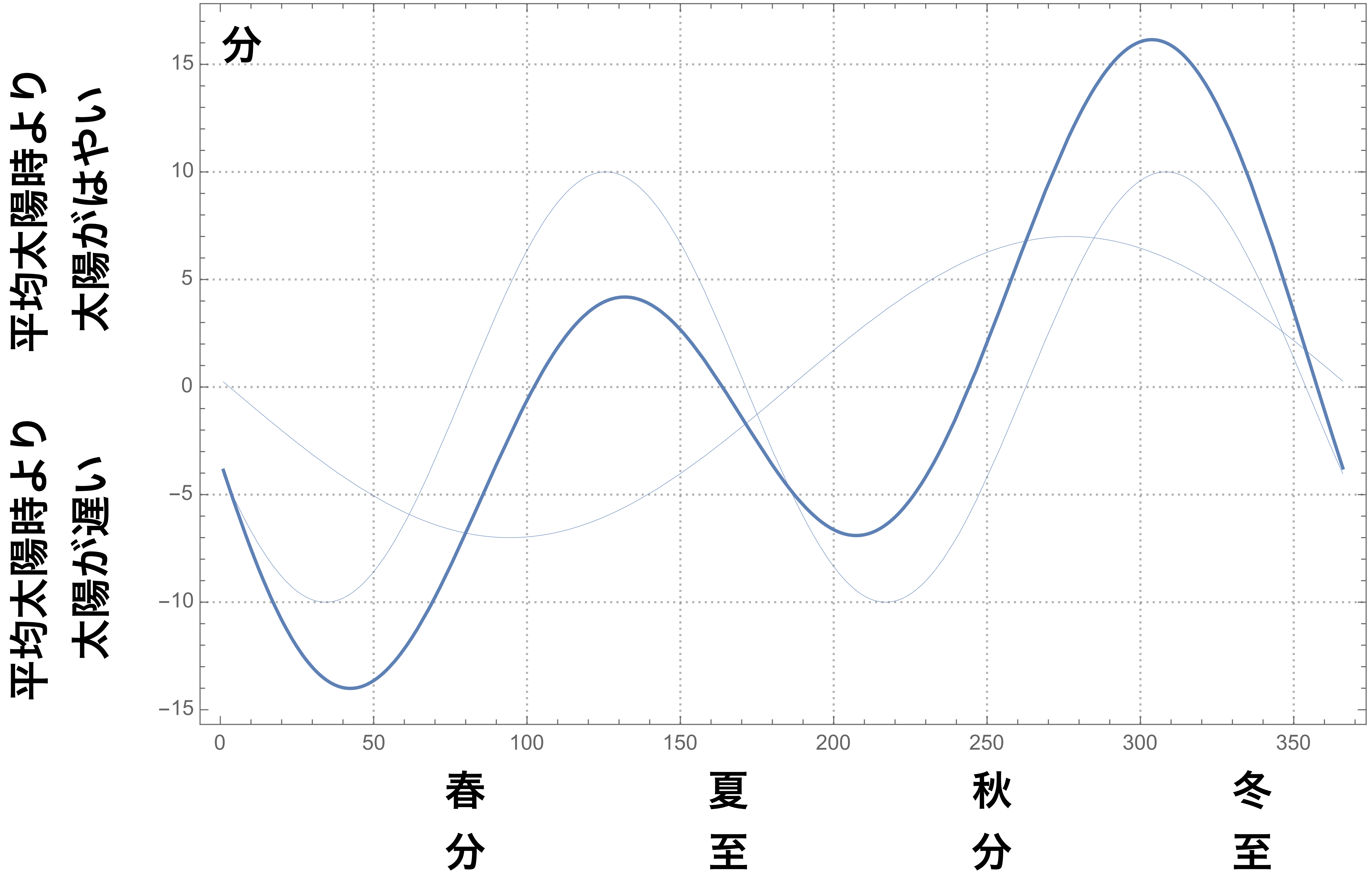
現在，冬至は12月22日付近
近日点は1月3日付近



均時差 (equation of time)

＊　太陽が南中する時刻は季節によって変わる

地球が楕円軌道で公転するために，太陽の
進み方が季節によって異なることの補正



野村仁氏撮影「アナレンマ」

日時計を使うときは必須な補正

万有引力による惑星運動は楕円 ➡ 運動の速さは面積速度一定の法則にしたがう

太陽運動の不等性，日行盈縮

表 9: 太陽運動の不等性発見の比較

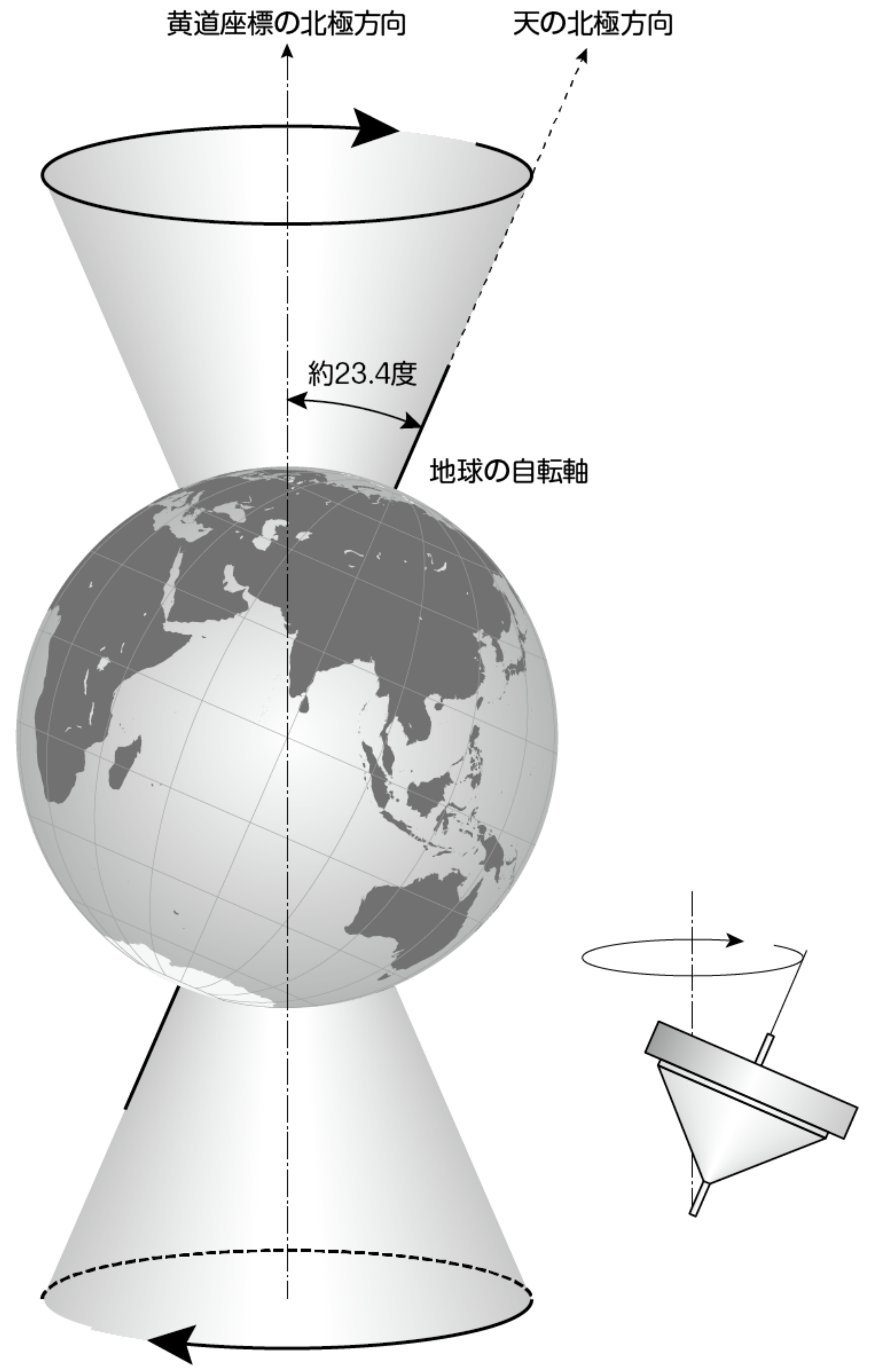
	西洋	中国
発見	前 2c．ヒッパルコス	6c．張子信(ししん)
暦の基準	遠日点	近日点
備考		随代の劉■(りゅうしゃく)（■は火＋卓），皇極暦(こうきょく)に取り入れる．大衍暦(だいえん) (729–) にて実際に使われる．

月の運動の不等性，月行遅疾

表 10: 月の運動の不等性発見の比較

	西洋	中国
発見	前 2c．ヒッパルコス 2c．プトレマイオス	2c．後漢書律暦志，劉洪(りゅうこう) (140-206) 乾象暦(けんしょう) (223–) で導入
備考	ヒッパルコスは中心差の発見， プトレマイオスは出差の発見	19 年周期で黄白道の交点が逆行（交点月の導入） 月の最速地点がほぼ 9 年で東へ移動（近地点移動．近点月の導入） 出差は未発見

歳差 (precession)と章動 (nutation)



地球は完全な球ではなく，赤道方向が少し広がった扁平楕円体形状
地球の自転軸は，公転軌道面に対して約23.4度傾いている.

太陽から地球にはたらく万有引力は，公転させる作用以外にも偶力（潮汐力）として，「赤道の膨らみ」を公転面の方へ引き戻そうとする力（トルク，torque）がはたらく．この結果，回転軸の傾いたコマのように，自転軸がふらつく現象（みそすり運動）が生じる.

歳差の周期は，約26,000年
歳差によって，恒星の黄経は，**毎年50.27秒角**ずつ増加

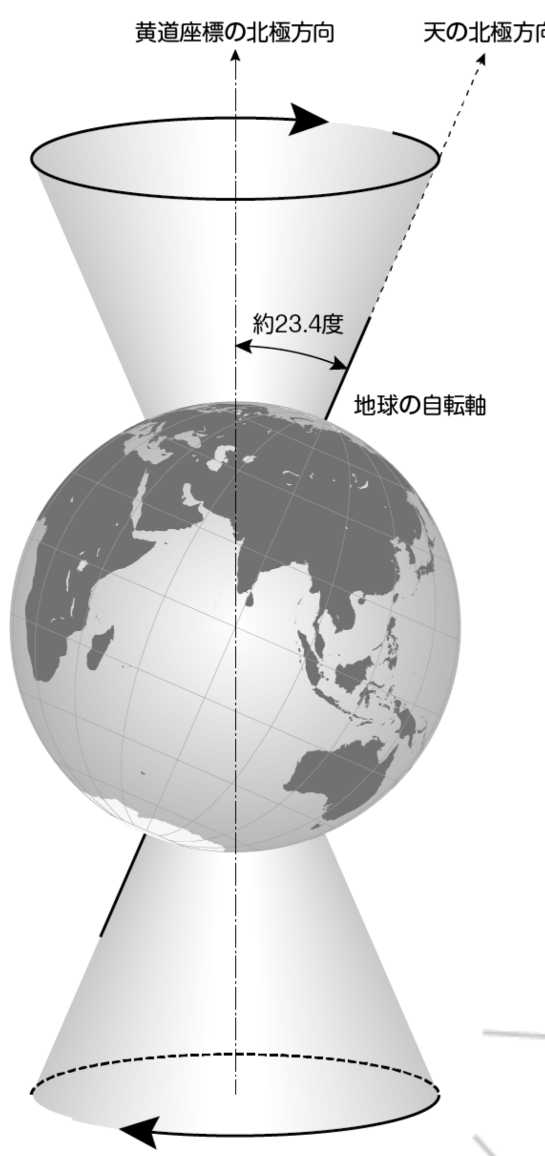
章動の主成分の周期は， 18.6年（月の軌道である白道面の黄道面に対する傾きが約5度あり、その回転周期）.
歳差が引き起こす黄道傾斜角に**9秒角**程度の振動を加える.
1748年にイギリスの天文学者ブラッドリーが発見.

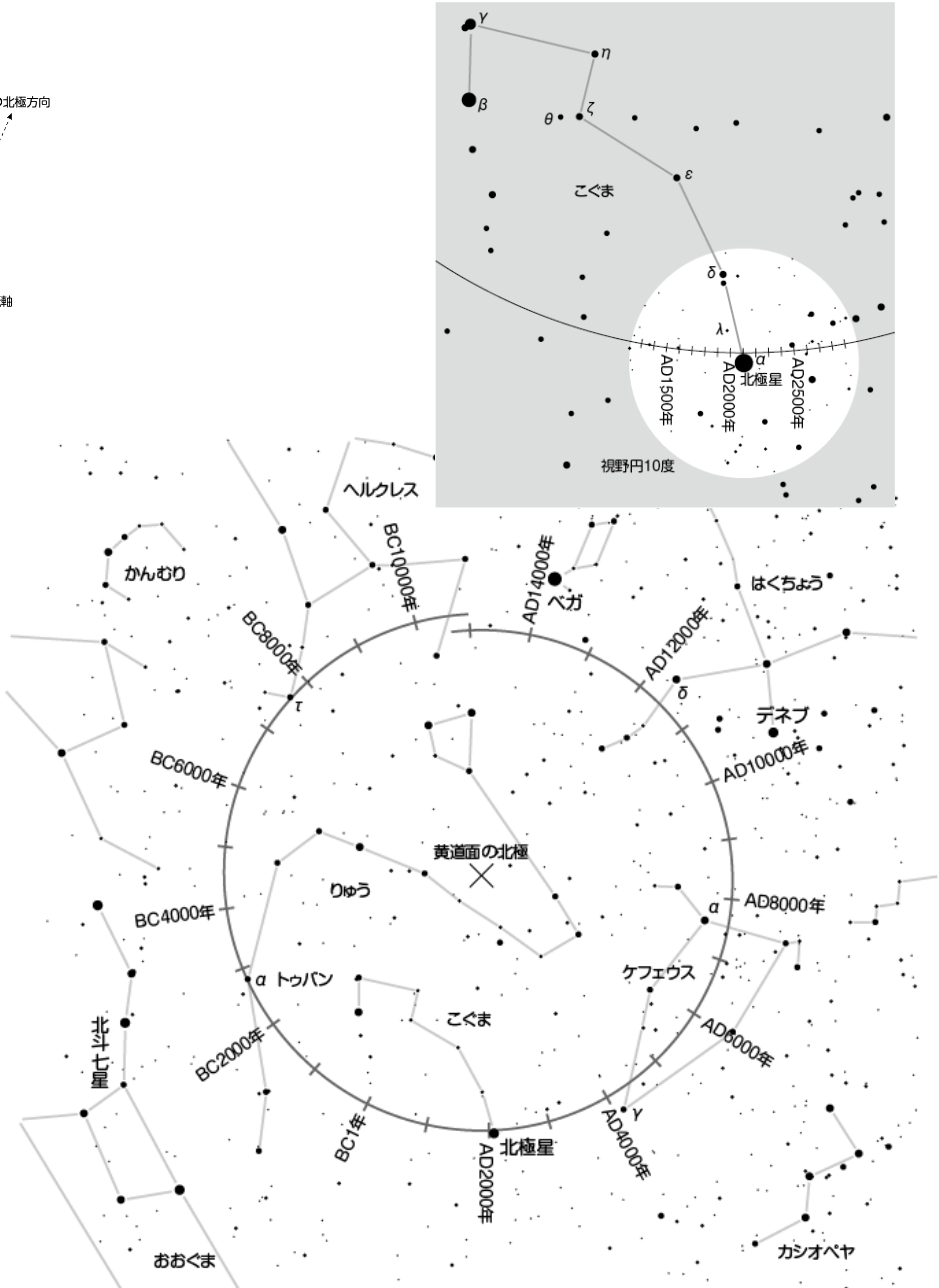
表 8: 歳差の発見の比較．現代値では，1 度/72 年となる．

	西洋	中国
発見	前 2c．ヒッパルコス	340．虞喜（ぐき）
発見時の値	1 度/100 年.	1 度/50 年.
発見時の解釈	恒星の位置が東へ移動.	冬至の太陽の位置が西へ移動.
備考		大明暦 (510) にて採用．1 度/46 年

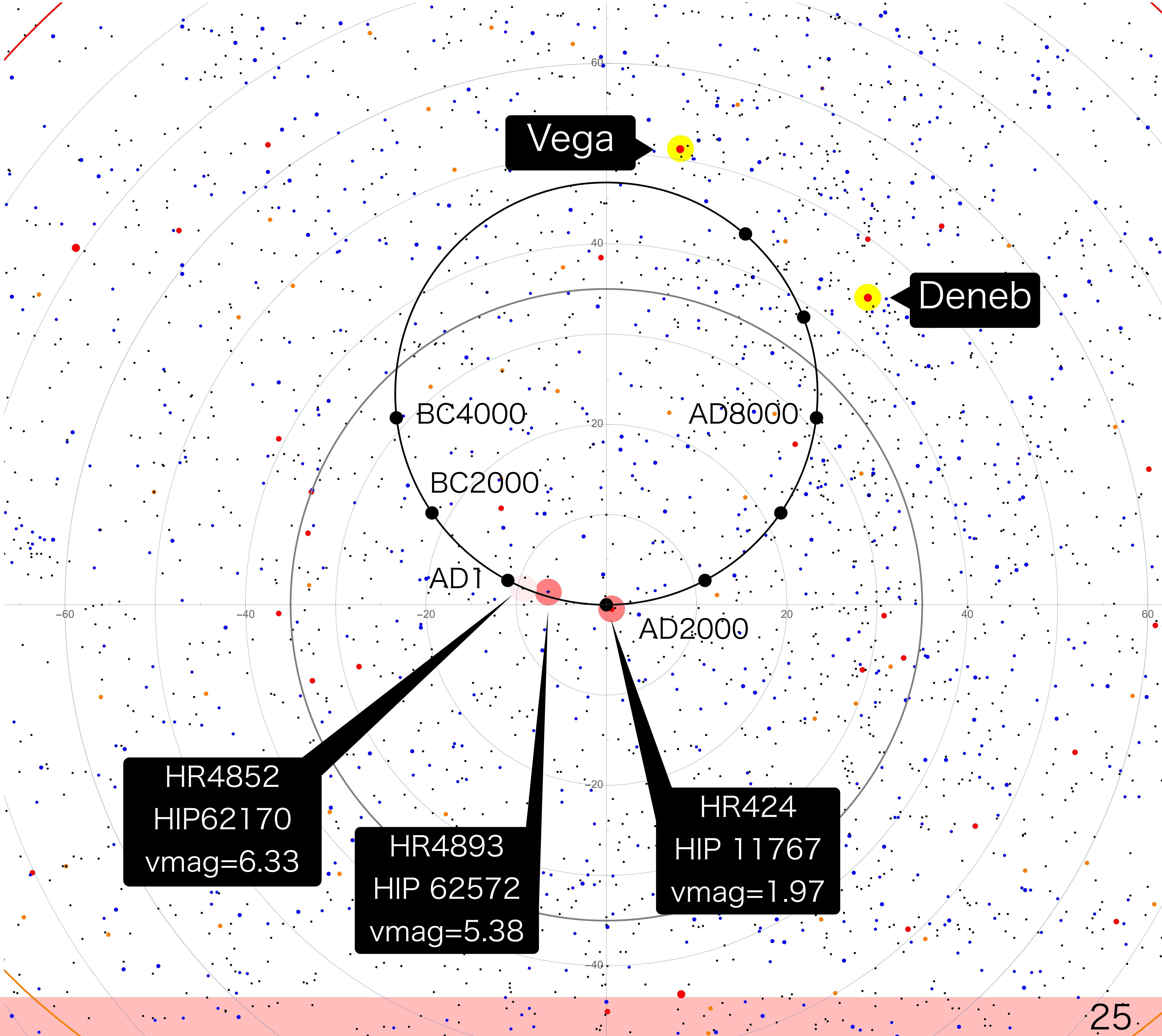
地球の歳差（precession）

25920年周期で天の北極の方向が変わる

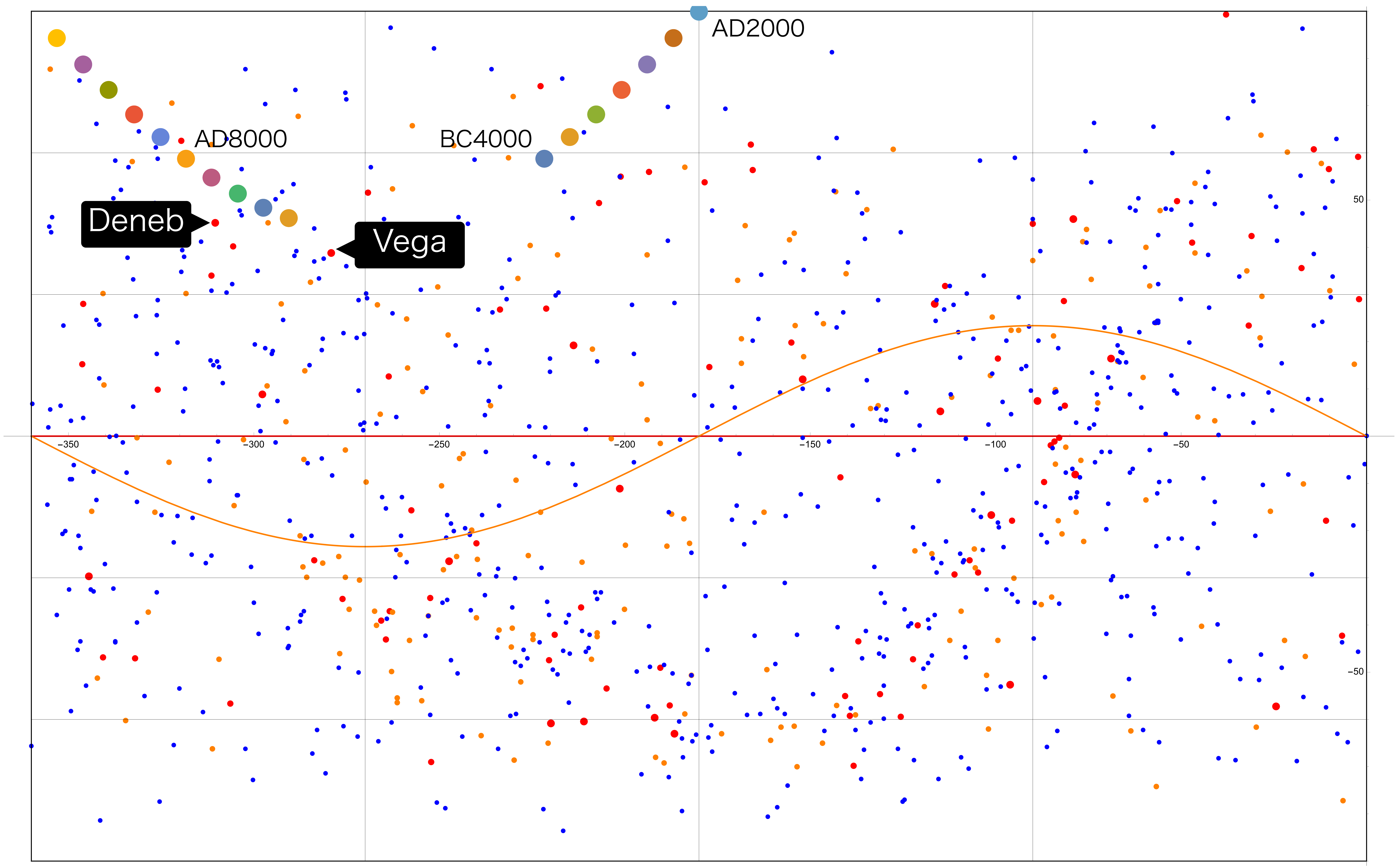




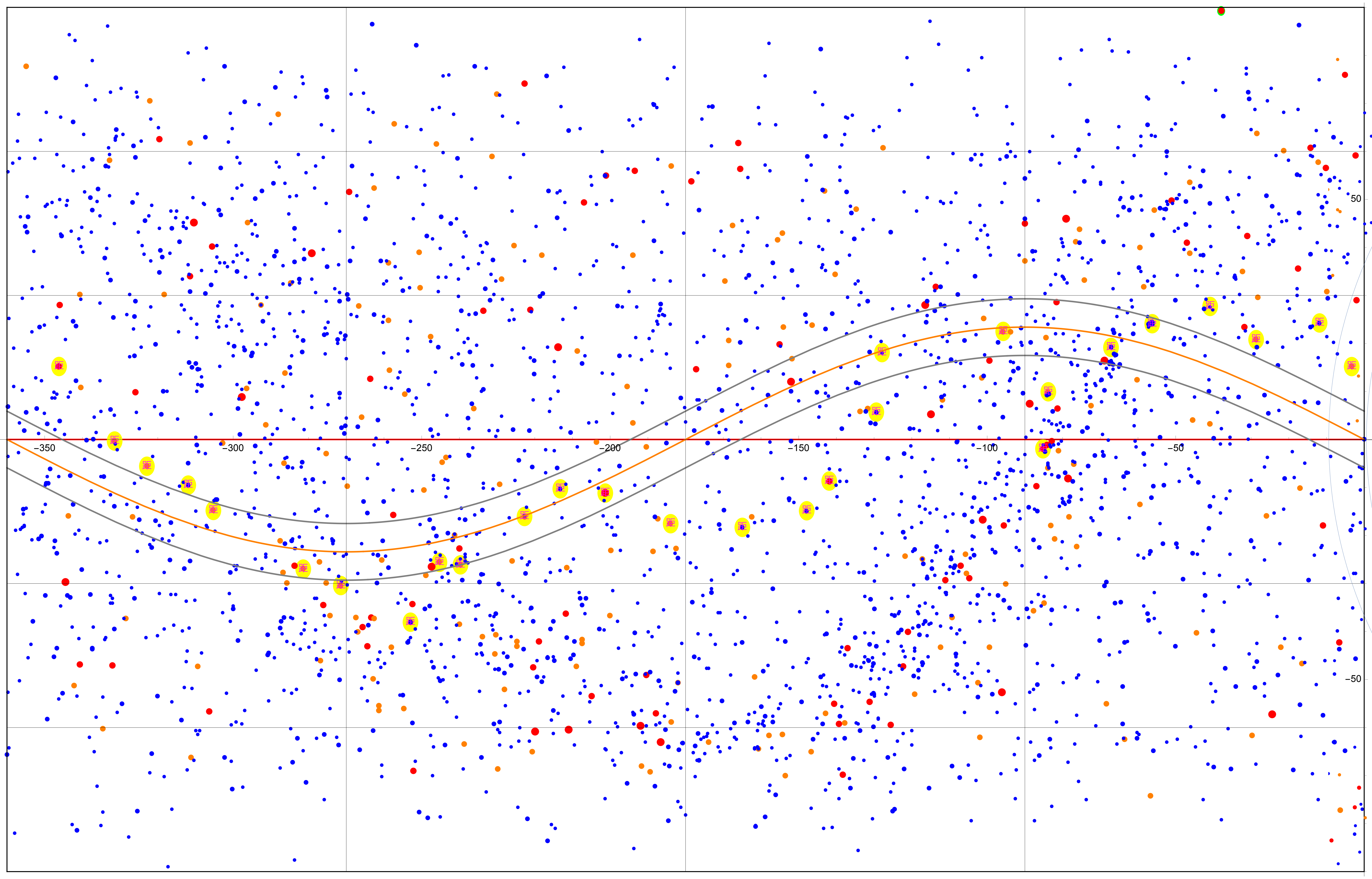
https://www.astroarts.co.jp/alacarte/kiso/kiso03-j.shtml#PRECESSION

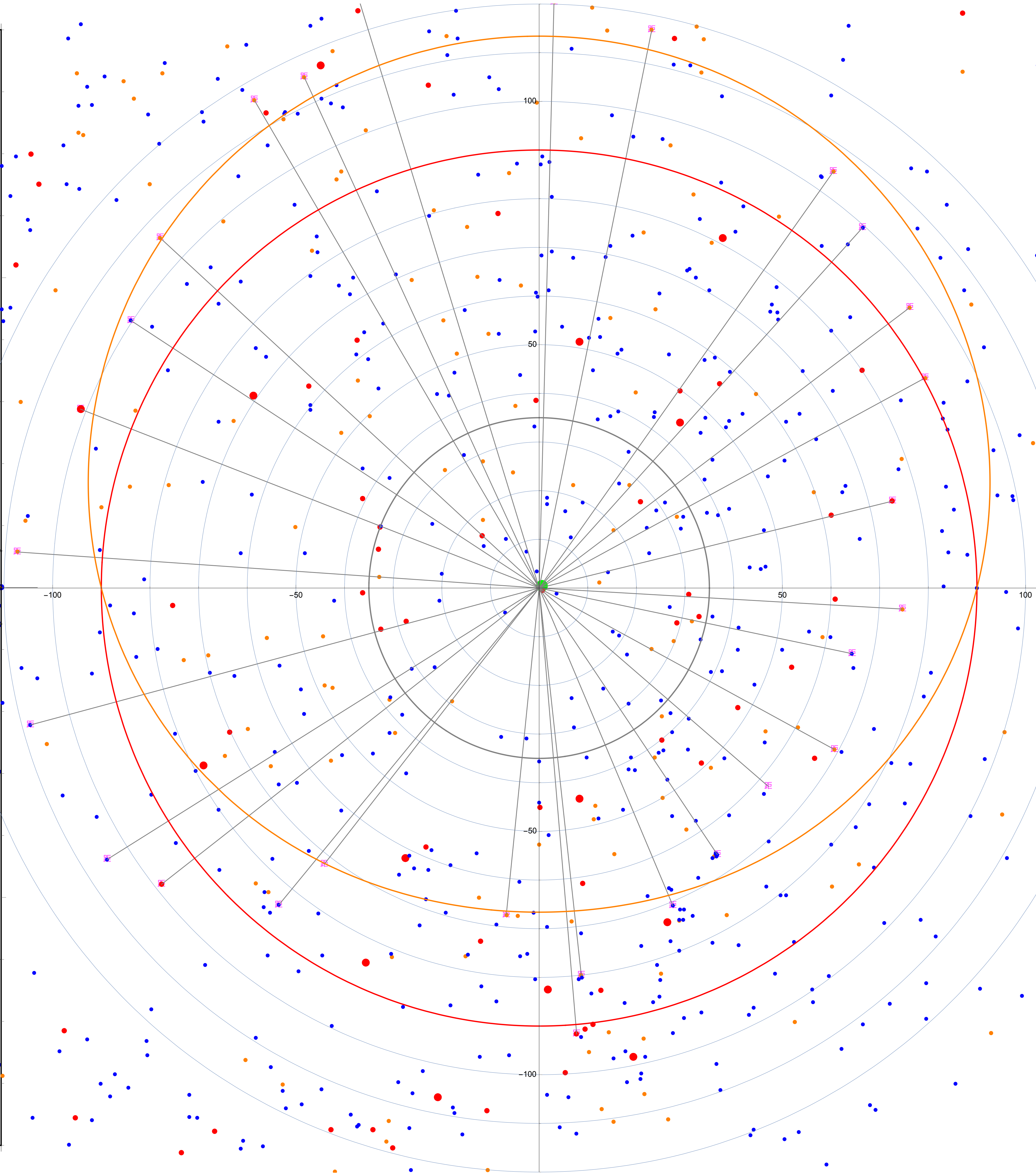


地球の歳差（precession） 25920年周期で天の北極の方向が変わる



AD2000 星図

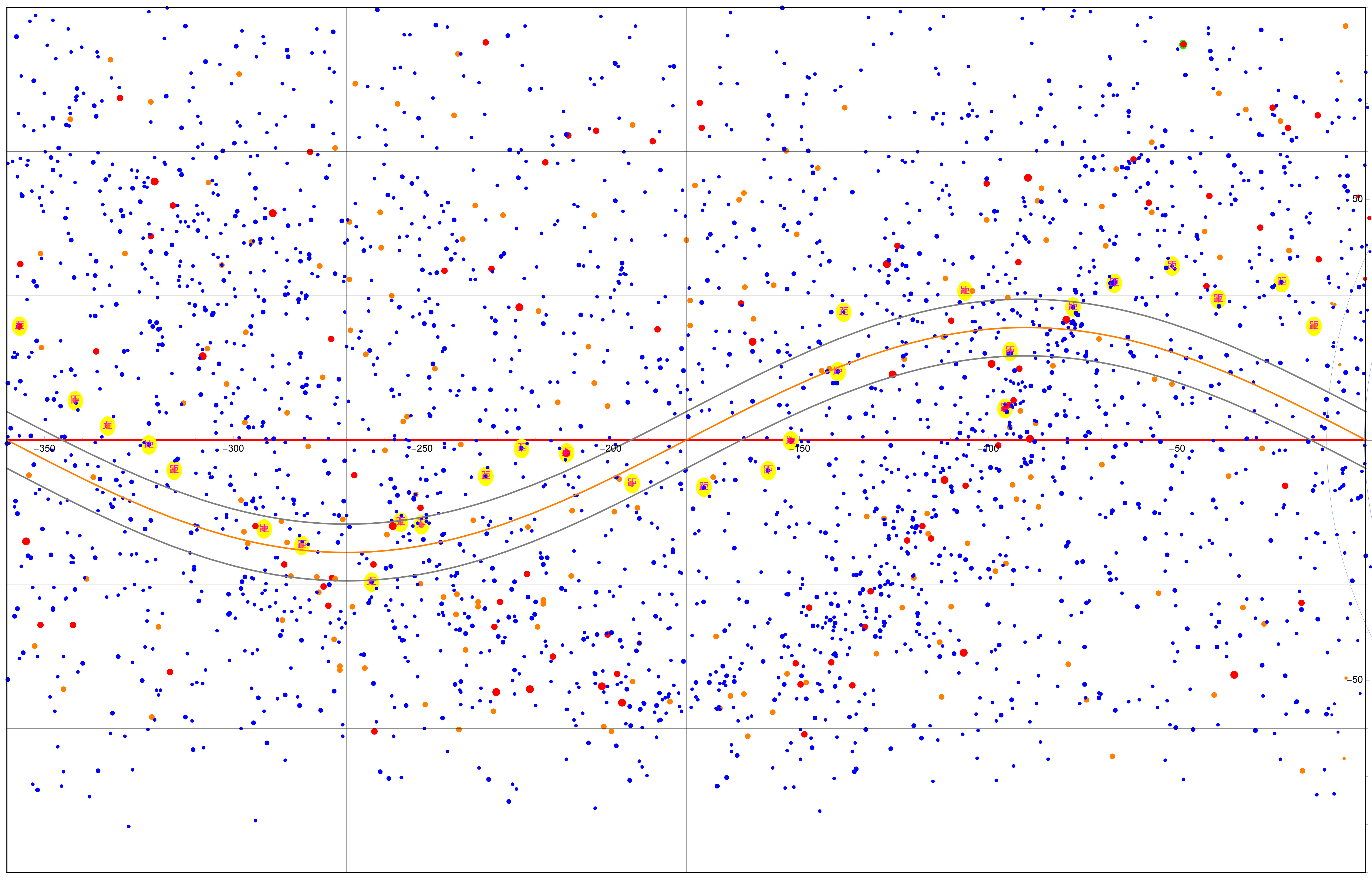


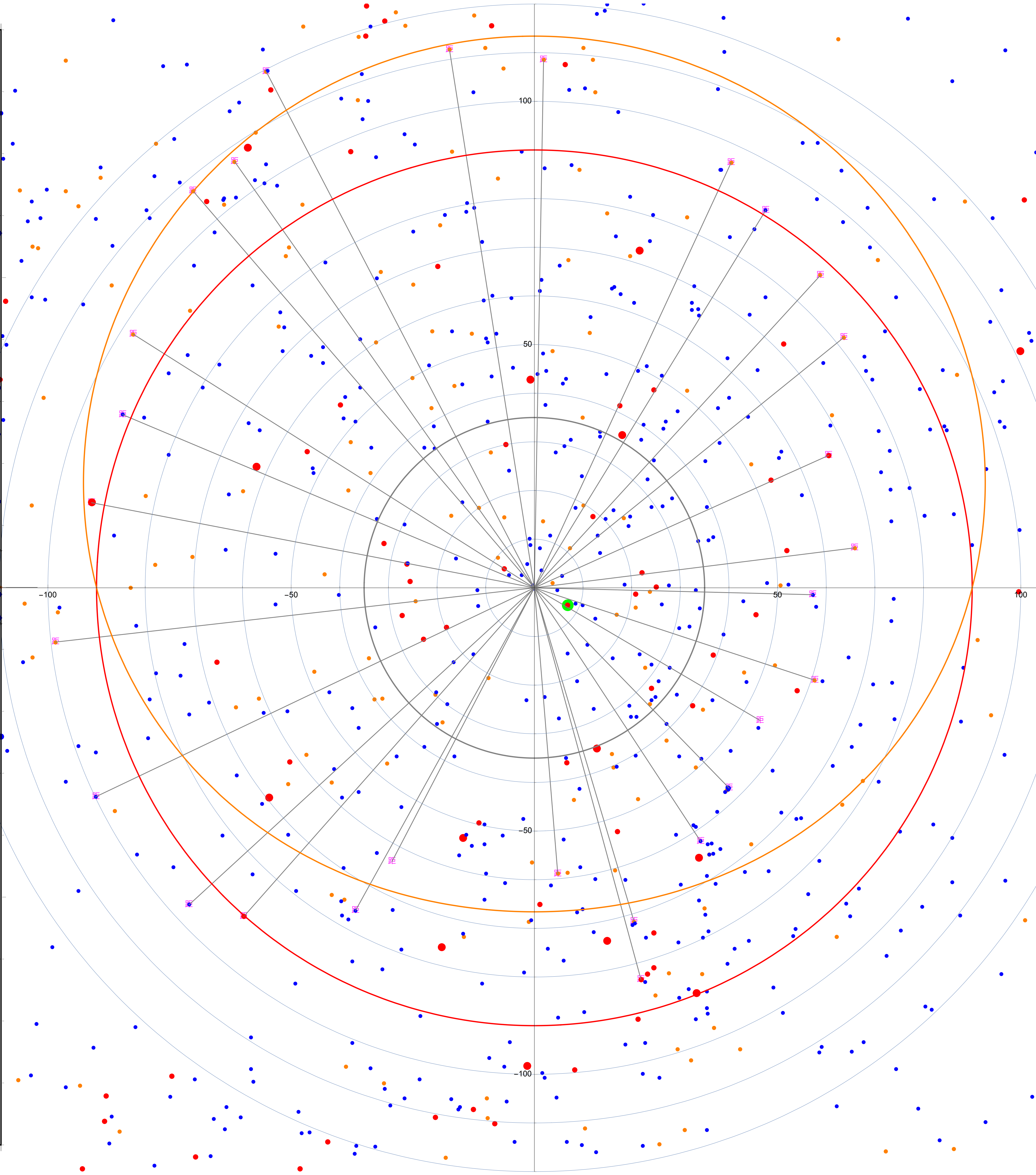


AD1500 星図

AD1000 星図

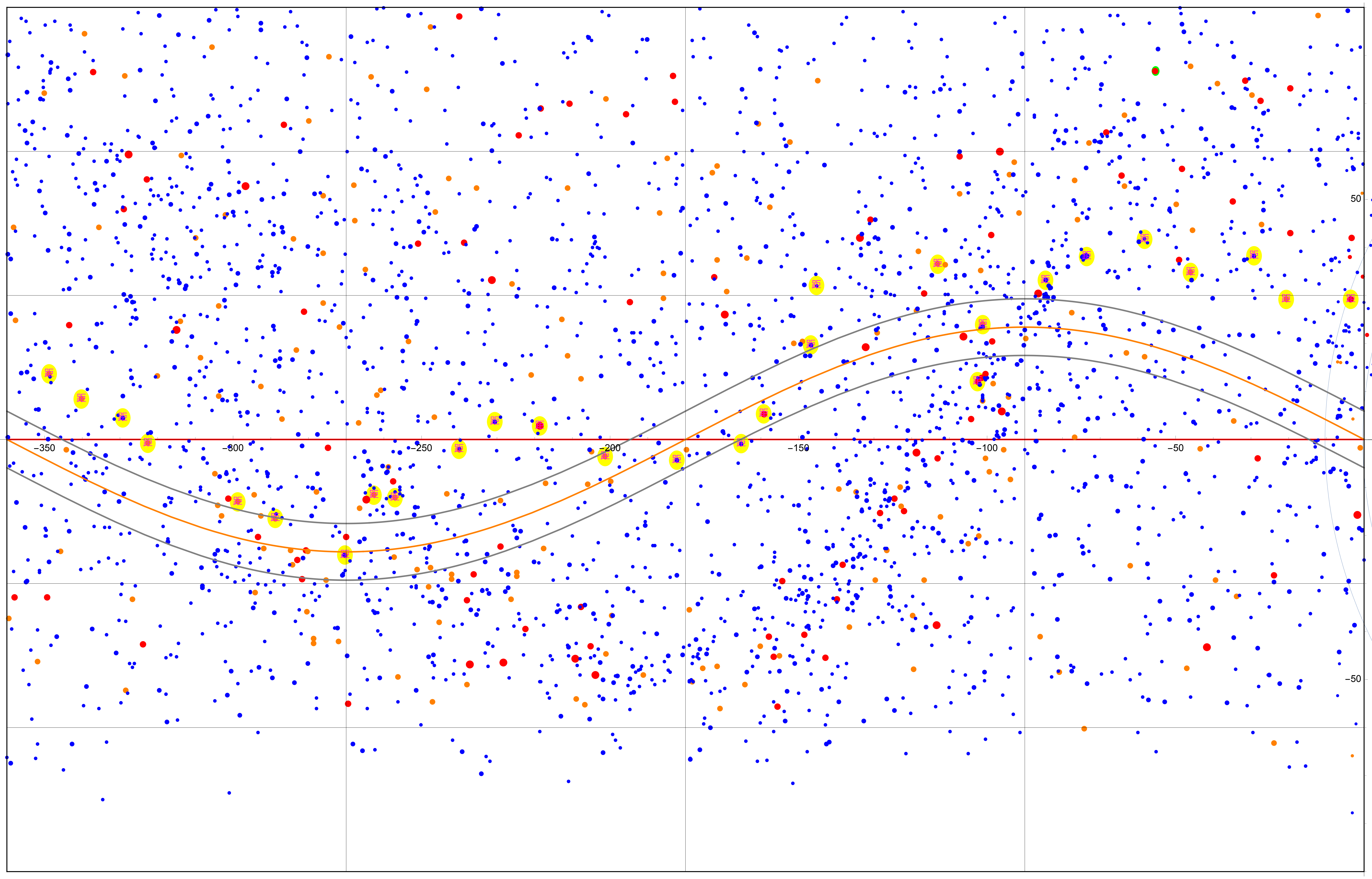
AD500 星図

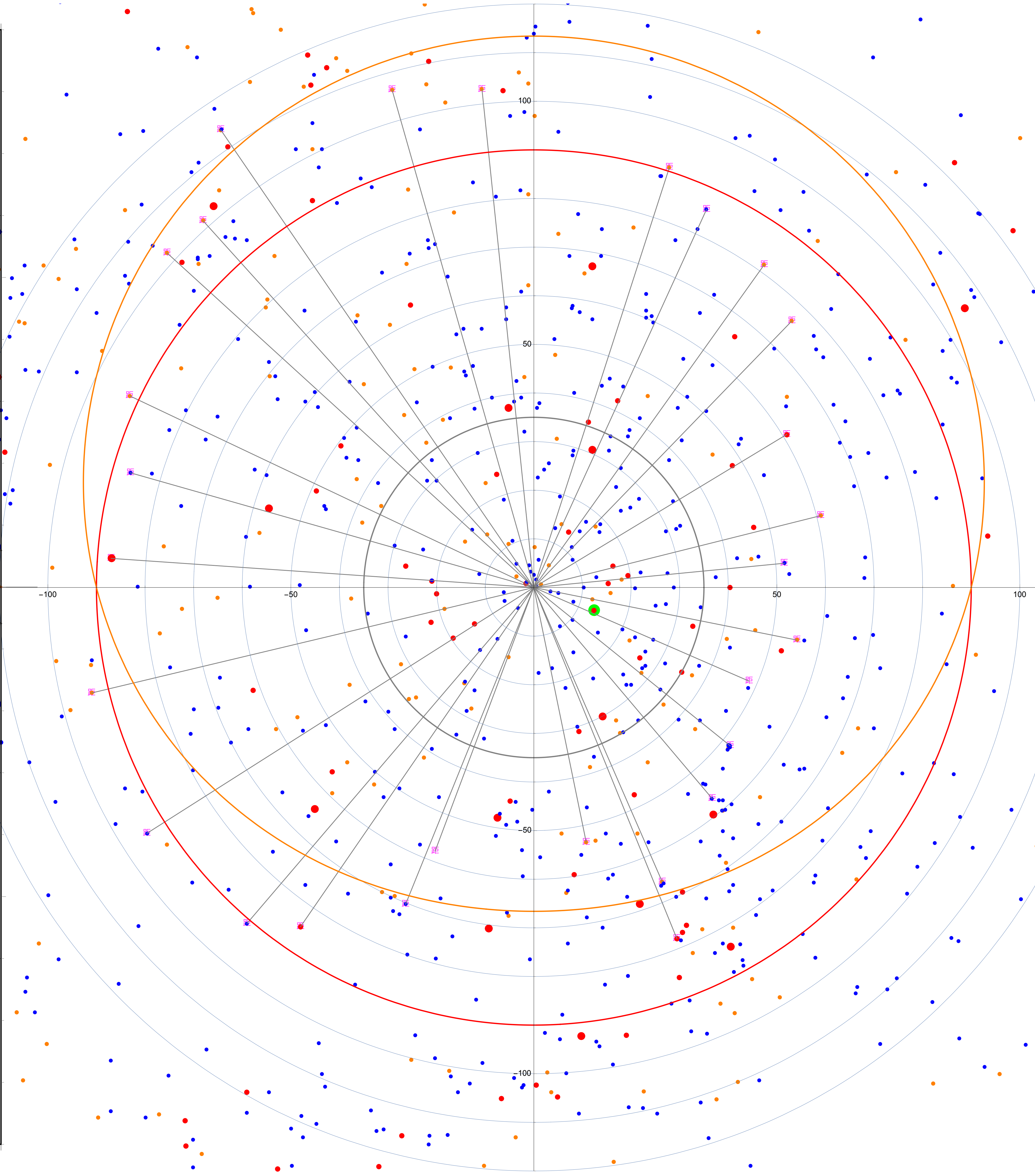




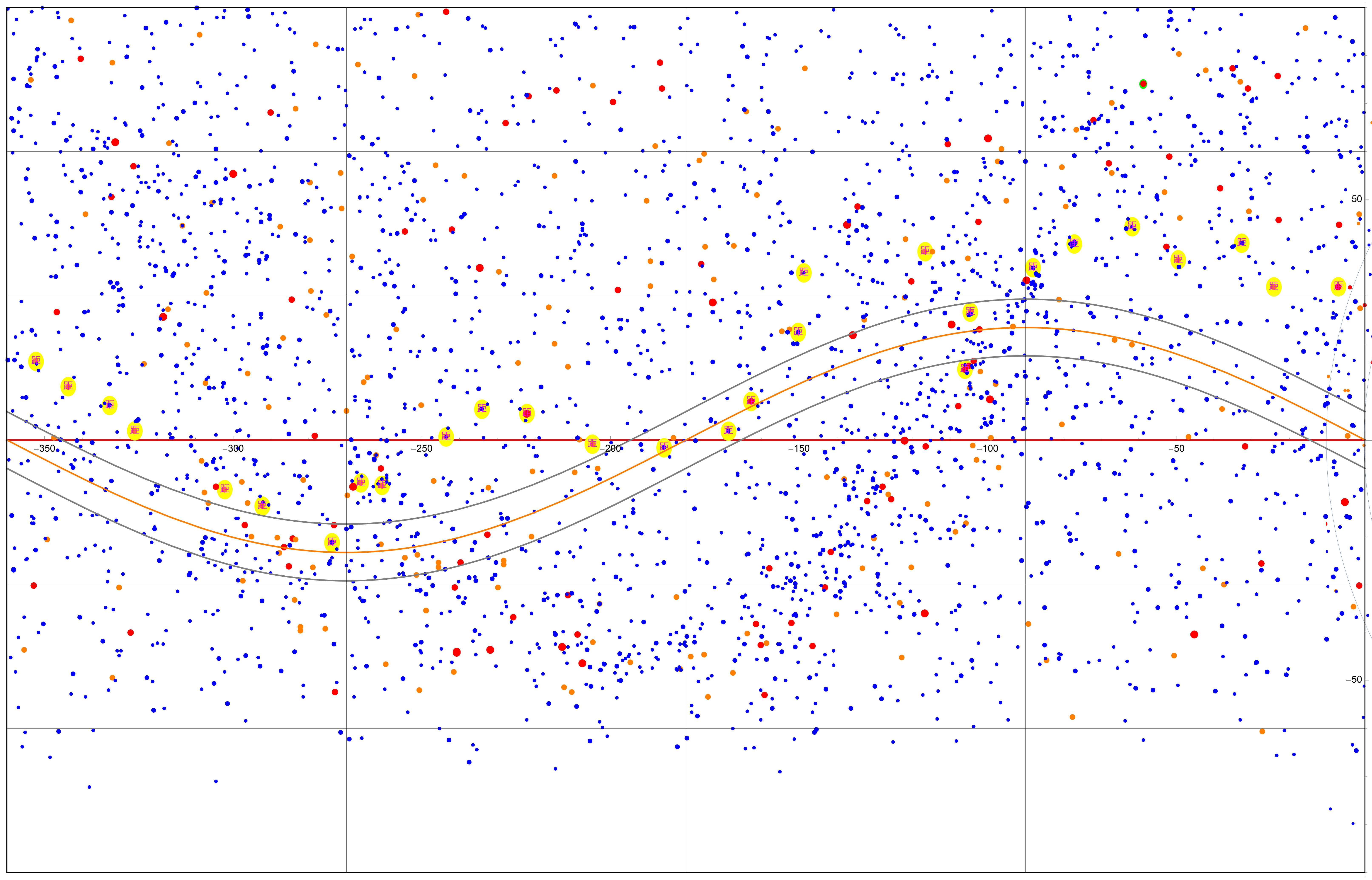
AD1 星図

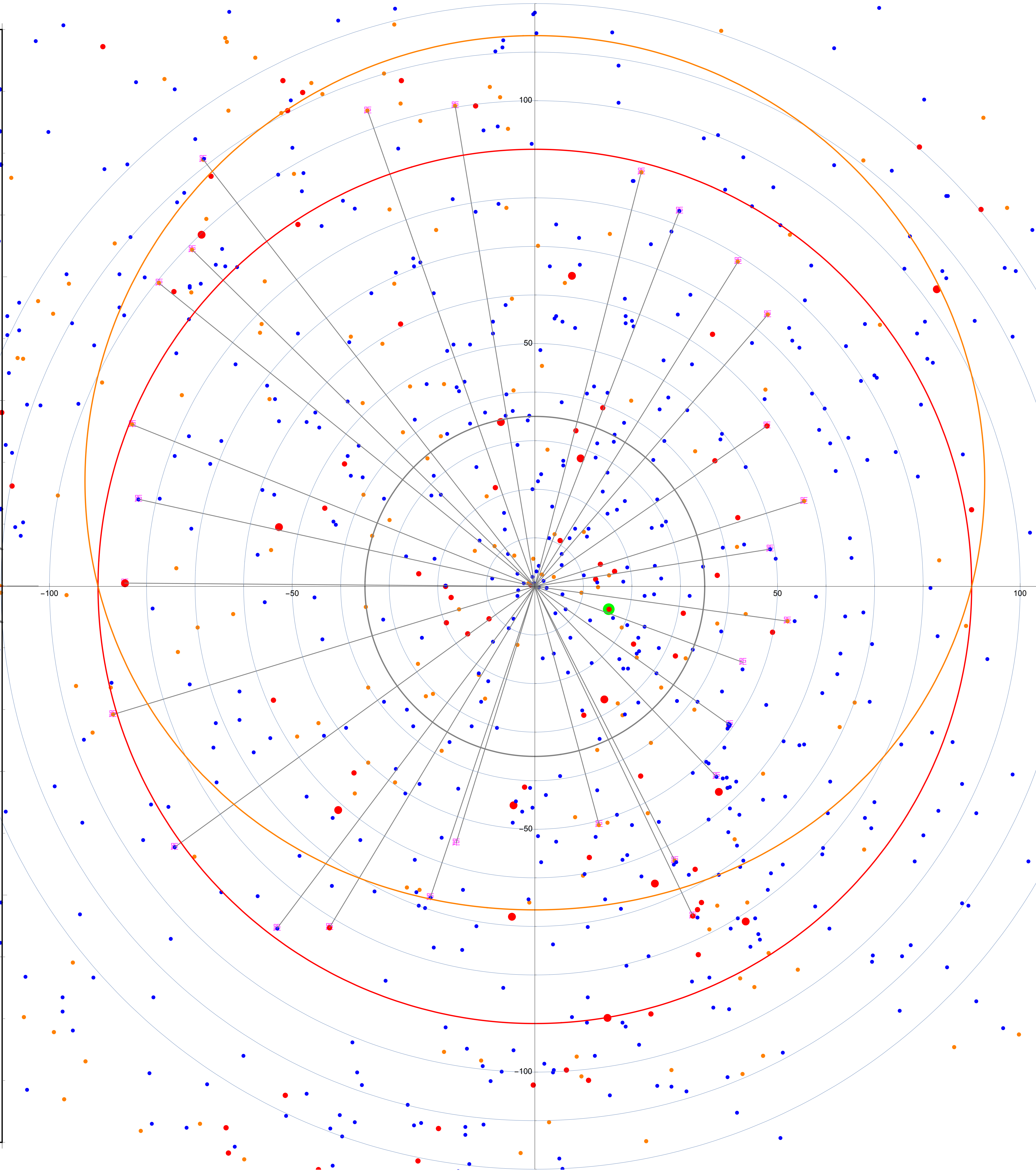
BC500 星図





BC1000 星図





28星宿の起源論争

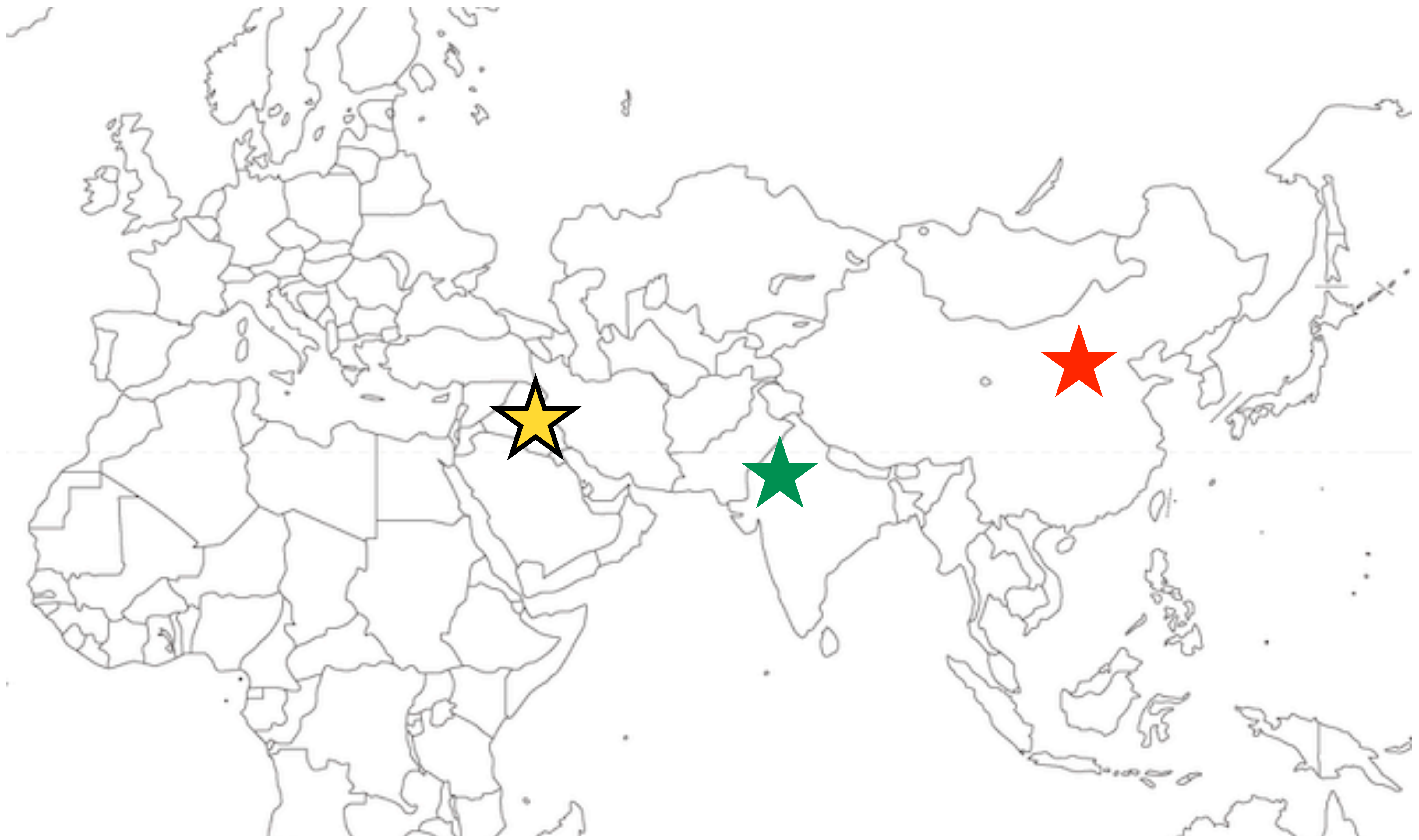


表 11: 春分点の変遷：二十八宿と西洋十二宮の対照表

推定年代	二十八宿	ナクシャトラ	西洋十二宮	歴史的・天文学的背景
前 3000 年頃	畢宿 (19)	ローヒニー	おうし座	古代シュメール・エジプト初期文明
前 2300 年頃	昴宿 (18)	クリッティカー (当時の 1)	おうし座	インドのヴェーダ時代　昴が起点に
前 1400 年頃	胃宿 (17)	バラニー	おひつじ座	中期ヴェーダ時代
前 500 年頃	婁宿 (16)	アシュヴィニー (当時の 1)	おひつじ座	ギリシャ占星術の体系化，春分点＝羊宮 0 度，ナクシャトラ 27 宿に
西暦 400 年頃	奎宿 (15)	レーヴァティー	うお座	
現在	壁/室 (14/13)	バードラパダー	うお座	現在
西暦 2600 年頃	危宿 (12)	シャタビシャジュ	みずがめ座	将来

Hindu Asterism　Arab Mansil　中国28星宿

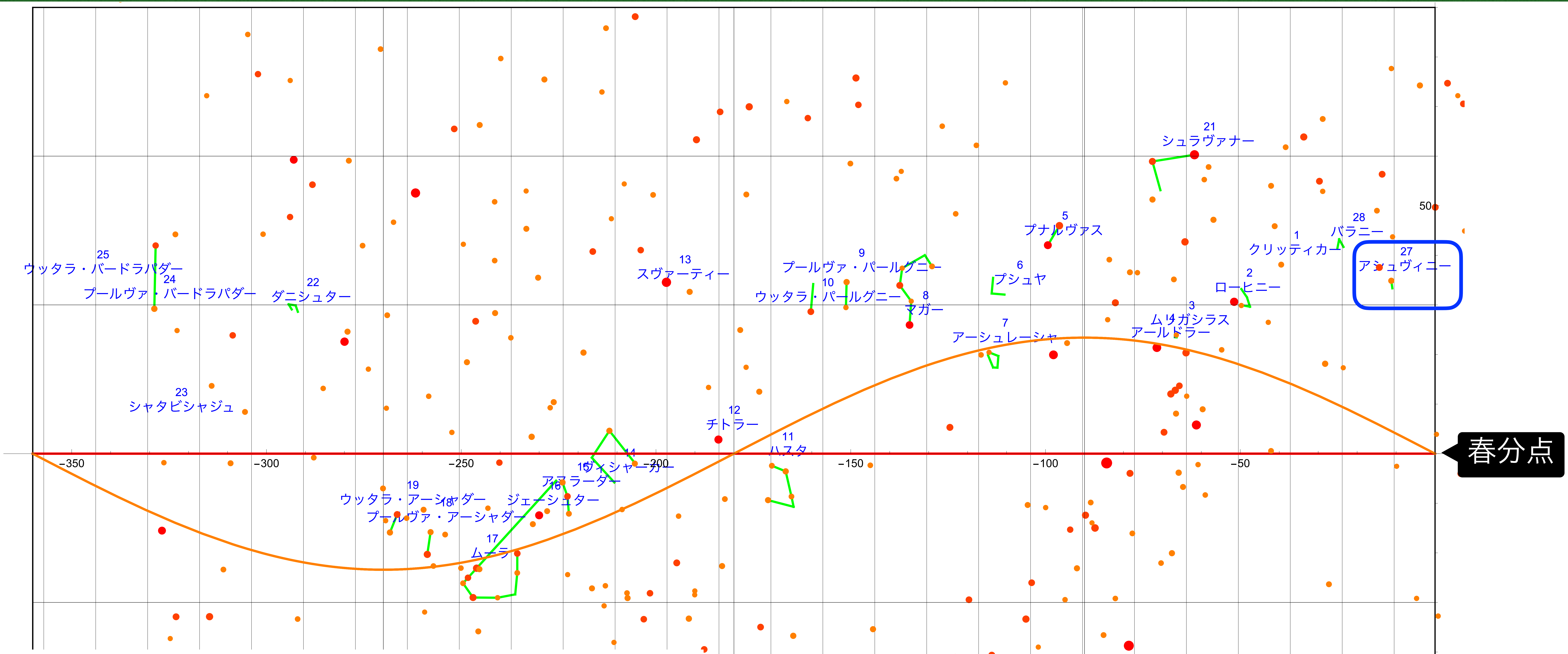
202　NATURE　[DECEMBER 28, 18

Hindu Asterism.	Arab Manzil.	Chinese Sieu.
1. Açvinî (The two gods) β and γ Arietis	1. ash-Sharatân (The two signs) β and γ Arietis	1. Mao η Tauri
2. Bharanî (Carrying away) 35, 39, and 41 Arietis	2. al-Buṭain (The little belly) 35, 39, and 41 Arietis	2. Pi ε Tauri
3. Kṛttikâ (Has been explained as matting; doubtful) η Tauri, &c. (Pleiades)	3. ath-Thuraiyâ (Probably "the cluster") η Tauri, &c. (Pleiades)	3. Tse λ Orionis
4. Rohinî (Red) α, θ, γ, δ, ε Tauri	4. ad-Dabarân ("The follower" of the Pleiades) α, θ, γ, δ, ε Tauri	4. Tsan δ Orionis
5. Mṛgaçiras (Head of deer) λ, ϕ^1, ϕ^2 Orionis	5. al-Hak'ah (The circle of hairs) λ, ϕ^1, ϕ^2 Orionis	5. Tsing (A well) μ Geminorum
6. Ârdrâ (Damp) α Orionis	6. al-Han'ah (Apparently "the wishing Asterism") η, μ, ν, γ, ξ Geminorum	6. Kuei θ Cancri
7. Punarvasu (Twice bright) β, α Geminorum	7. adh-Dhirâ' (The arm) β, α Geminorum	7. Lieu (The willow) δ Hydræ
8. Pushya (Auspicious) θ, δ, γ Cancri	8. an-Nathrah ("The point between lip and nostrils" of Leo) γ, δ Cancri, and Præsepe	8. Sing (A star) α Hydræ
9. Âçleshâ (Embracing, serpents) ε, δ, σ, η, ρ Hydræ	9. aṭ-Ṭarf ("The eyes" of Leo) ξ Cancri, λ Leonis	9. Chang ν^1 Hydræ
10. Maghâ (The strong?) α, η, γ, ζ, μ, ε Leonis	10. aj-Jabhah (The forehead) α, η, γ, ζ Leonis	10. Y α Crateris
11. Pûrva Phalgunî (Grey) δ, θ Leonis	11. az-Zubrah (The shoulder) δ, θ Leonis	11. Chin γ Corvi
12. Uttara Phalgunî β, 93 Leonis	12. aṣ-Ṣarfah ("The change" of weather) β Leonis	12. Kio (A horn) α Virginis
13. Hasta (Hard) δ, γ, ε, α, β Corvi	13. al-Auwâ ("The howler," sometimes conceived as a dog barking round Virgo) β, η, γ, δ, ε Virginis	13. Kang (Overbearing, stro… κ Virginis
14. Citrâ (Beautiful) α Virginis	14. as-Simâk (The prop) α Virginis	14. Ti (A foundation) α^2 Libræ
15. Svâtî α Bootis	15. al-Ghafr (Of uncertain sense) ι, κ, λ Virginis	15. Fang (Room, dwelling… π Scorpionis
16. Viçâkhâ (Fork) ι, γ, β, α Libræ	16. az-Zubânân ("The two claws" of the scorpion) α, β Libræ	16. Sin (The heart) σ Scorpionis
17. Anurâdhâ (Blissful) δ, β, π Scorpionis	17. al-Iklîl (The crown) β, δ, π Scorpionis	17. Uei (High) μ^2 Scorpionis
18. Jyeshṭhâ (The best) α, σ, τ Scorpionis	18. al-Ḳalb (The heart) α Scorpionis	18. Ki γ^2 Sagittarii
19. Mûla (Root) λ, υ, κ, ι, θ, η, ζ, μ, ε Scorpionis	19. ash-Shaulah ("The sting" of the scorpion) λ, υ Scorpionis	19. Teu φ Sagittarii
20. Pûrva-Ashâdhâ (Unconquered) δ, ε Sagittarii	20. an-Na'âim (The ostriches) γ^2, δ, ε, η, φ, σ, τ, ζ Sagittarii	20. Nieu β Capricorni
21. Uttara-Ashâdhâ (Unconquered) σ, ζ Sagittarii	21. al-Baldah (The hairless space between the eyebrows) N of π Sagittarii	21. Nü ε Aquarii
22. Abhijit (Victorious) α, ε, ζ Lyræ	22. Sa'd adh-Dhâbiḥ (Sa'd (luck) the sacrificer) α, β Capricorni	22. Hiü β Aquarii
23. Çravana (Lame) α, β, γ Aquilæ	23. Sa'd Bula' ("Greedy Sa'd," because the larger star seems to swallow the smaller) ε, μ, ν Aquarii	23. Goei α Aquarii
24. Çravishthâ (Most glorious) β, α, γ, δ Delphini	24. Sa'd as-Sú'ûd ("The luck of lucks" = specially lucky star β, ξ Aquarii	24. Che α Pegasi
25. Çatabhishaj (?) λ Aquarii, &c.	25. Sa'd al-Akhbiyah ("Sa'd with the tents") α, γ, ζ, η Aquarii	25. Pi γ Pegasi
26. Pûrva-Bhâdrapadâ (Having ox feet) α, β Pegasi	26. al-Fargh al-Muḳdim (The front lip of the bucket) α, β Pegasi	26. Koei ζ Andromedæ
27. Uttara-Bhâdrapadâ (Having ox feet) γ Pegasi, α Andromedæ	27. al-Fargh al-Mukhir (The hinder lip of the bucket) γ Pegasi, α Andromedæ	27. Leu β Arietis
28. Revatî (The rich) ζ Piscium, &c.	28. Baṭn al-Hût (The fish's belly) β Andromedæ, &c.	28. Oei 35 Arietis

NO. 1261, VOL. 49]

J. N. Lockyer, Nature 49 (1893) p199-203

インド・ナクシャトラ（前500年での星の位置）



(前500年の位置）緑色

表 11: 春分点の変遷：二十八宿と西洋十二宮の対照表

推定年代	二十八宿	ナクシャトラ	西洋十二宮	歴史的・天文学的背景
前 3000 年頃	畢宿 (19)	ローヒニー	おうし座	古代シュメール・エジプト初期文明
前 2300 年頃	昴宿 (18)	クリッティカー (当時の 1)	おうし座	インドのヴェーダ時代　昴が起点に
前 1400 年頃	胃宿 (17)	バラニー	おひつじ座	中期ヴェーダ時代
前 500 年頃	婁宿 (16)	アシュヴィニー (当時の 1)	おひつじ座	ギリシャ占星術の体系化，春分点＝羊宮 0 度，ナクシャトラ 27 宿に
西暦 400 年頃	奎宿 (15)	レーヴァティー	うお座	
現在	壁/室 (14/13)	バードラパダー	うお座	現在
西暦 2600 年頃	危宿 (12)	シャタビシャジュ	みずがめ座	将来

インド・ナクシャトラ（前1400年での星の位置）

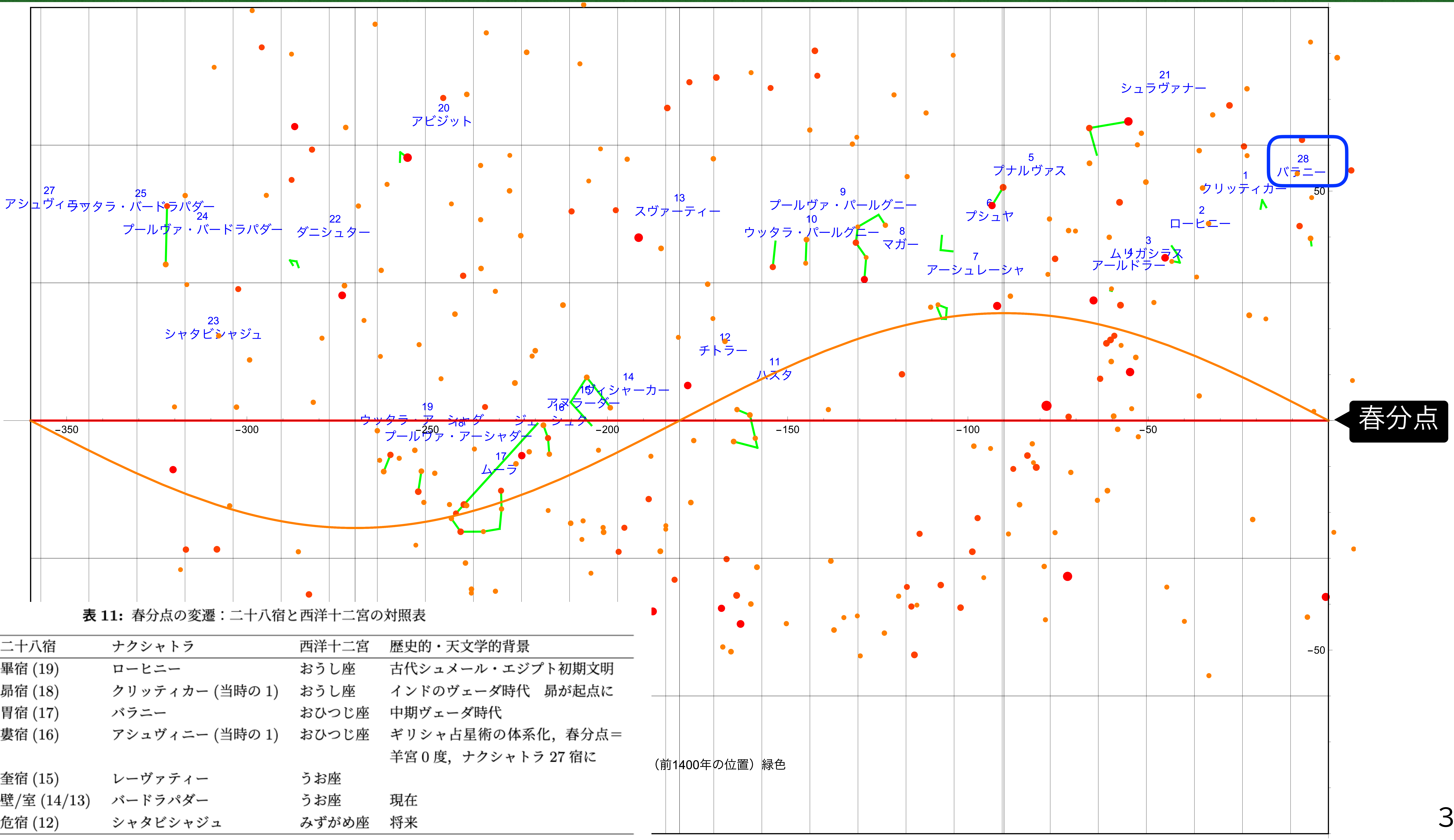


表 11: 春分点の変遷：二十八宿と西洋十二宮の対照表

推定年代	二十八宿	ナクシャトラ	西洋十二宮	歴史的・天文学的背景
前 3000 年頃	畢宿 (19)	ローヒニー	おうし座	古代シュメール・エジプト初期文明
前 2300 年頃	昴宿 (18)	クリッティカー (当時の 1)	おうし座	インドのヴェーダ時代　昴が起点に
前 1400 年頃	胃宿 (17)	バラニー	おひつじ座	中期ヴェーダ時代
前 500 年頃	婁宿 (16)	アシュヴィニー (当時の 1)	おひつじ座	ギリシャ占星術の体系化，春分点＝羊宮 0 度，ナクシャトラ 27 宿に
西暦 400 年頃	奎宿 (15)	レーヴァティー	うお座	
現在	壁/室 (14/13)	バードラパダー	うお座	現在
西暦 2600 年頃	危宿 (12)	シャタビシャジュ	みずがめ座	将来

インド・ナクシャトラ（前2300年での星の位置）

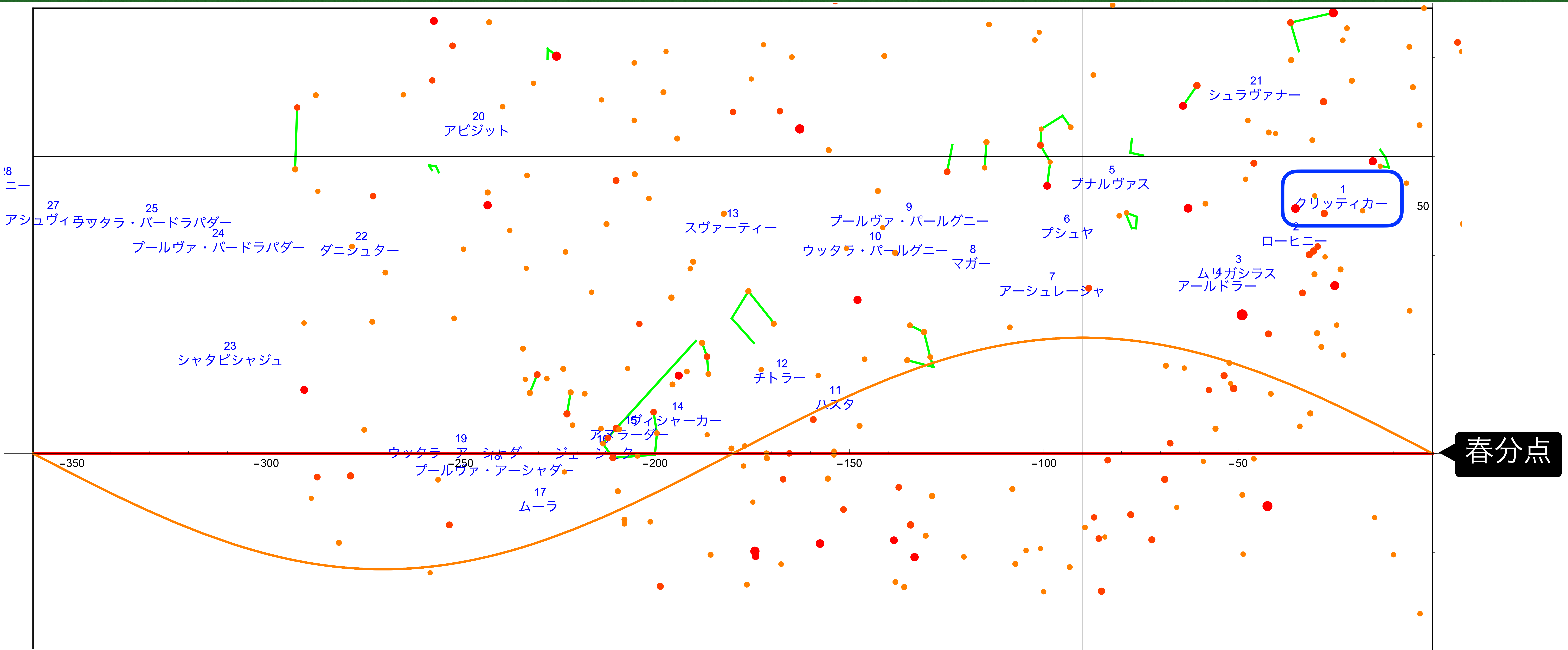


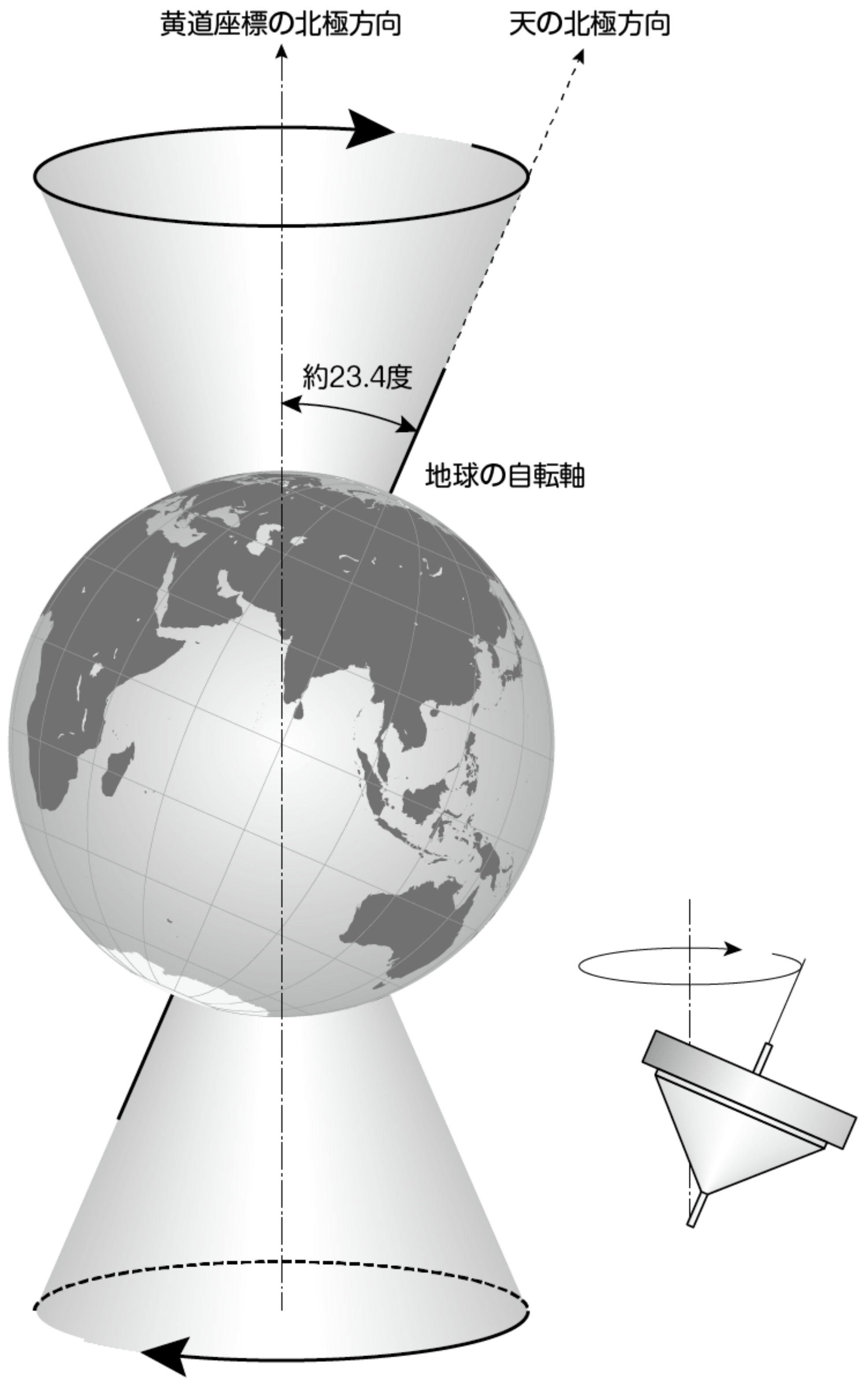
表 11: 春分点の変遷：二十八宿と西洋十二宮の対照表

推定年代	二十八宿	ナクシャトラ	西洋十二宮	歴史的・天文学的背景
前 3000 年頃	畢宿 (19)	ローヒニー	おうし座	古代シュメール・エジプト初期文明
前 2300 年頃	昴宿 (18)	クリッティカー (当時の 1)	おうし座	インドのヴェーダ時代　昴が起点に
前 1400 年頃	胃宿 (17)	バラニー	おひつじ座	中期ヴェーダ時代
前 500 年頃	婁宿 (16)	アシュヴィニー (当時の 1)	おひつじ座	ギリシャ占星術の体系化，春分点＝羊宮 0 度，ナクシャトラ 27 宿に
西暦 400 年頃	奎宿 (15)	レーヴァティー	うお座	
現在	壁/室 (14/13)	バードラパダー	うお座	現在
西暦 2600 年頃	危宿 (12)	シャタビシャジュ	みずがめ座	将来

−50

（前2300年の位置）緑色

歳差 (precession) と章動 (nutation)



惑星による歳差（黄道の歳差）もふくめ，すべてを考慮した歳差の大きさを一般歳差という．一般歳差の大きさは春分点の赤道方向で 50″/年，さらに春分点の黄道方向に 0.11″/年程度である [8]．天文年鑑（誠文堂新光社）に掲載された最近の値を表 7 に示す．これらから，2000 年から t 年後の歳差の大きさ（1 年分）は，

$$50''.2920 + a_1 t + a_2 t^2; \qquad a_1 = 2''.909 \times 10^{-4}, \quad a_2 = -3''.420 \times 10^{-5} \tag{6}$$

で与えられる．2000 年から t 年後の歳差によるずれ P は，この式を積分することにより，

$$50''.2920t + \frac{a_1}{2}t^2 + \frac{a_2}{3}t^3 \tag{7}$$

表 7: 天文年鑑に記載された一般歳差角

年	一般歳差
1996	50″.2902
2006	50″.2927
2016	50″.2919
2026	50″.2937

歳差の周期は，約26,000年
歳差によって，恒星の黄経は，**毎年50.27秒角**ずつ増加

章動の主成分の周期は， 18.6年（月の軌道である白道面の黄道面に対する傾きが約5度あり、その回転周期）.
歳差が引き起こす黄道傾斜角に**9秒角**程度の振動を加える.
1748年にイギリスの天文学者ブラッドリーが発見.

表 8: 歳差の発見の比較．現代値では，1 度/72 年となる．

	西洋	中国
発見	前 2c．ヒッパルコス	340．虞喜
発見時の値	1 度/100 年.	1 度/50 年.
発見時の解釈	恒星の位置が東へ移動.	冬至の太陽の位置が西へ移動.
備考		大明暦 (510) にて採用．1 度/46 年

1年の長さの変化

歳差による春分点の移動で，地球の1年間の長さは，100年あたり0.53秒長くなる（1年あたり5.3ミリ秒長くなる）.

潮汐摩擦（月の引力による海水の摩擦）などの影響で，地球の自転は非常にゆっくりと遅くなる．自転が遅くなると「1日」が長くなる（100年あたり2ミリ秒）ため，1太陽年に含まれる「日（自転の回数）」は、長い年月をかけて少しずつ減る.
この効果は地球史的には重要であるが，天文観測への影響は考えなくてよい.

南宋の統天暦で導入された消長法は，過去のデータに比べて1年の長さが変化している，というものだが，過去の不正確な値を盲目的に信じることで逆に不正確さを拡大した．授時暦では，消長法による修正値は，「1年の長さは，100年で2/10000日ずつ（1年で17ミリ秒）減少する」とした.
この値は，貞享暦・宝暦暦で使われた．後に麻田剛立が，消長法の値を「1年で37.6ミリ秒増加する」とし，寛政暦で使われたが，天保暦では廃止された.

補間法・近似法　（1）『周髀算経』で使われた線形補間

凡八節二十四氣氣損益九寸九分六分分之一冬至晷長一丈三尺五寸夏至晷長一尺六寸問次節損益寸數長短各幾何

冬至晷長一丈三尺五寸
小寒丈二尺五寸五小分
大寒丈一尺五寸一分四小分
立春丈五寸二分三小分
雨水九尺五寸二分二小分
啓蟄八尺五寸四分一小分
春分七尺五寸五分
清明六尺五寸五分五小分
穀雨五尺五寸六分四小分
立夏四尺五寸七分三小分
小滿三尺五寸八分二小分
芒種二尺五寸九分一小分
夏至一尺六寸

周髀算經卷下

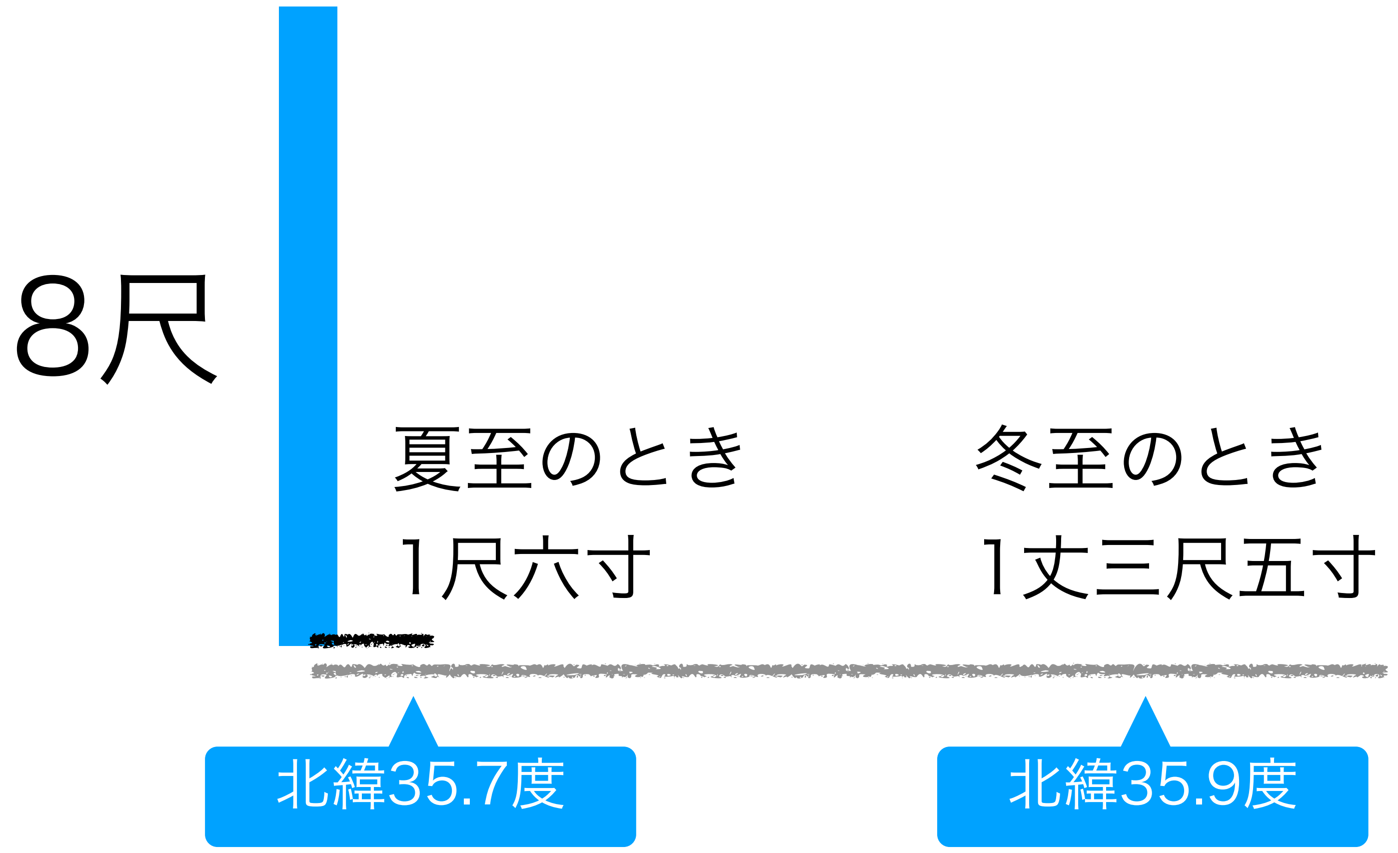
小暑二尺五寸九分一小分
大暑三尺五寸八分二小分
立秋四尺五寸七分三小分
處暑五尺五寸六分四小分
白露六尺五寸五分五小分
秋分七尺五寸五分
寒露八尺五寸四分一小分
霜降九尺五寸三分二小分
立冬丈五寸二分三小分
小雪丈一尺五寸一分四小分
大雪丈二尺五寸五小分

凡為八節二十四氣
二至者寒暑之極二分者陰陽之和四立者生長收藏之始是為八節節三氣三而八之故為二十四
氣損益九寸九分六分分之一
損者減也破一分為六分然後減之益者加也以小分滿六得一從分

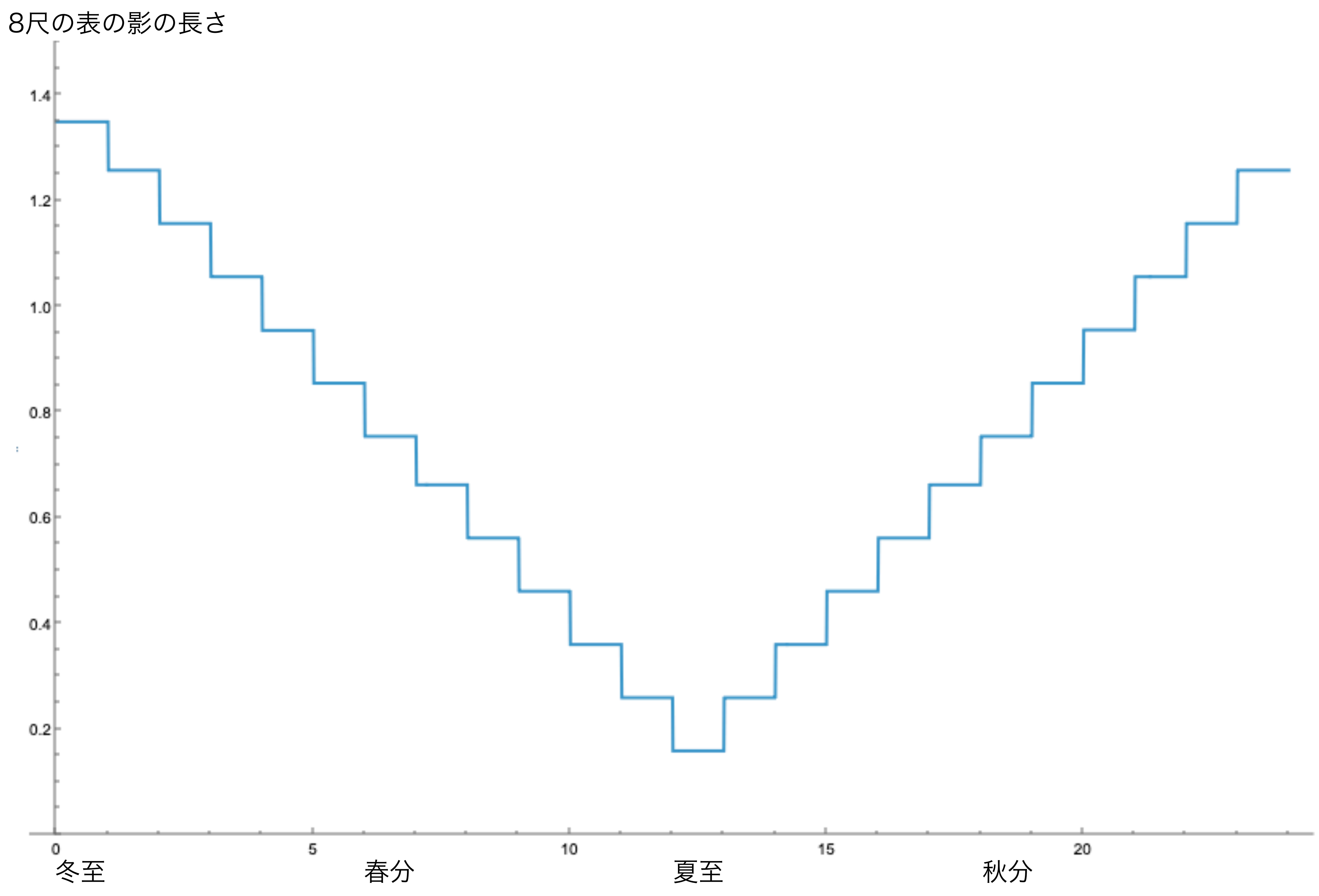
周髀算經卷下

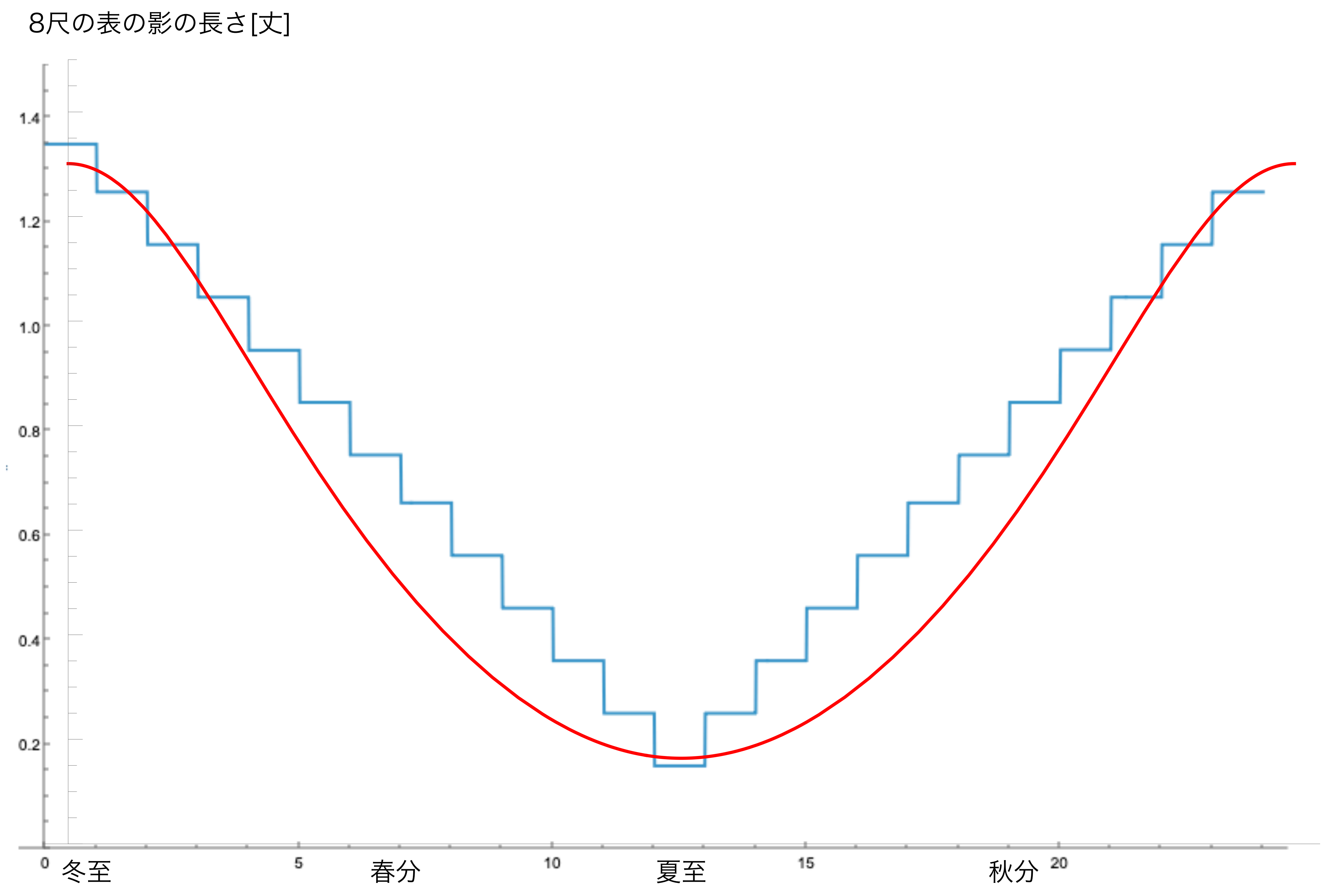
冬至夏至為損益之始
冬至晷長極當反短故為損之始夏至晷短極當反長故為益之始此爽之新術
術曰置冬至晷以夏至晷減之餘為實以十二為法
十二者半歲十二氣也為法者一節益之法
實如法得一寸不滿法者十之以法除之得一分

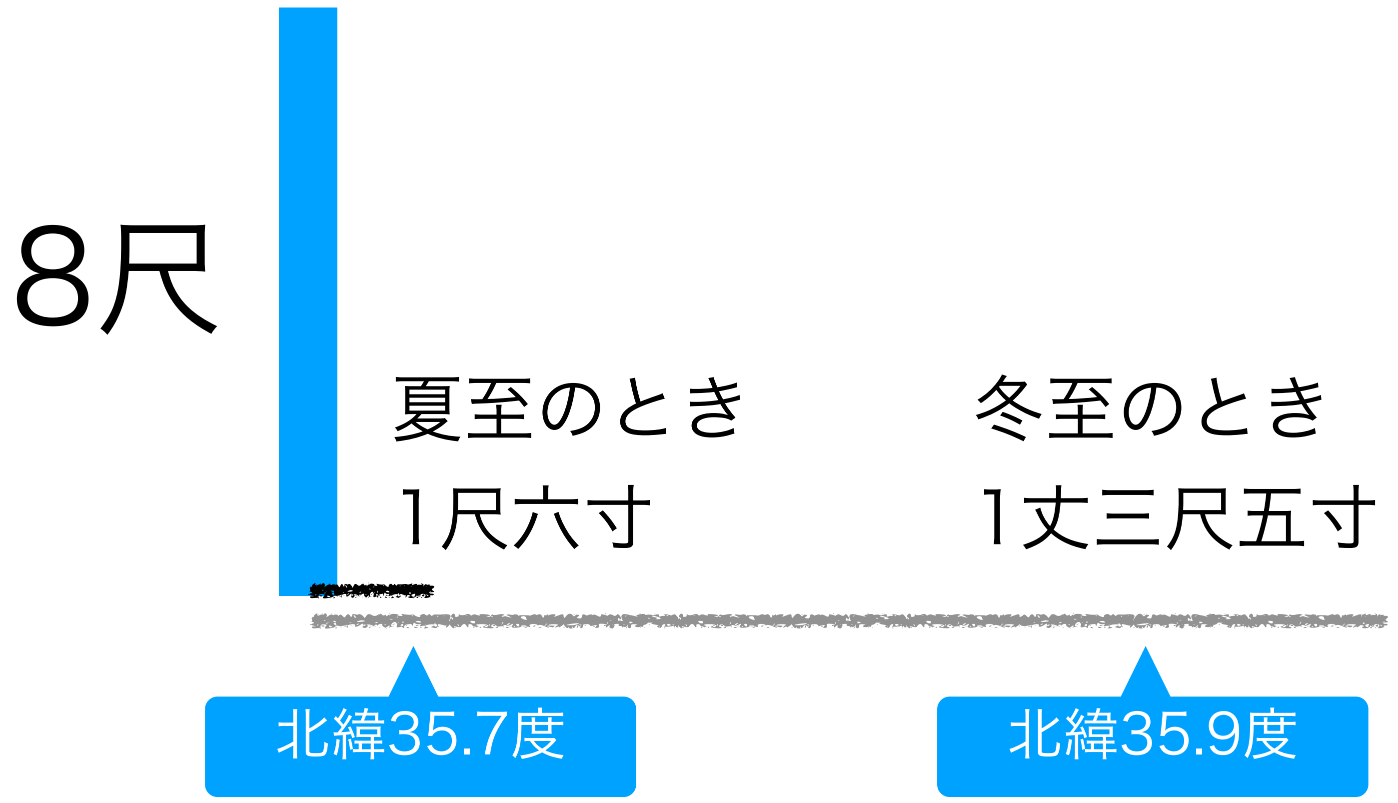
西周（前1046～前771）の首都は鎬京（こうけい）（現在の陝西省西安市付近，N34.3）
東周（前770～前256）の首都は洛邑（らくゆう）（現在の河南省洛陽市，N34.7）
秦（前221～前202）の首都は咸陽（現在の陝西省咸陽市，N34.4）
前漢（前202～前2）の首都は長安（現在の陝西省西安市付近，N34.2）
後漢（25～220）の首都は洛陽（N34.7）



補間法・近似法　（1）『周髀算経』で使われた線形補間







補間法・近似法　（2）祖沖之による冬至の決定方法

正確に日時を決めるために，影の長さが極値を取る計算がなされた．祖沖之によって考案された方法は，冬至・夏至の前後の 3 回の計測を用いるものである．例えば，冬至を挟んで，冬至の前に 2 日計測する．t_1 と t_2 日の影の長さがそれぞれ，p, q とする．冬至の後に，影の長さ r が $[p, q]$ 間となる日を t_3 と求める．この 3 つのデータから，$[t_1, t_2]$ 間で，影の長さが r と一致する瞬間 x は，

$$\frac{x - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{p - r}{p - q} \tag{8}$$

より，求められ，冬至の瞬間 T は，その前後で影の長さが対称であるとすれば，

$$\frac{t_3 - x}{2} = T \tag{9}$$

として求められる [6]．江戸時代には「沖之之法」あるいは「勾配法」と呼ばれた [9] 方法である．

ただし，地球の公転軌道が楕円であること（近日点付近では太陽の動きが速いこと）や，冬至点と近日点のズレを考慮する必要がある．そのため，単なる左右対称の計算ではなく，実際のズレ量を補正する必要があった[*10]．

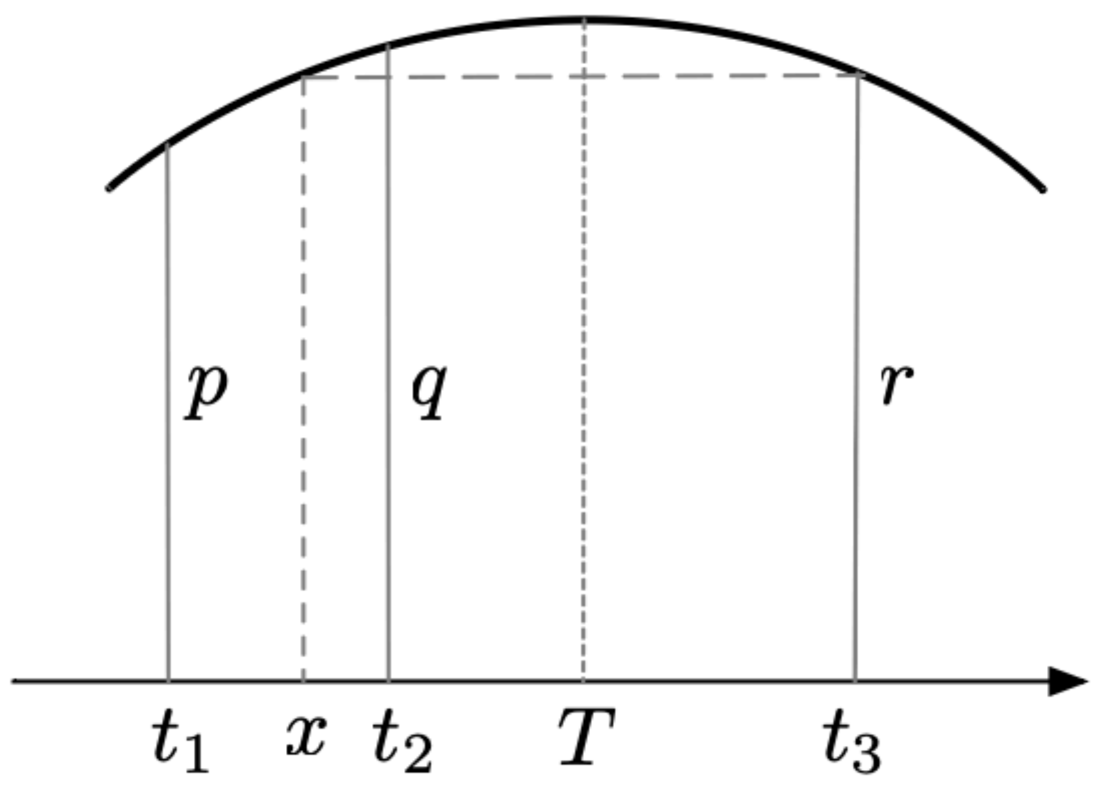


図 4: 影の長さから，冬至の瞬間 T を決定する祖沖之の方法．

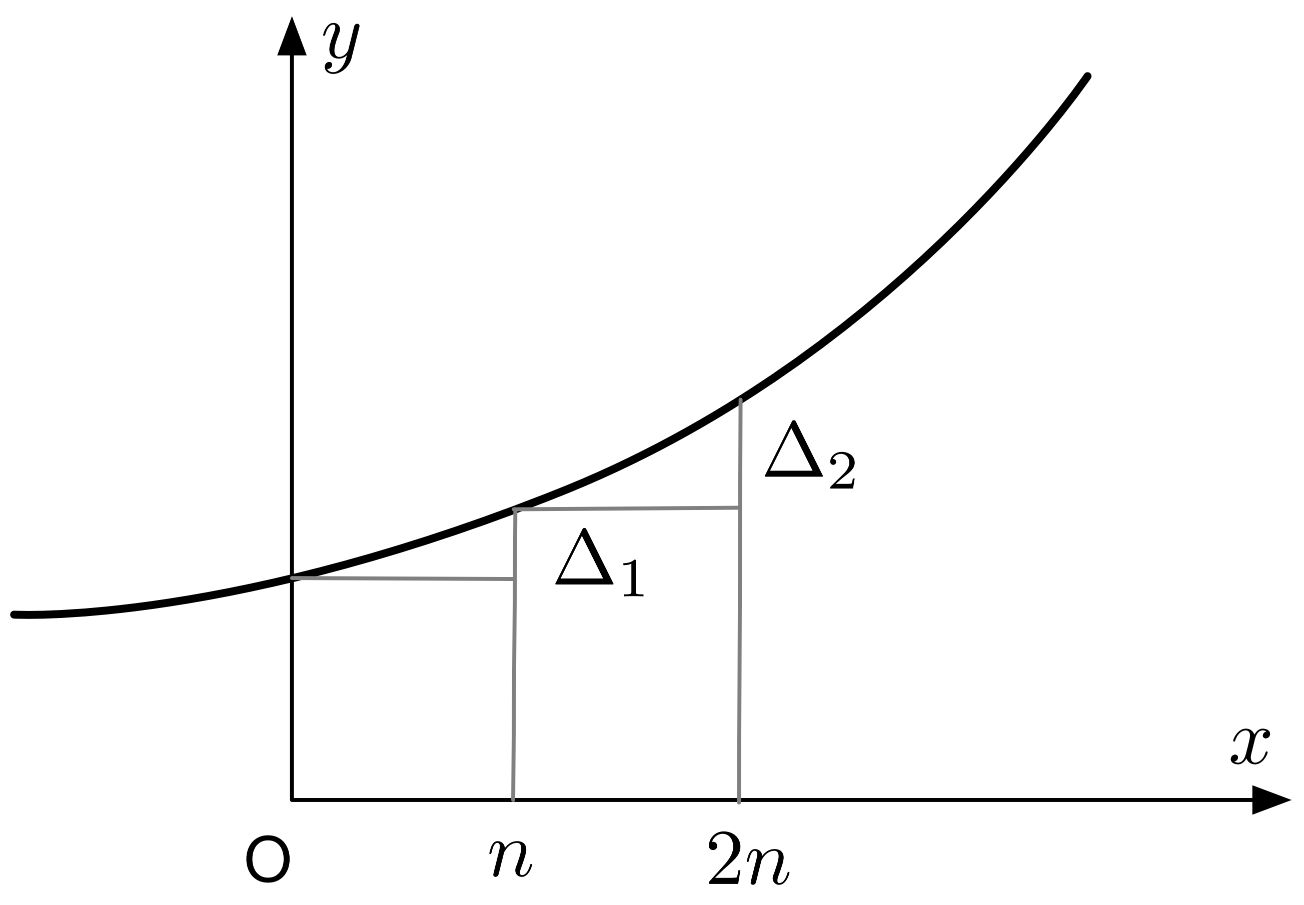
補間法・近似法　（3）等間隔データの2次式補間

平朔から定朔への移行にあたっては，月の位置観測によるデータ処理が必要になる．月の運動の不等性による補正を求めるために，月は毎日観測された．このため，等間隔データの補間公式が開発された．

随代の劉〓（りゅうしゃく） (544-610, 〓は火＋卓) は，皇極（こうきょく）暦（建議したが，公的には採用されなかった）の中で，2 次式を用いた補間公式を考案した．節気間のある日の長さ（遅速数）を求める/月の朔弦望の予定日を推算/月の朔弦望を日の入りの遅速度に合わせて求める/月の日動への入交を求める，の 4 箇所で補間公式を求めているという [10].

例えば 1 年を 24 の節気で等分し，1 日の長さを考える．平均的な長さに対して遅いか早いかの遅速数を調べる．ある節気から次の節気への差 Δ_1 と，その次の節気への差 Δ_2 を既知として，ある日 x での遅速数を求めたい．すなわち，$(0, f(a)), (n, f(a)+\Delta_1), (2n, f(a)+\Delta_1+\Delta_2)$ の 3 点のデータがあるとき，この関数を $f(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ として近似すると，次の式が得られる．

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \frac{3\Delta_1-\Delta_2}{2n}x - \frac{\Delta_1-\Delta_2}{2n^2}x^2 \\
&= f(a) + \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\frac{x}{n} + (\Delta_1-\Delta_2)\frac{x}{n} - \frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}\frac{x^2}{n^2} \qquad (10)
\end{aligned}
$$



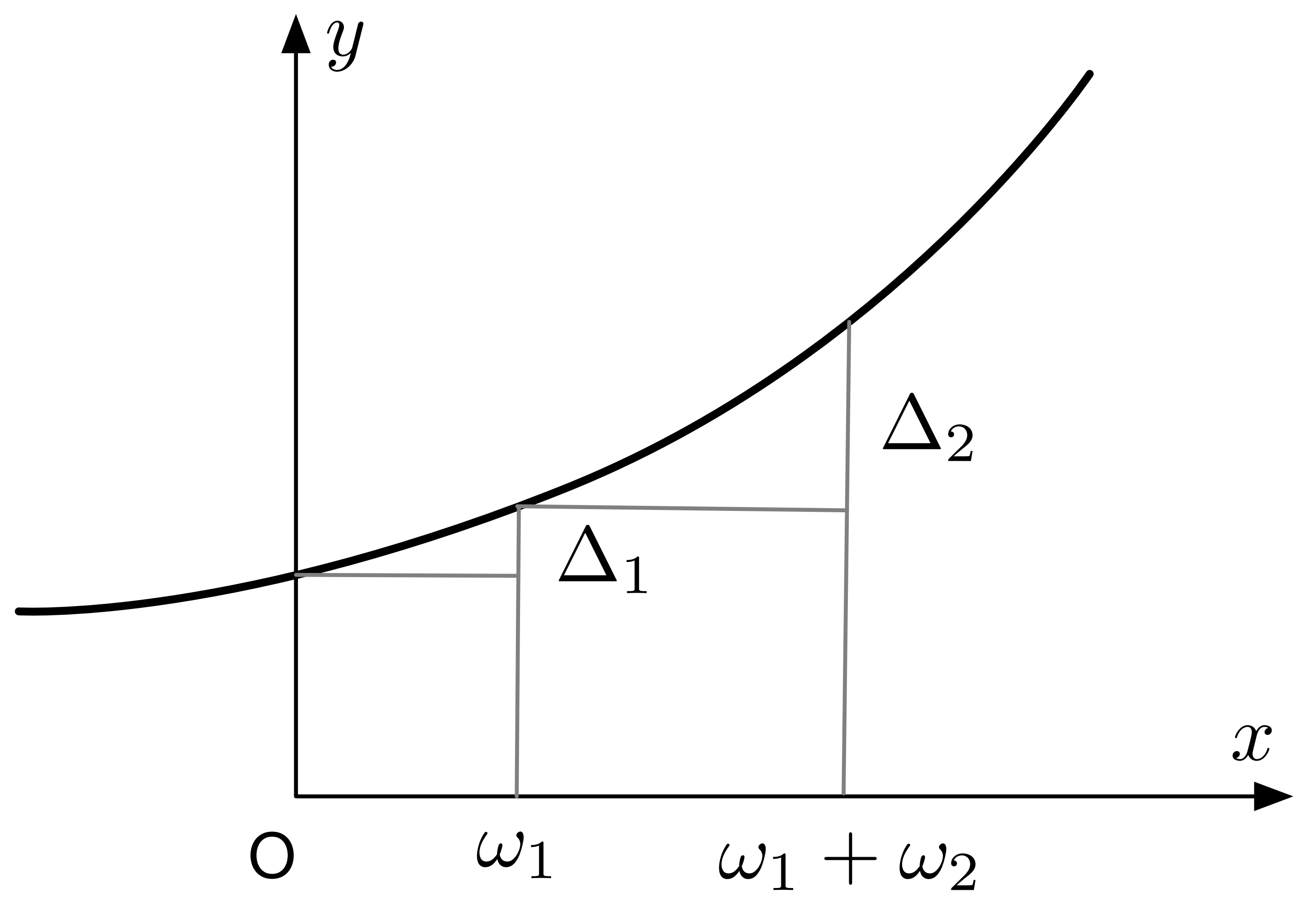
補間法・近似法　（3）不等間隔データの2次式補間

二十四節気は等間隔ではない．不等間隔の補間法が必要となった．

唐代の一行（いちぎょう）(張遂，683-727) は，不等間隔の補間法を導き出し，大衍暦（だいえん）(729–) にて利用された．いま，$(0, f(a)), (w_1, f(a)+\Delta_1), (w_1+w_2, f(a)+\Delta_1+\Delta_2)$ の 3 点のデータがあるとき，この関数を $f(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ として近似すると，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(a) - \frac{\Delta_2 w_1^2 - 2\Delta_1 w_1 w_2 - \Delta_1 w_2^2}{w_1 w_2 (w_1+w_2)} x - \frac{-\Delta_2 w_1 + \Delta_1 w_2}{w_1 w_2 (w_1+w_2)} x^2 \\
&= f(a) + 2\Delta_1 \frac{x}{w_1+w_2} + \left(\frac{\Delta_1 w_2}{w_1} - \frac{\Delta_2 w_1}{w_2}\right) \frac{x}{w_1+w_2} - \left(\frac{\Delta_1}{w_1} - \frac{\Delta_2}{w_2}\right) \frac{x^2}{w_1+w_2} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

となる．$w_1 = w_2 = n$ と等間隔にすれば劉■（りゅうしゃく）の公式 (10) に戻る．後の宣明暦で，徐昂が太陽や月の視運行速度を計算したとき，「大衍暦の旧術に因った」と記しているのは，式 (11) である [10]. [*11]



補間法・近似法　（4）3次式補間

太陽の運動の不等性の観測は長期間のデータを扱うことになる．天体の視運行は等加速度運動ではないことがわかると，3 次補間が必要となった．趙知微（ちょうちび）は，等間隔データに対する 3 次補間法を用いて重修大明暦 (1171 年-) を作成した．その際，関数を

$$f(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \tag{15}$$

として，定数項をゼロとする工夫がなされた．

授時暦（§5.2）を編纂した元代の郭守敬（かくしゅけい） (1231-1316)・王恂（おうじゅん）（1235-81）は，太陽や月の位置の日ごとの位置（階差）の記述に，1 次の差（速度）だけでなく，2 次の差（加速度），さらには 3 次の差（加速度の変化率）まで考慮した**立招差法**（3 次補間）あるいは**■累招差法**（たいるい） (■は，土へんに几＋木) [*12]（高次補間）を開発した．招差とは，天体の位置データなどの「観測値の差（階差）」から，求めたい未知の値を「招き寄せる（補間・推定する）」という意味である．

冬至から春分までの 1 象限 ($91.31^{\#}$) を太陽は 88.91 日で動く．春分から夏至までは 93.71 日である．これらを平均値からの盈縮（えいしゅく）積差として「$2.4^{\#}$ の盈積（えいせき）」「$2.4^{\#}$ の縮積（しゅくせき）」と呼んだ．式 (15) にて，x を冬至からの日数，$f(x)$ を積差とすると，$f(x)/x$ は「日平差」である．式 (15) の $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は，それぞれ「定差」「平差」「立差」という．授時暦では具体的に

$$f(x) = 513.32x - 2.46x^2 - 0.0031x^3 \tag{16}$$

と求めていた [10].

補間法・近似法　（5）累裁招差之法（関孝和）

これは暦学とは異なるが触れておく．関孝和の遺稿をまとめた『括要算法』(1712) 巻元には，朶積術(だせき)として，自然数の k 乗の和

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k \tag{17}$$

を求める問題が扱われている．高校数学で，数列の和として教えられる公式

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \tag{18}$$

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6}n + \frac{3}{6}n^2 + \frac{2}{6}n^3 \tag{19}$$

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{4}n^3 \tag{20}$$

などを一般化したものである．ベルヌーイ数（本稿の付録 B）の発見とも言われる箇所である．これらを導くプロセスに，招差法が応用された．

たとえば，$S_2(n)$ は，階差を 3 回とるとすべて 1 になることから，n^3 までの多項式と予測される．式 (15) を 3 次多項式まで拡張した式を用いて，その係数を決定することで $S_2(n)$ を求める，という方針である．

自然数のべき乗和

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

を求める式が，

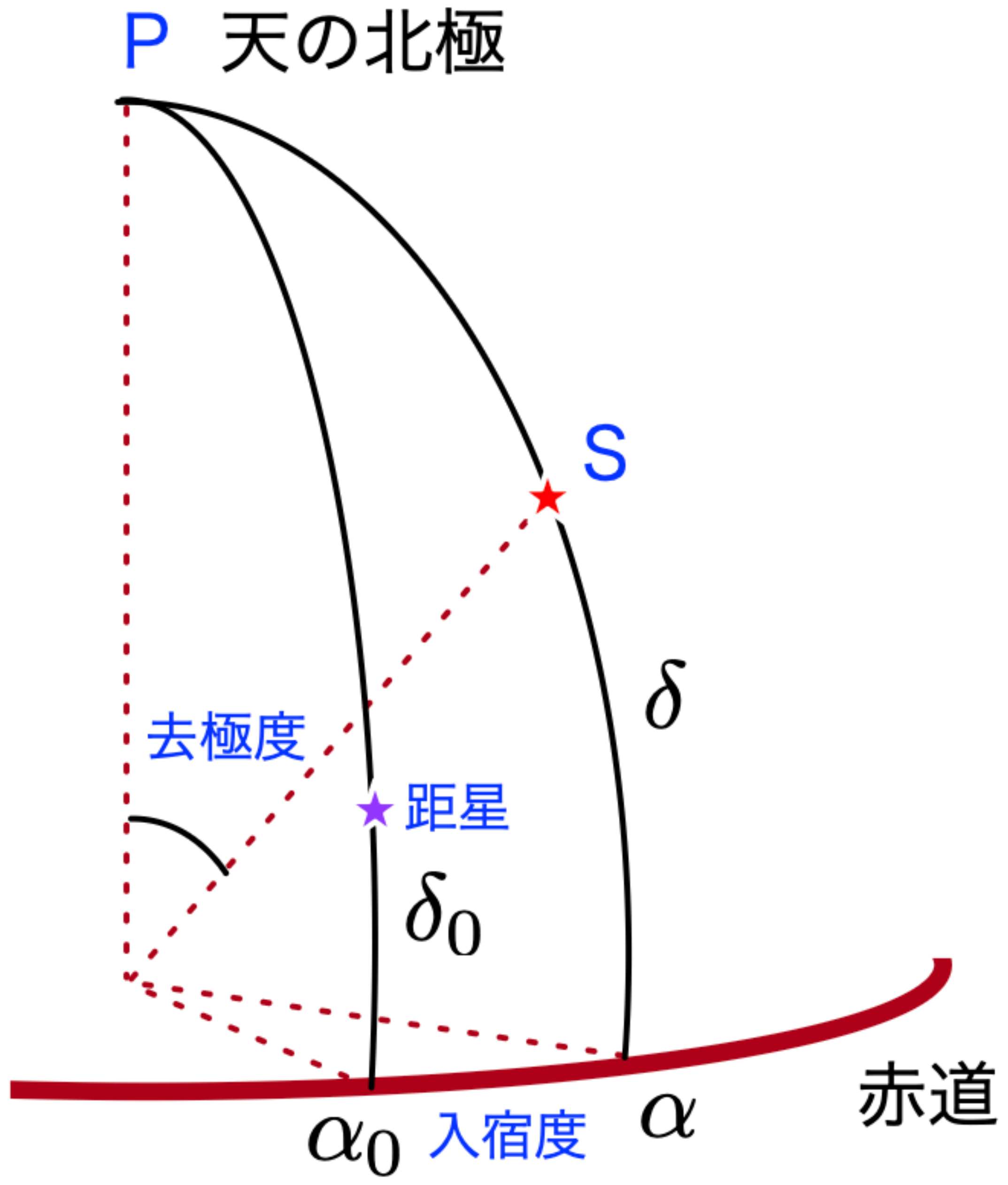
$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j n^{k+1-j}$$

$$\text{where}\quad B_0 = 1,\quad B_1 = \frac{1}{2},\quad B_2 = \frac{1}{6},\quad B_3 = 0,\quad B_4 = -\frac{1}{30},\cdots$$

となることを関は見出していた（ヤコブ・ベルヌーイは，1723 年に見出した）．B_j はベルヌーイ数と呼ばれる．

天測の座標系：赤道座標・黄道座標・極黄道座標

Equatorial Coordinate System・Ecliptic Coord Sys.・Polar Ecliptic Coord Sys.



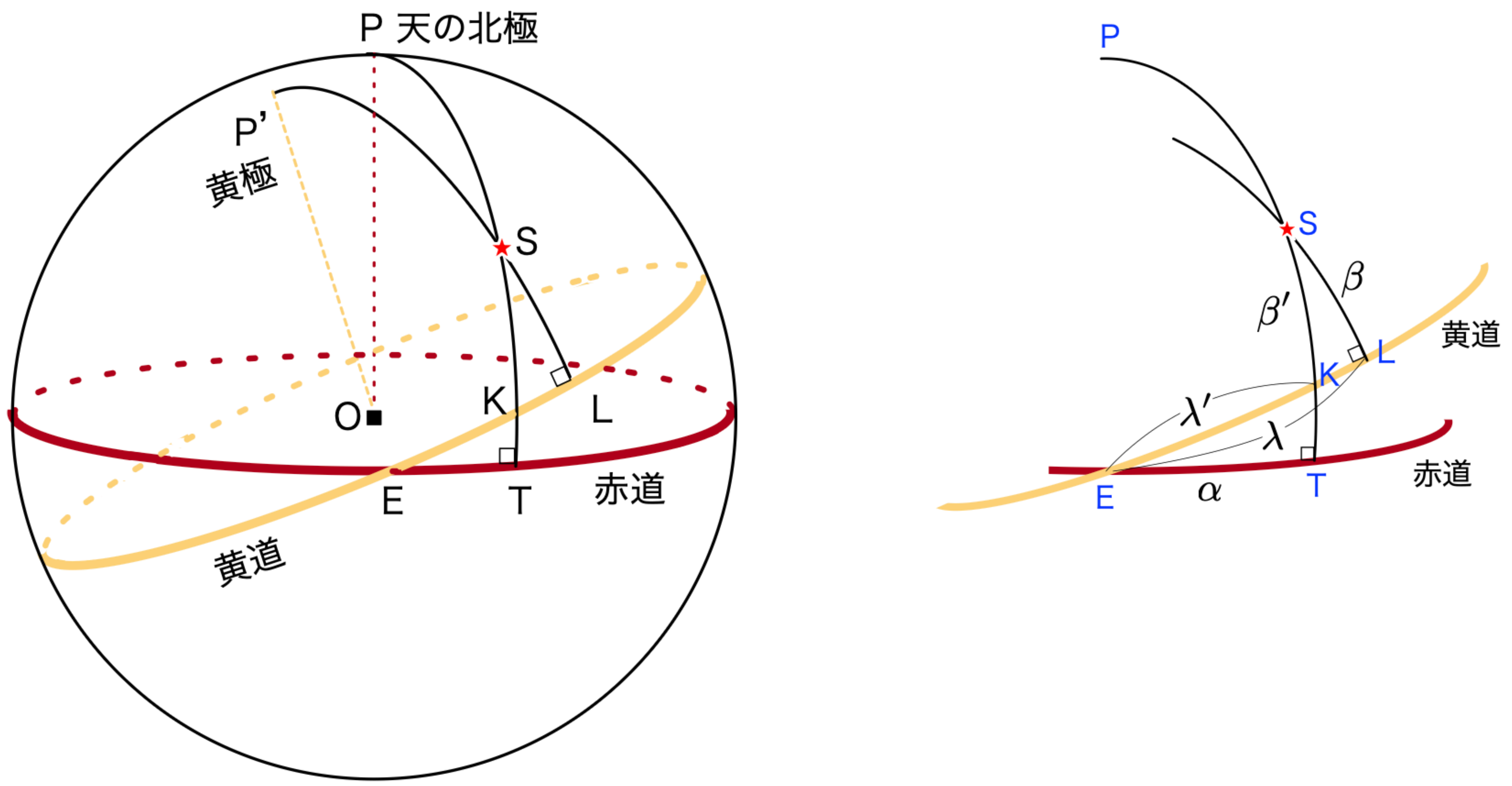


図 6: 黄道座標系 (λ, β) と極黄道座標系 (λ', β').

距星を基準に星Sの位置をいう

入宿度 $= \alpha - \alpha_0$,　　去極度 $= 90° - \delta$

赤道座標：赤経 $\alpha = \overset{\frown}{ET}$，赤緯 $\delta = \overset{\frown}{TS}$

黄道座標：黄経 $\lambda = \overset{\frown}{EL}$，黄緯 $\beta = \overset{\frown}{LS}$

極黄道座標：黄経 $\lambda' = \overset{\frown}{EK}$，黄緯 $\beta' = \overset{\frown}{KS}$

ブラーエ以降，現在標準

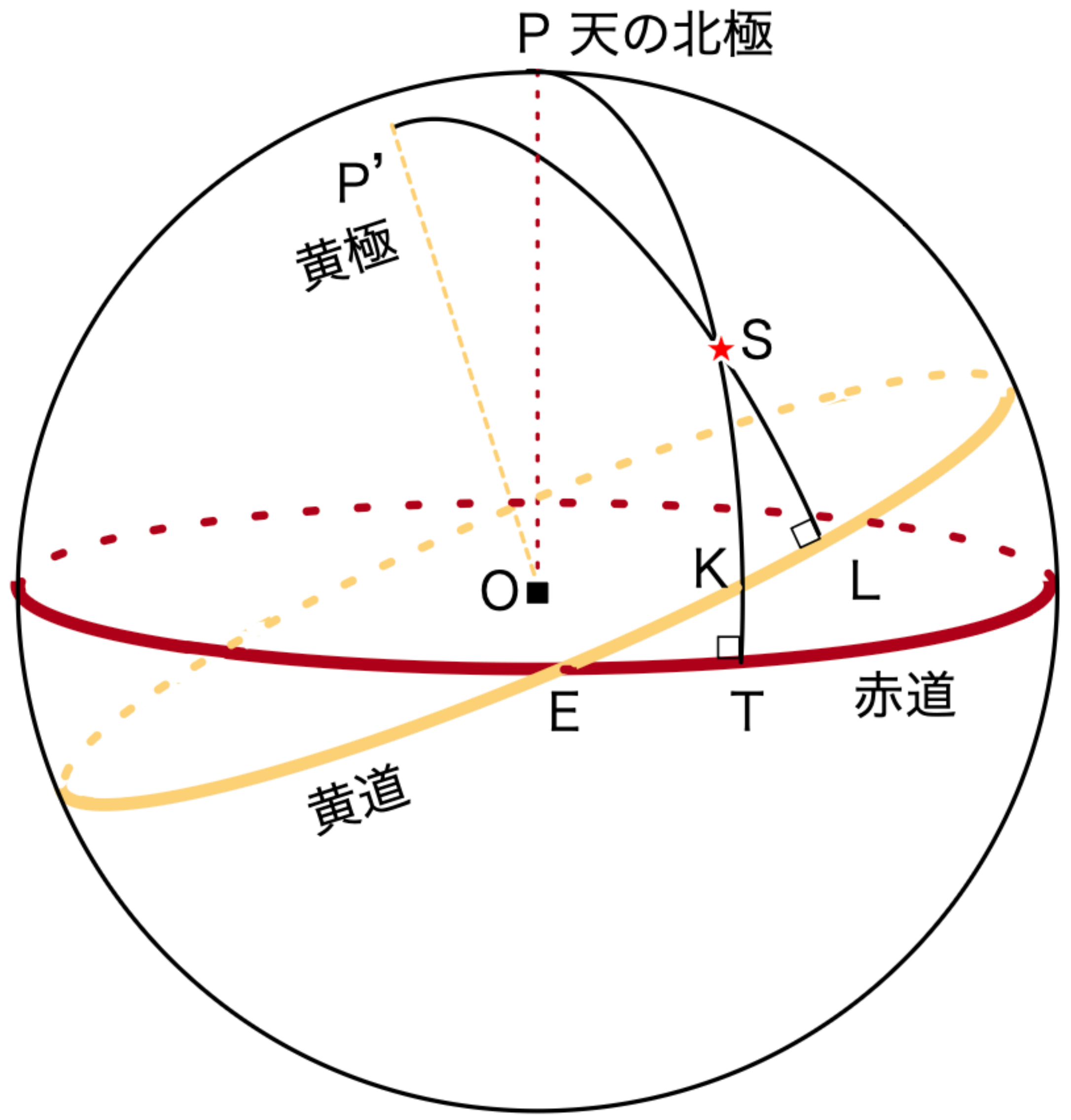
西洋

中国・インド

太陽や月の位置を表す

天測の座標系：赤道座標・黄道座標・極黄道座標

Equatorial Coordinate System・Ecliptic Coord Sys.・Polar Ecliptic Coord Sys.



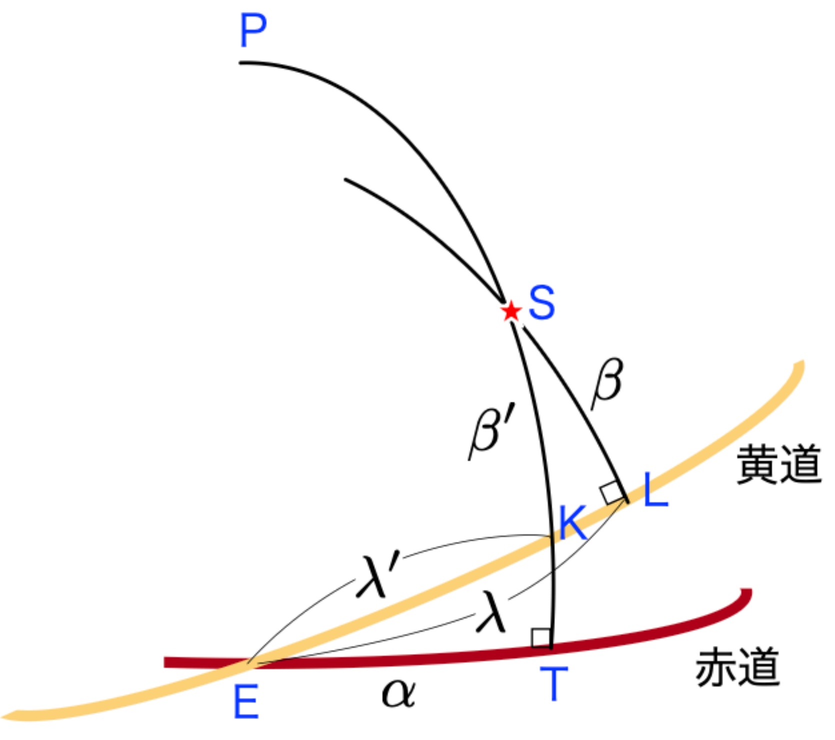
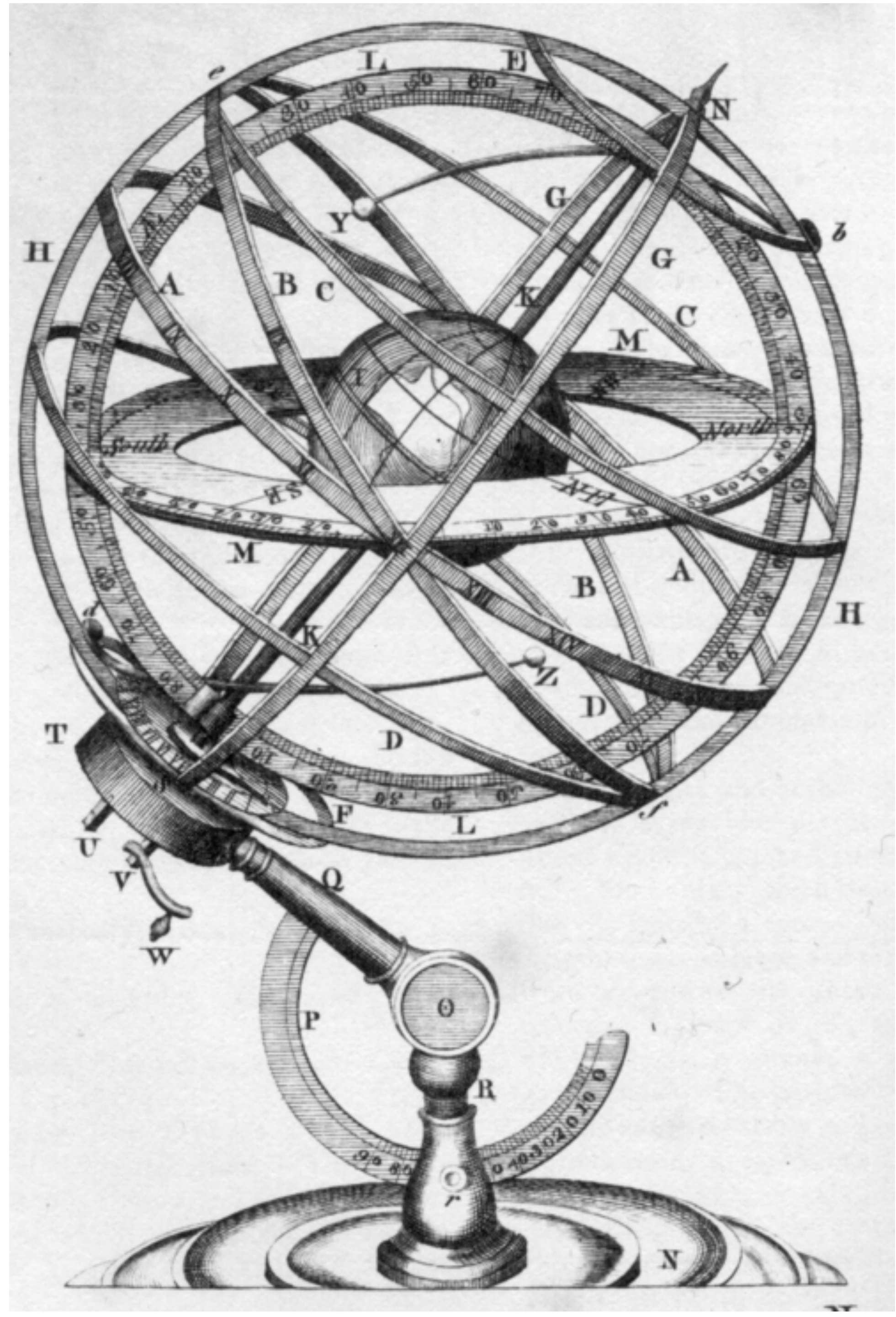


図 6: 黄道座標系 (λ, β) と極黄道座標系 (λ', β').

赤道座標：赤経 $\alpha = \overset{\frown}{ET}$，赤緯 $\delta = \overset{\frown}{TS}$

黄道座標：黄経 $\lambda = \overset{\frown}{EL}$，黄緯 $\beta = \overset{\frown}{LS}$

極黄道座標：黄経 $\lambda' = \overset{\frown}{EK}$，黄緯 $\beta' = \overset{\frown}{KS}$



渾天儀

Armillary sphere

天測の座標系変換：球面三角法

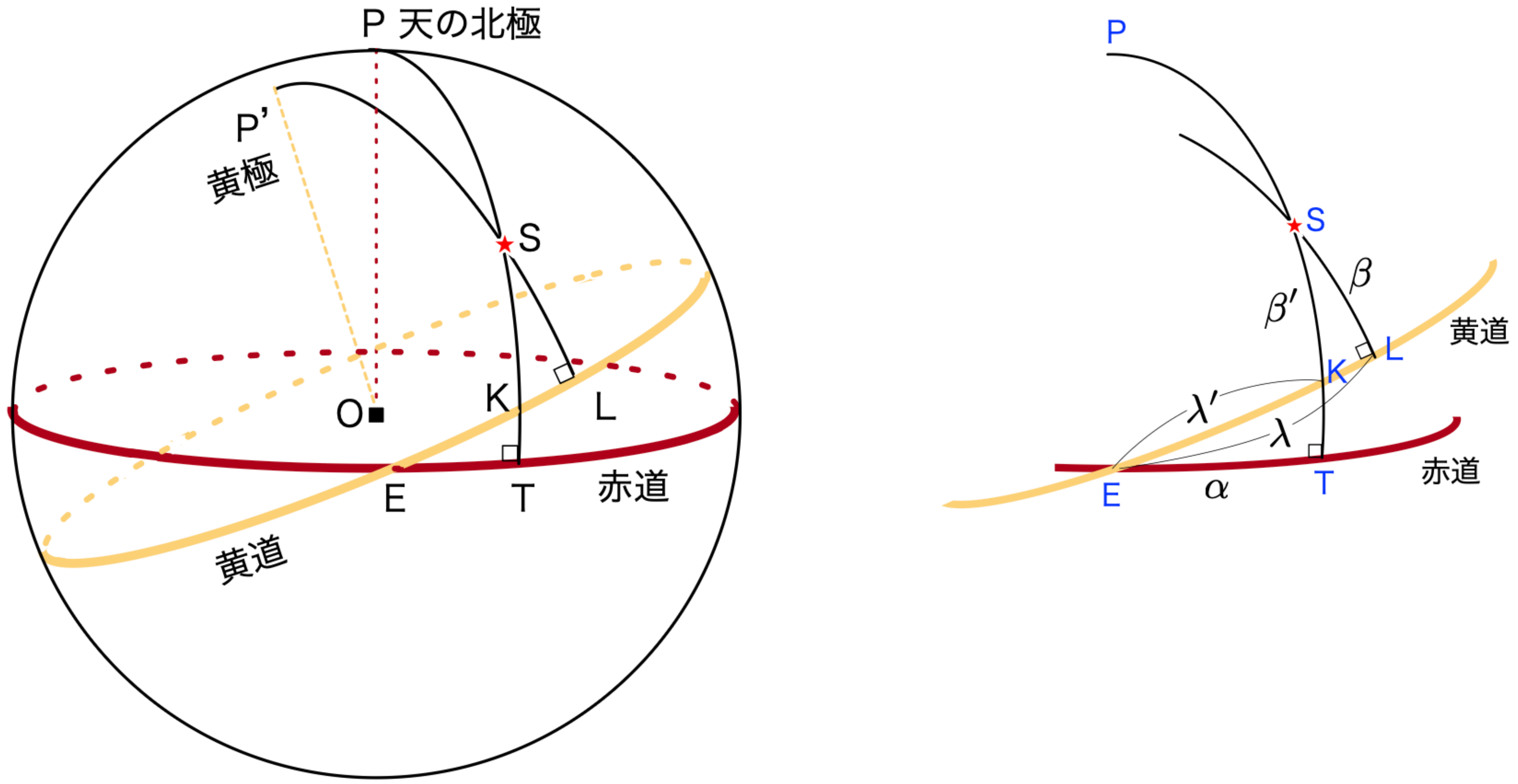


図 6: 黄道座標系 (λ, β) と極黄道座標系 (λ', β').

赤道座標：赤経 $\alpha = \overset{\frown}{ET}$，赤緯 $\delta = \overset{\frown}{TS}$

黄道座標：黄経 $\lambda = \overset{\frown}{EL}$，黄緯 $\beta = \overset{\frown}{LS}$

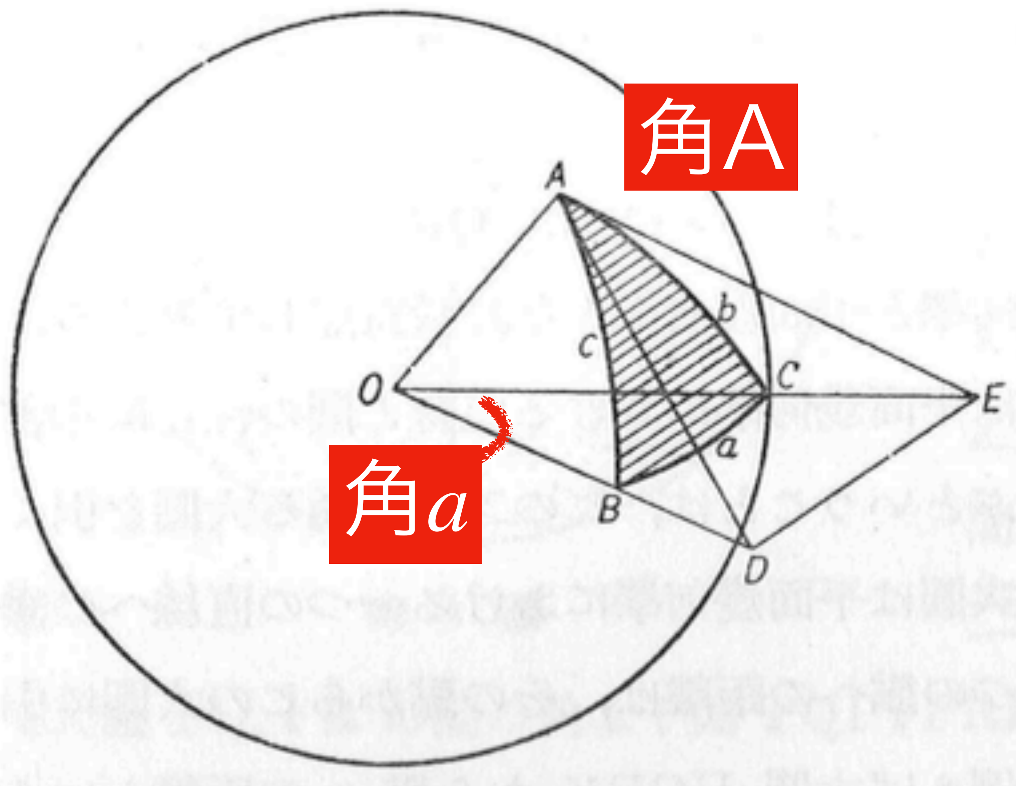
極黄道座標：黄経 $\lambda' = \overset{\frown}{EK}$，黄緯 $\beta' = \overset{\frown}{KS}$

$$\boxed{\tan \lambda' \cos \epsilon = \tan \alpha}$$

表 11: 黄道座標 1 度と，赤道座標 1 度の対応.

限	赤経 α(中国度)	赤経 $\bar{\alpha}$(現行度)	黄経 $\bar{\lambda}$(現行度)	黄経 λ'(中国度)	$\lambda' - \alpha$
初	0	0.00	0.00	0.00	0.00
2	5	4.93	5.39	5.47	0.47
3	10	9.86	10.77	10.93	0.93
4	15	14.78	16.11	16.35	1.35
5	20	19.71	21.42	21.73	1.73
6	25	24.64	26.66	27.05	2.05
7	30	29.57	31.84	32.31	2.31
8	35	34.50	36.95	37.49	2.49
9	40	39.43	41.99	42.60	2.60
10	45	44.35	46.94	47.63	2.63
11	50	49.28	51.82	52.58	2.58
12	55	54.21	56.63	57.46	2.46
13	60	59.14	61.37	62.26	2.26
14	65	64.07	66.05	67.01	2.01
15	70	68.99	70.67	71.70	1.70
16	75	73.92	75.25	76.35	1.35
17	80	78.85	79.79	80.96	0.96
18	85	83.78	84.31	85.54	0.54
19	90	88.71	88.82	90.11	0.11
	91.3125	90.00	90.00	91.31	0.00

§ 4.　球面三角法の基本公式

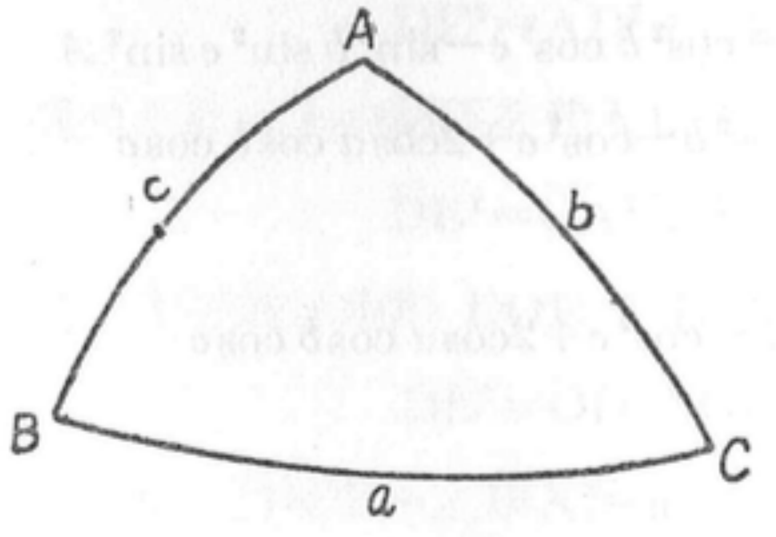


第 2 圖

(i) 餘弦公式　ABC を球面三角形とし，邊 BC, CA, AB をそれぞれ a, b, cとする．AD は大圓ABのA點における接線，同じく AE は A 點における大圓 AC への接線とする．從つて OA は AD, AE に垂直である．AD は大圓 AB の平面内にあるから，OB を延長すれば，接線 AD と D で交わる．

球面角 BAC(簡單に ∠A と記す)＝∠DAE

余弦公式，正弦公式



第 3 圖

$$\left.\begin{aligned}\sin a\sin B&=\sin b\sin A\\ \sin a\cos B&=\sin c\cos b-\cos c\sin b\cos A\\ \cos a&=\cos c\cos b+\sin c\sin b\cos A\end{aligned}\right\}\quad(4\cdot6)$$

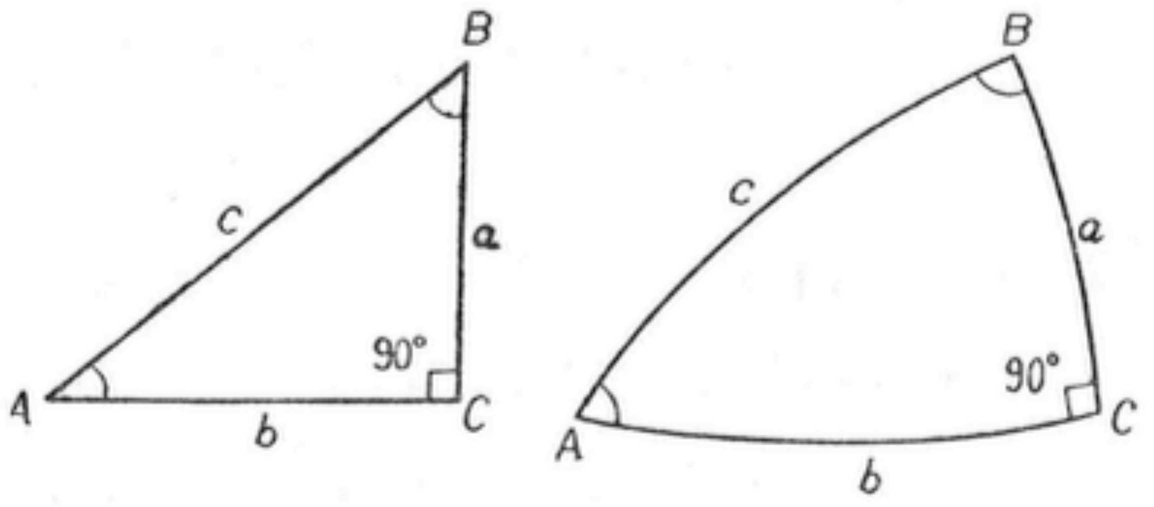
$$\left.\begin{aligned}\sin b\sin C&=\sin c\sin B\\ \sin b\cos C&=\sin a\cos c-\cos a\sin c\cos B\\ \cos b&=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin c\sin A&=\sin a\sin C\\ \sin c\cos A&=\sin b\cos a-\cos b\sin a\cos C\\ \cos c&=\cos b\cos a+\sin b\sin a\cos C\end{aligned}\right\}$$

誘導公式　$\cos a\cos C=\sin a\cot b-\sin C\cot B$　(D)

球面直角三角形

以上六組の直角三角形に關する公式は球面三角形を解く場合に極めて重要なものである．今記憶に便なるように上述十箇の球面直角三角形に關する公式を平面直角三角形の公式と比較して見よう．但し $\angle C=90°$ とする．(第 5 圖)

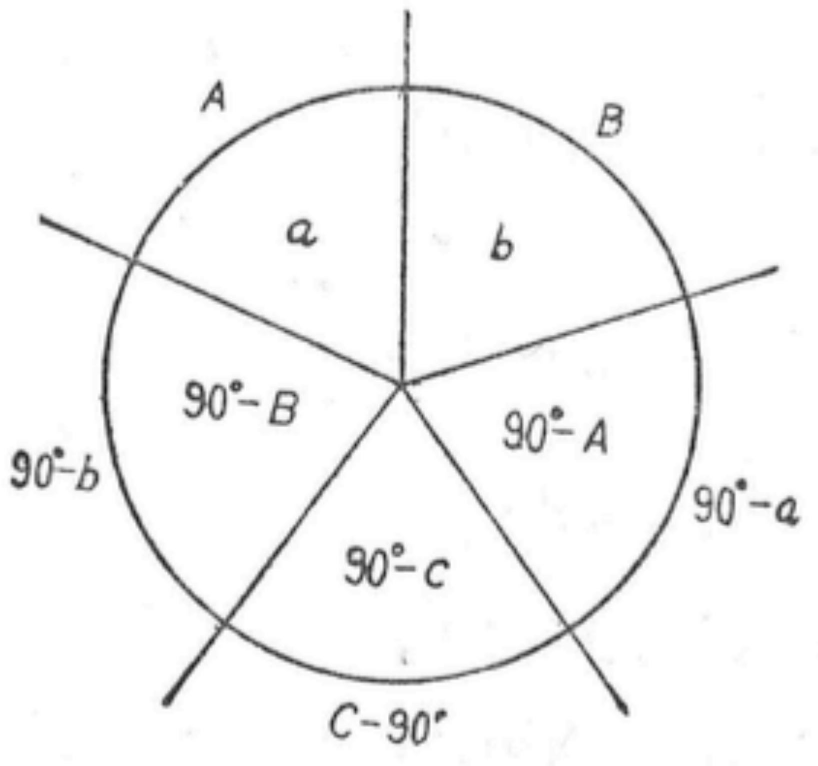


第 5 圖

平面直角三角形	球面直角三角形
$\sin A=\frac{a}{c}$, $\sin B=\frac{b}{c}$	$\sin A=\frac{\sin a}{\sin c}$　$\sin B=\frac{\sin b}{\sin c}$
$\cos A=\frac{b}{c}$ · $\cos B=\frac{a}{c}$	$\cos A=\frac{\mathrm{tg}\, b}{\mathrm{tg}\, c}$　$\cos B=\frac{\mathrm{tg}\, a}{\mathrm{tg}\, c}$
$\mathrm{tg}\, A=\frac{a}{b}$　$\mathrm{tg}\, B=\frac{b}{a}$	$\mathrm{tg}\, A=\frac{\mathrm{tg}\, a}{\sin b}$　$\mathrm{tg}\, B=\frac{\mathrm{tg}\, b}{\sin a}$
$\sin A=\cos B$, $\sin B=\cos A$	$\sin A=\frac{\cos B}{\cos b}$　$\sin B=\frac{\cos A}{\cos a}$
$c^2=a^2+b^2$	$\cos c=\cos a\cos b$
$1=\cot A\cot B$	$\cos c=\cot A\cot B$

これを記憶するためにナピアの法則がある．

先ず圓の内側を第 6 圖に示すように a, b, $90°-A$,　$90°-c$, $90°-B$ の五部分



第 6 圖

第 7 圖

天測の座標系変換：会円術

北宋時代，沈括（しんかつ）（1031-1095）は，『夢渓筆談（ぼうけいひつだん）』（1088）にて，弧の長さに対する「会円術（かいえんじゅつ）」を提示した．円の直径を d，矢 CD の長さを c，弦 AB の長さを a とする [図7(左)] と，弧 ACB の長さ s は

$$\text{会円術} \quad s = \frac{2c^2}{d} + a \tag{26}$$

とする近似式である．図を半分にしたときの関係は，半弧（半背）を ℓ，半弦を p として

$$\boxed{\text{会円術} \quad \ell = \frac{c^2}{d} + p} \tag{27}$$

となる．

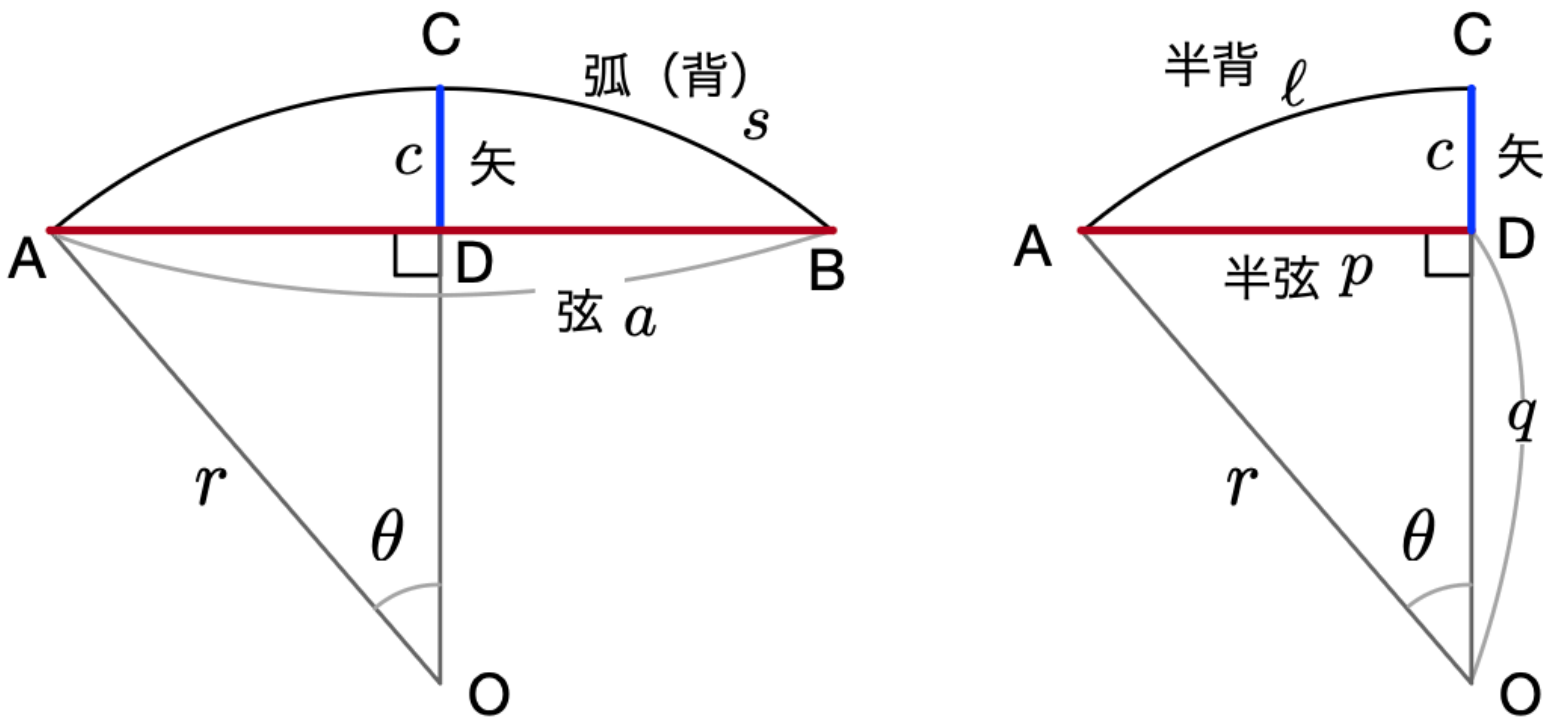
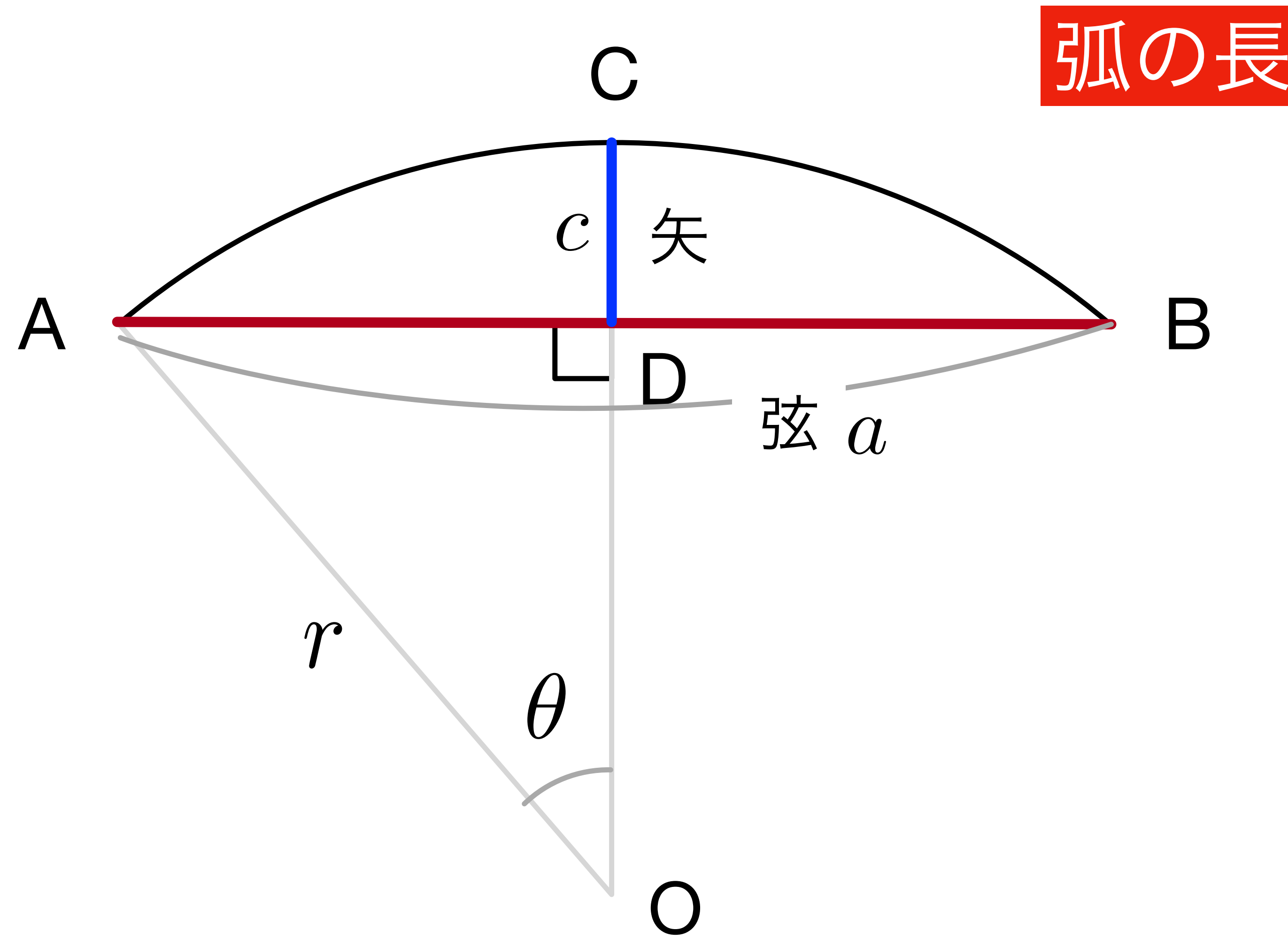
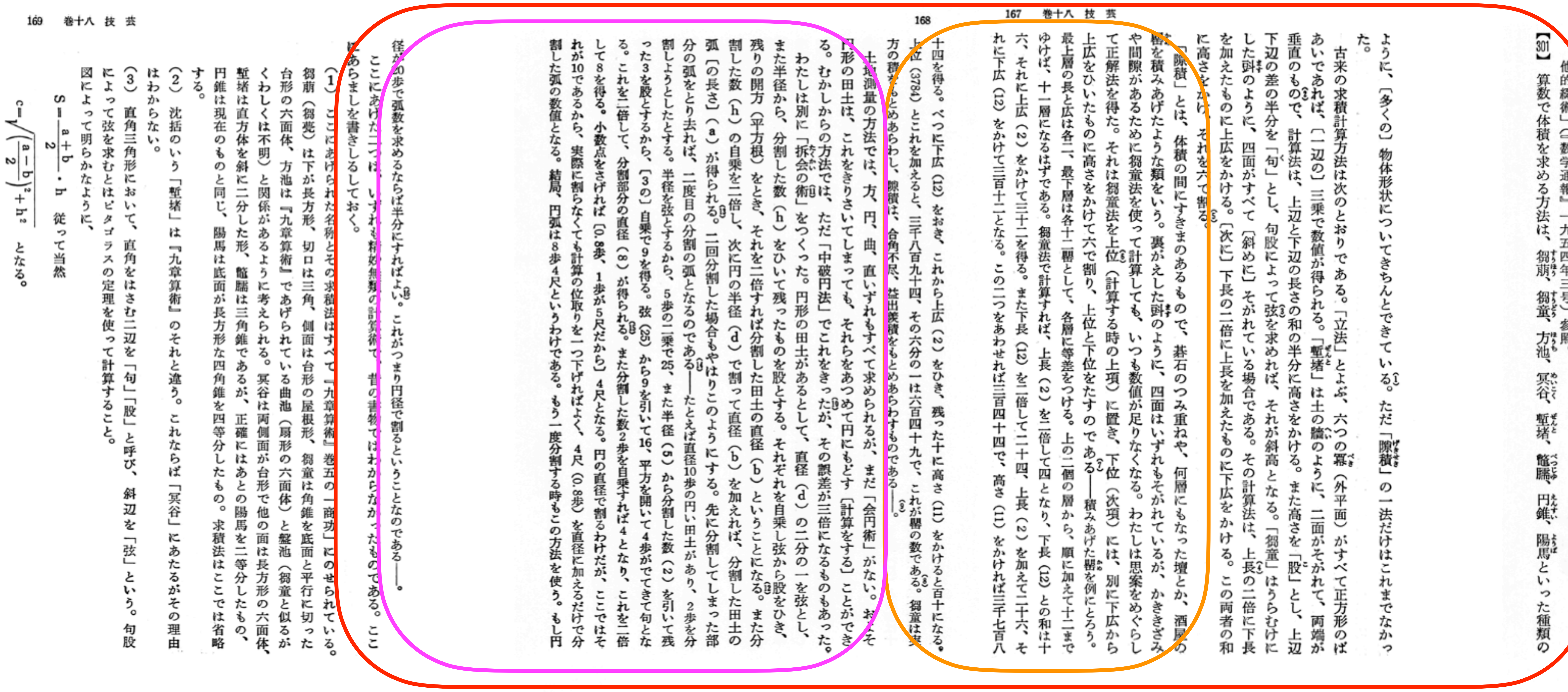


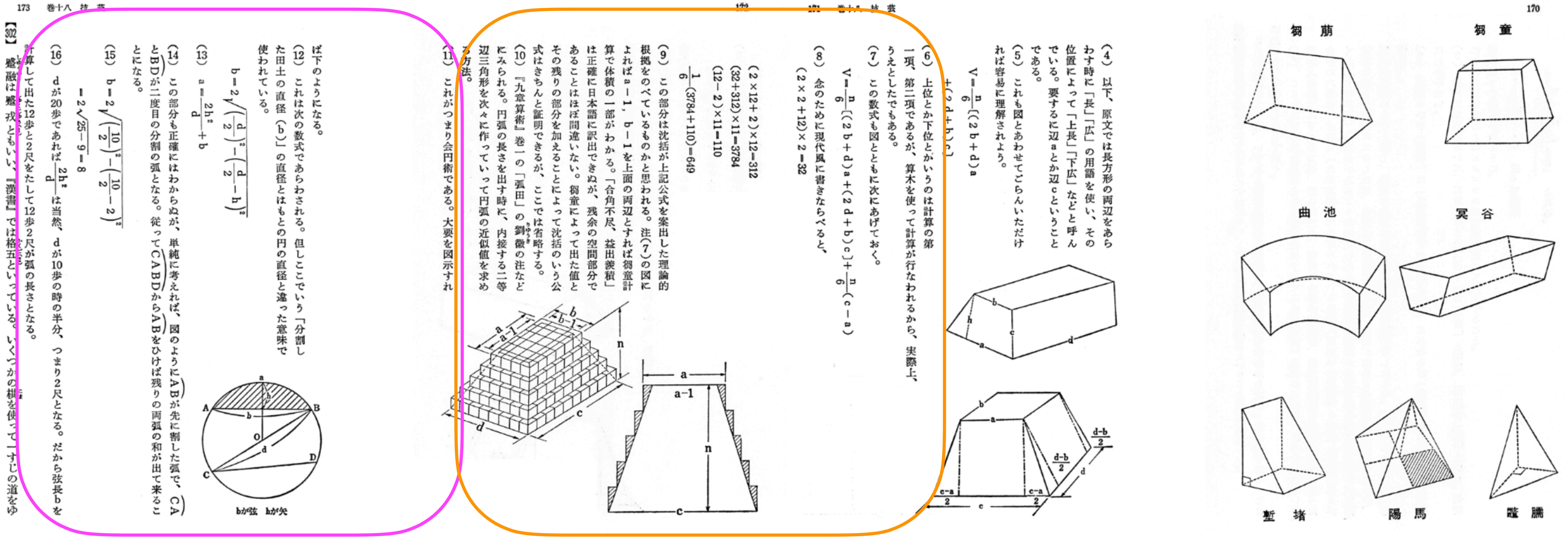
図 7: （左）沈括『夢渓筆談』の会円術での変数定義図．（右）半弦・半背としたときの変数定義図．

しんかつ
沈括(1031-1095)
『夢渓筆談』(1088)
ぼうけいひつだん

弧の長さは？



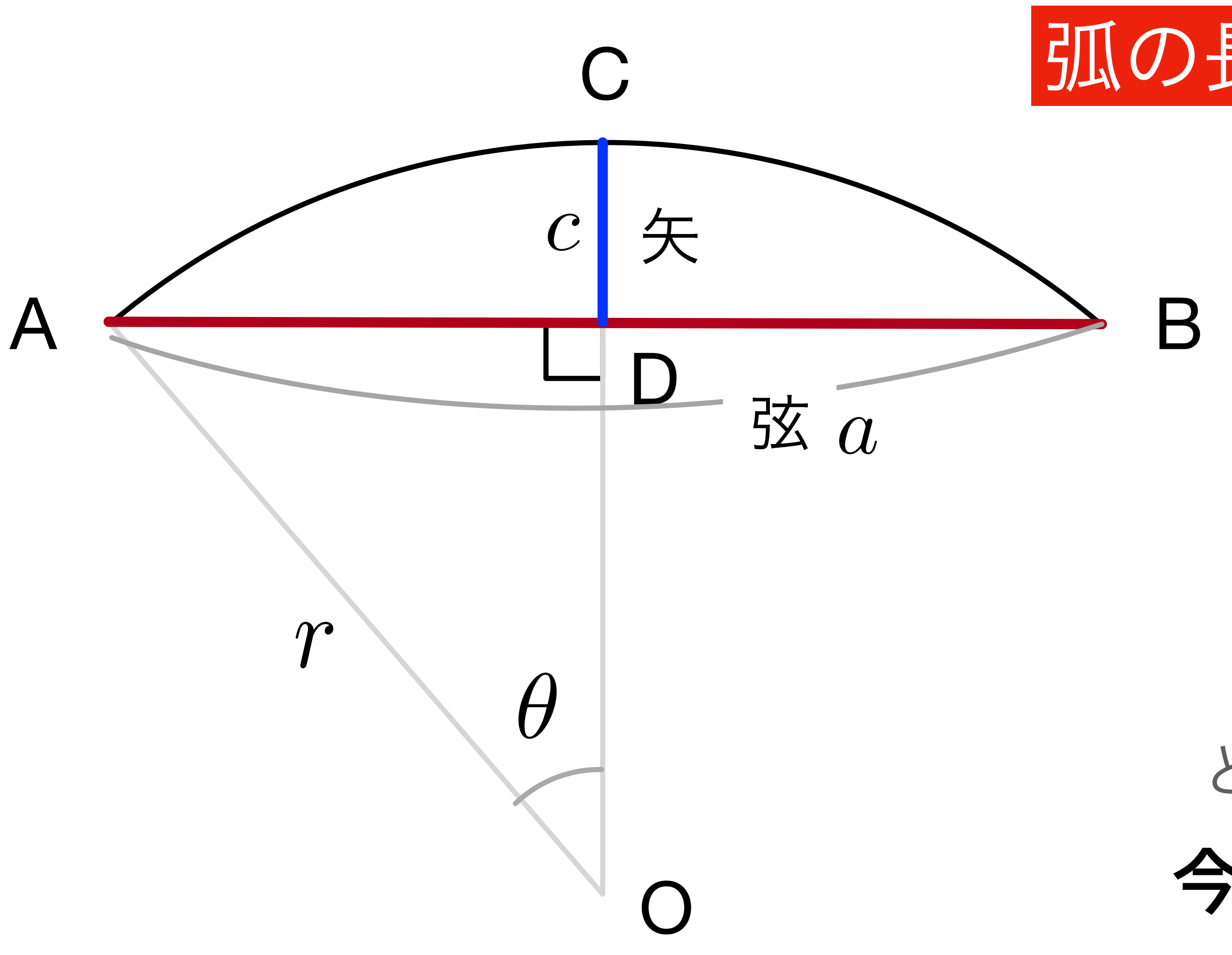




「隙積数」
げきせきじゅつ
「垜積術」
だせきじゅつ

「会円術」
かいえんじゅつ

しんかつ
沈括(1031-1095)
『夢渓筆談』(1088)
ぼうけいひつだん



弧の長さは？

「会円術」
かいえんじゅつ

$$\text{会円術}\quad s=\frac{2c^2}{d}+a$$

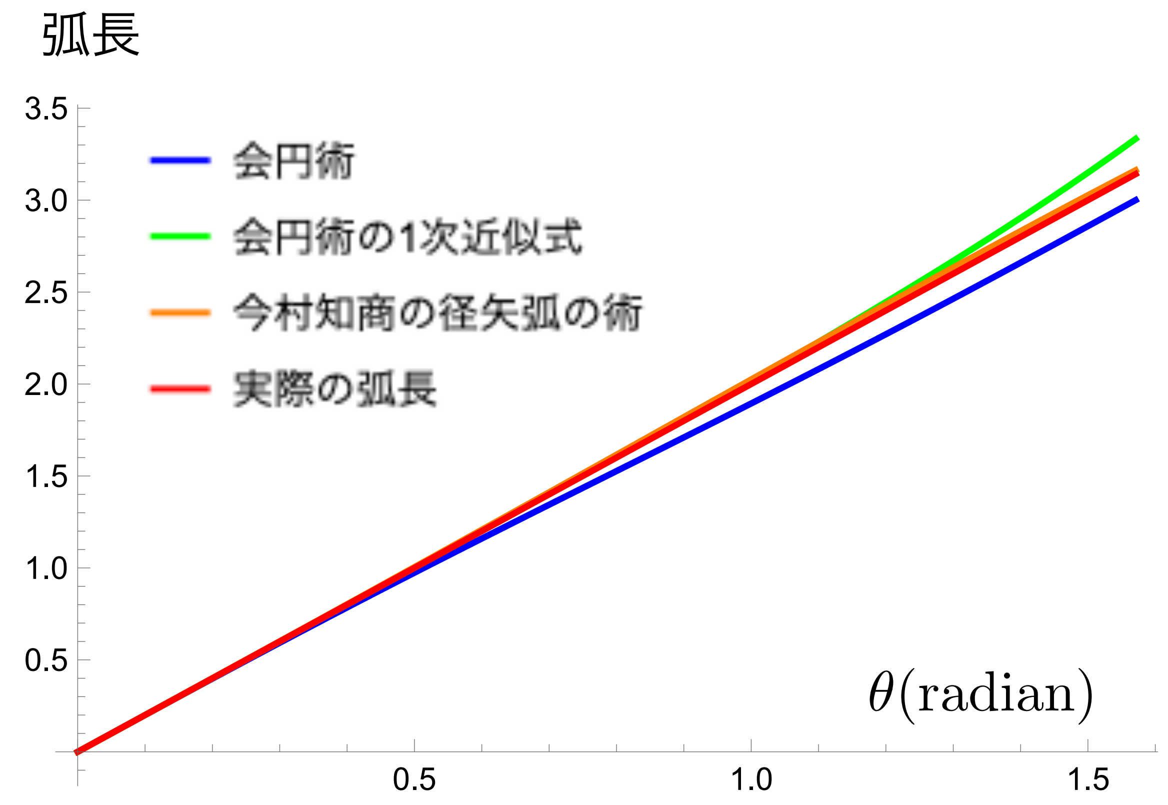
？

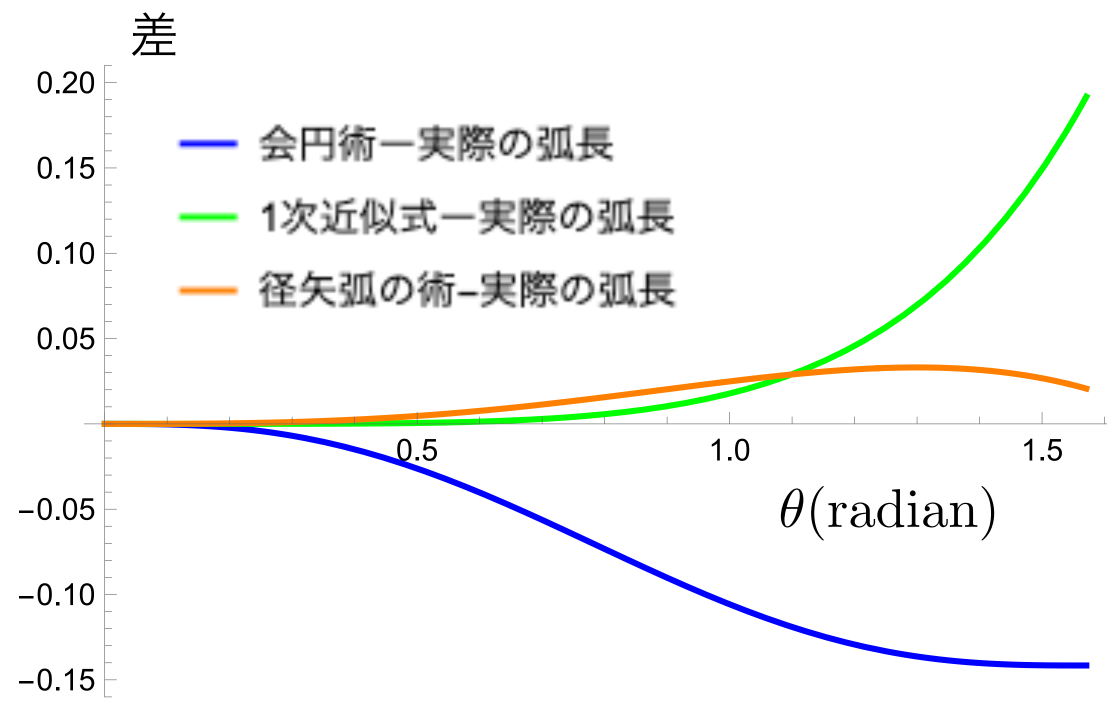
線形近似では導出できない

ともあき じゅがいろく
今村知商『竪亥録』(1639)

径矢弧の術

$$s^2=4cd+2c^2$$





この式の有効性を見るために，実際の長さと，逆三角関数を用いた近似式とを比較してみる．半径 r は，b, c を用いて式 (31) で表されるので，弧の長さ s は，

$$s=2r\theta=2r\sin^{-1}\frac{a/2}{r} \tag{35}$$

これを $r\gg a$ として近似すると

$$\begin{aligned} s &= 2r\theta\simeq 2r\left(\frac{a}{2r}+\frac{1}{6}\left(\frac{a}{2r}\right)^3\right) \\ &= a+\frac{a^3}{24r^2}\simeq a+\frac{8c^2}{3a} \end{aligned} \tag{36}$$

黄鼎　『天文大成管窺輯要』（1652）全80巻，授時暦の数理をまとめる

関が写本した15条のうち，天文総論をのぞく14条は，原文が明末の周述学 (?-1583?) による文章（小林博行2014）

関孝和　『関訂書』（1686）

関孝和『授時発明』（1680）

表 13: 『関訂書』に写本された『天文大成管窺輯要』の箇所とその内容．*印は『授時発明』で解読されているもの．■は，日＋咎

巻之三の内	歳差	（地球の自転軸の首振り運動による）春分点の移動
	論中■差（ちゅうき）	各地で測定した正午の影の長さ
	論黄赤差*	黄道と赤道のずれ（黄赤交角）によって生じる太陽の運行のズレや補正
	論黄赤内外差*	（地球の自転軸が公転面に対して傾いていることで生じる）季節ごとの昼夜の長さや太陽の出没位置の変化
	論白与黄赤道差*	白道・赤道・黄道の対応，日月食や天体の位置を正確に予測するための幾何学
巻之四の内	天文総論之内	
巻之七の内	日月交食差	日食や月食の「計算上の予測と実際の観測とのズレ（食の時刻や規模の誤差）」
	論日度	太陽の天球面上の位置（角度）
巻之八の内	論日躔盈縮差（にってんえいしゅく）	（地球の公転軌道が楕円であるために生じる）太陽の運動の速度変化
巻之十の内	論月度	月の天球面上の位置（角度）
	論月離遅疾差	月の天球面上の動き（月離）の速度変化
	定朔加減差	天体の平均的な動き（平均朔日＝経朔）から，太陽や月の運動の速度変化を計算し，実際の新月（定朔）の日時を求めるための補正値（加減）
巻之十二	五星常変差	5 つの惑星（水星・金星・火星・木星・土星）が，規則正しい動き（常）からズレる現象やその計算（変差）
	論五星経度	5 つの惑星（水星・金星・火星・木星・土星）の位置（黄経）
	論五星緯度	5 つの惑星（水星・金星・火星・木星・土星）の位置（黄緯）

関孝和『関訂書』（1686）

観天比崇天但加三乗限分以求合於度法耳。庚
午法同崇天、其黄赤差則減半度矣。已前四術是不過
以斜求斜之法。惟郭守敬授時用弧矢接勾股之法以
求之法、以黄道半弧背立天元一以求得黄道矢自
之以周天径除之得黄道半背弦差、去減黄道半弧背
余為黄道半弧弦。又用黄道矢去減周天半径余(余
の一字天理本に欠く)為黄赤道小弦、以黄赤道大股
乗之用黄赤道大弦除之得黄赤(道の字を入れる)小
股。又以黄赤道小股自之以黄道半弧弦自之相併平
方開(之を入れる)得赤道小弦。又以黄道半弧弦乗
半径所得以赤道小弦除之為赤道大股、就為赤道
半弧弦。又以黄(赤の字を入れる)道小股乗(黄の字を
入れる)赤道大弦所得用赤道小弦除之得赤道横大
勾、以減半径余為赤道横弧矢、自之如円径而一
得赤道半背弦差、去加赤道半弧弦為赤道半弧背。用
(内と訂正)減黄道度余得黄赤道差二度三十分八十五
秒。稍減於庚午。是術循弧宛転実与天道胳合、最
為微妙。可謂冠絶古今矣。

論黄赤内外差

赤道横絡天腹黄道出入内外、冬至出赤道南夏至入
赤道北、其出入各二十四度、其差有漸、是謂黄赤内外
差。
辺岡崇玄立相減相乗之法以求之、計二至加時已来
至其日昏後夜半日数及分、冬至後為息、夏至後為消。
如一象限已下為初、已上反減二至限余為末。令
自相乗進二位以消息法千六百六十七半除為分、副

関孝和『授時発明』
(1680)

黄赤道の差

『関孝和全集』（大阪教育図書，1974）平山諦，下平和夫，広瀬秀雄 編

関孝和『授時発明（天文大成三条図解）』（1680）

「天文大成三条図解」

凡　例

一　読み下しの底本として国立天文台附属図書館蔵の「天文大成三条図解」(請求番号 449-S)を使った。

一　天理大学附属天理図書館蔵「天文大成三条図解」(請求番号 440-13-34、以下天理大学本と略称する)と原文が異なる箇所はその都度注に記した。

一　底本の一部には一・二点がつけられているので、その場合はそれに従って読み下した。また、読み下し文の作成には、訓点がつけられている東北大学附属図書館岡本文庫蔵の「授時発明」(請求番号岡本写 7)も併せて参考にした。ただし、引用されている『天文大成管窺輯要』巻三の本文の読みは、本文の訂正も含めて原則として「関訂書」に従ったが、一部読みを改めたところがある。岡本本と宮内庁図書寮本の「天文大成三条図解」(請求番号 557-46)との校異も注に記した。

天文大成三条図解[1]

黄赤道の差を論ず[2]

郭守敬授時に弧矢接鈎股の法を用いて、以てこれを求めるの法、黄道の半弧背を以いて天元の一を立て、以て黄道の矢を求め得る[3]。

仮如、黄道の半弧背四十五度を以てこれを求む。天元の一を立て黄道の矢と為す。これを自して天径[4]に因る黄道半弧背弦の差と為す。左に寄す。黄道半弧背を列し、天径一百二十一度太[5]を以てこれに乗じて得る内、左に寄せたるを減じて、余りこれを自して、天径冪に因る[6]黄道半弧弦冪と為す。再び寄す。天径を列し、内、黄道の矢を減じて、余りを黄道の矢を以てこれに乗じ、黄道半弧弦冪と為す。天径冪を以てこれに相乗して得る数と再び寄せたるとを相消して開方の式[7]を得る。以て三乗の方にこれを開き、黄道の矢一十七度三十二分五十三秒を得る。これを自して周天の径を以てこれを除し、黄道半背弦の差を得る。

黄道の矢を列し、これを自乗して得る数を実と為す。天径を以てこれを除し、黄道の半弧背弦の差二度四十六分[8]を得る。

黄道の半弧背を去減し、余りを黄道の半弧弦と為す。

黄道の半弧背弦の差を以て黄道の半弧背を減じて、余り四十二度五十四分を黄道の半弧弦と為す。

又た、黄道の矢を用いて周天の半径を去減して黄赤道の小弦と為す。

黄道の矢を以て天の半径六十零度八十七分半を減じ、余り四十三度五十四分半を黄赤道の小弦と為す。

黄赤道の大股を以てこれに乗じ、黄赤道の大弦を用いてこれを除して黄赤道の小股を得る。

黄赤道の小弦を列し、黄赤道の大股五十六度零六分半(二至出入する赤道の内外二十三度九十分を以て半弧背と為す。術に依りて黄赤道の大弧矢四度八十一分を求め得て、これを以て天の半径を減ずるの余りなり)を以てこれに相乗して得る数を実と為す。黄赤道の大弦六十零度八十七分半を以てこれを除し、黄赤道の小股四十零度零九分を得る。

又た、黄赤道の小股を以てこれを自し、黄道の半弧弦を以てこれを自し、相併せて平方にこれを開き赤道の小弦を得る。

黄赤道の小股を列し、これを自乗して得る数と、黄道の半弧弦これを自乗して得る数とを二位相併せて共に得る数を実と為す。平方にこれを開き、赤道の小弦五十八度四十五分三十秒を得る。

又た、黄道の半弧弦を以て半径に乗じて得るところ、赤道の小弦を以てこれを除して、赤道の大股と為す。就いて赤道の半弧弦と為す。

黄道の半弧弦を列し、天の半径を以てこれに相乗して得る数を実と為す。赤道の小弦を以てこれを除し、赤道の大股四十四度三十零分四十三秒を得る。就いて赤道の半弧弦と為す。

又た、黄赤道の小股を以て黄赤道の大弦に乗じて得るところ、赤道の小弦を用いてこれを除して、赤道の横の大鈎を得る。

黄赤道の小股を列し、黄赤道の大弦を以てこれに相乗して得る数を実と為す。赤道の小弦を以てこれを除し、赤道の横の大鈎四十一度七十五分を得る。

以て半径を減じて、余りを赤道の横の弧矢と為す。

赤道の横の大鈎を以て天の半径を減じ、余り一十九度一十二分半を赤道の横の弧矢と為す。

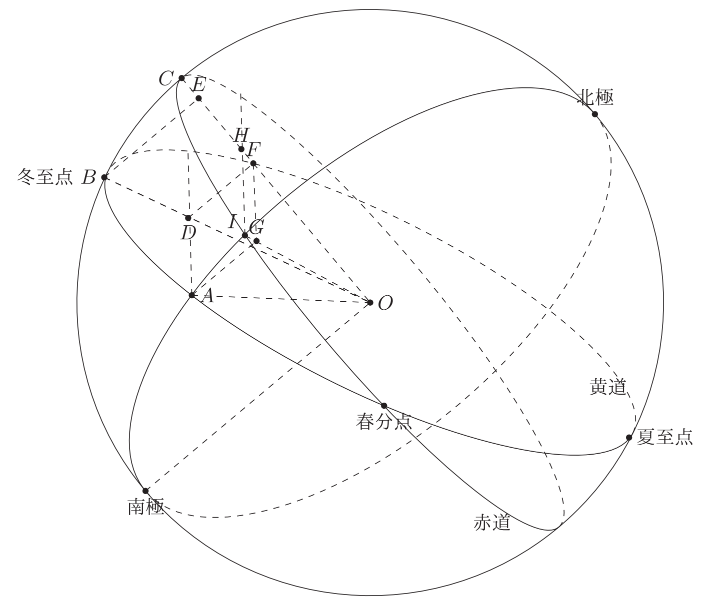
これを自して円径[9]の如く而も一にして、赤道の半背弦の差を得る。

赤道の横の弧矢を列し、これを自乗して得る数を実と為す。天径の如く而も一にして、赤道の半弧背弦の差三度零零四十二秒を得る。

赤道の半弧弦に去加して赤道の半弧背と為す(去は当に以て作るべし[10])。

赤道の半弧背弦の差を以て赤道の半弧弦を加入して、赤道の半弧背四十七度三十零分[11]八十五秒を得る(余はこれに倣へ)。

図に云く(朱を以て経を見、墨を以て緯を見る[12])



$\overset{\frown}{BA}$＝黄道半弧背：黄径(今日の極黄径，黄道の北極ではなく赤道の北極をもとに冬至点を起点にしている)，DB＝黄道矢(原図では黄矢)，DA＝黄道半弧背弦(原図では黄半弦)，CE＝黄赤道大弧矢点 B，D から線分 OC に降ろした垂線の足をそれぞれ F，E とする．$\overset{\frown}{BC}$＝二至出入内外(黄道傾斜角)，BO＝黄赤道大弦，DO＝黄赤道小弦，EO＝黄赤道大股，FO＝黄赤道小股，CH＝赤道矢，$\overset{\frown}{CI}$＝赤道半弧背，点 A から線分 IO に降ろした垂線の足を G とする，GO＝赤道小弦(原図では赤小弦)，IH＝赤道半弧背弦(原図では赤半弦)＝赤道大股，HO＝赤道大鈎

『関孝和全集　3』（岩波，2023）上野健爾，小川　束，小林龍彦，佐藤賢一 編（サンプルファイルとして入手可能）

関孝和『授時発明（天文大成三条図解）』（1680） [黄赤道の差] 1

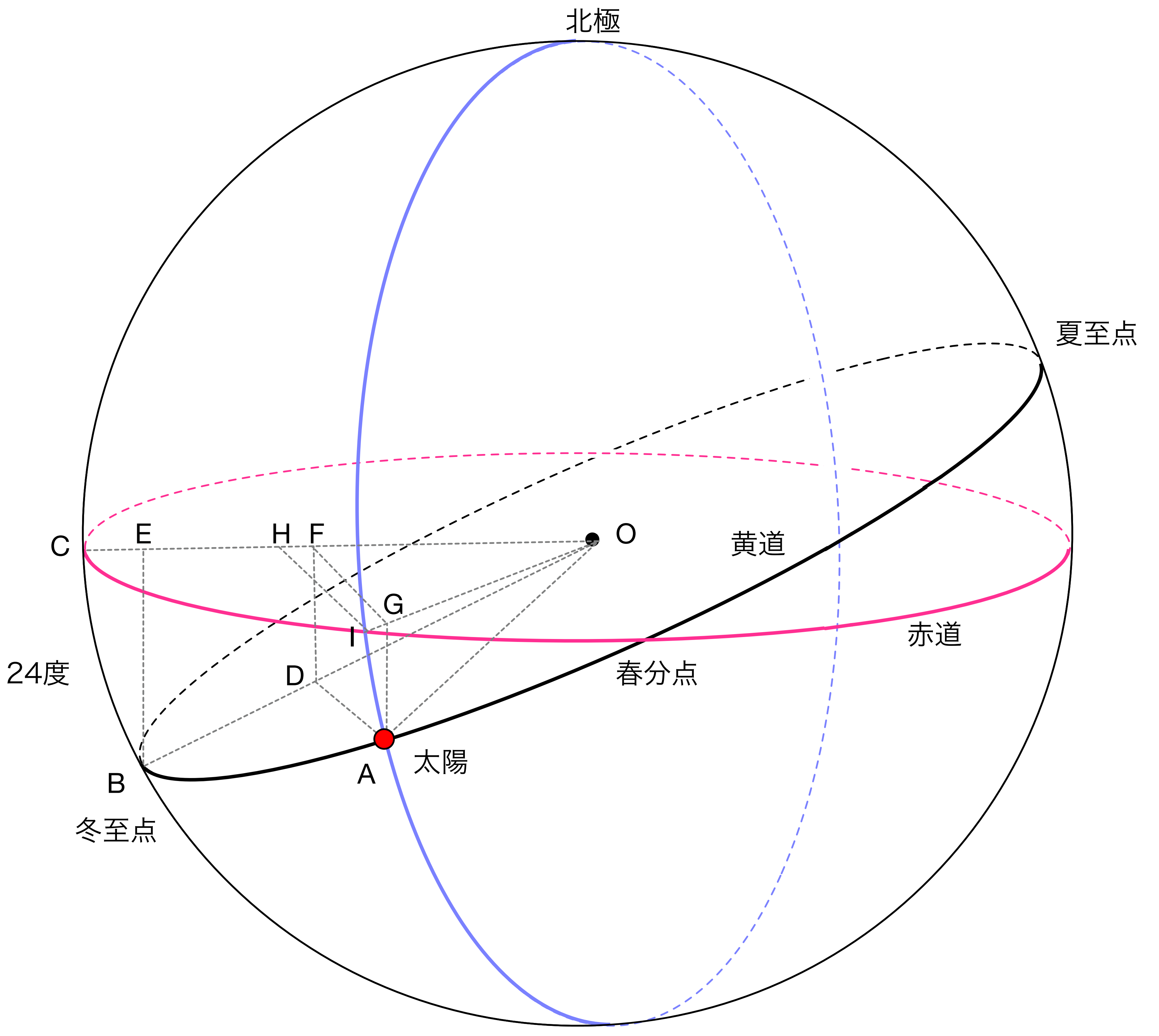
弧BAを観測したとき，弧CIの長さとの差はいくつか？

表 14: 関孝和全集『授時発明』の「黄赤道の差」の計算．書き下し文は岩波本 [22] のもの．

『授時発明』書き下し文	解読	備考
仮如（たとへば)、黄道の半弧背四十五度を以てこれを求む。	黄道の弧の長さ（半弧背 BA）を $\ell = 45^{\#}$ とする．	太陽が黄道の位置 A（弧 BA の長さ ℓ）にある．これに対応する赤道の弧の長さ CI を求めるのが目的．天径（直径）を $d = 121.75$，円周を $365.25^{\#}$（円周率 3）としている．
天元の一を立て黄道の矢と為す。	求めたい「黄道の矢 BD」を x と置く．	(天元術による変数立て)
これを自して天径に因る黄道半弧背弦の差と為す。	x を 2 乗して，直径 d で割った値は，黄道半弧背弦 (AD，長さ p_1) との差 $\ell - p_1$ と等しくなる．$\frac{x^2}{d} = \ell - p_1$	会円術の式 (26) $\ell - p = \dfrac{x^2}{d}$ を適用．
左に寄す。	$x^2 = d(\ell - p_1)$ とする．	
黄道半弧背を列し、天径一百二十一度太を以てこれに乗じて得る内、左に寄せたるを減じて、余りこれを自して、天径冪に因る黄道半弧弦冪と為す。	ℓ に対して，$d = 121.75$ を乗じ，先の x^2 を減じ，その差を 2 乗して d^2 で割る式の値は，p_1^2 となる．$(d\ell - x^2)^2/d^2 = p_1^2$	太は 3/4.
再び寄す。	$(d\ell - x^2)^2 = d^2 p_1^2$（式 1）	
天径を列し、内、黄道の矢を減じて、余りを黄道の矢を以てこれに乗じ、黄道半弧弦冪と為す。	d に対して x との差をとり，x をかけた値は，p_1^2 と等しくなる．$p_1^2 = x(d - x)$	円の幾何学的性質（方べきの定理）を適用．半弦の 2 乗は「矢」と「直径から矢を引いた残り」の積に等しい．
天径冪を以てこれに相乗して得る数と再び寄せたるとを相消して開方の式を得る。	d^2 を両辺にかけて $d^2 p_1^2 = d^2 x(d - x)$ とする．先に得た（式 1）と等しいと置く（相消す）．$(d\ell - x^2)^2 = d^2 x(d - x)$ これより，解くべき式が得られる．	以下の 4 次方程式が導かれる．$x^4 + (d^2 - 2d\ell)x^2 - d^3 x + (d\ell)^2 = 0$
以て三乗の方にこれを開き、黄道の矢一十七度三十二分五十三秒を得る。	この 4 次方程式を解くと，実数解として $x = 17.3253^{\#}$ を得る．黄道の矢 BD が求められた．	「三乗の方」とは 4 次方程式（最高次が x^4）のこと．授時暦は 100 進法（1 度= 100 分、1 分= 100 秒）.

BD=x として求める

BDを矢，ADが半弦，弧AB既知より会円術を用いる



関孝和『授時発明（天文大成三条図解）』（1680） [黄赤道の差] 2

黄道の矢を列し、これを自乗して得る数を実と為す。天径を以てこれを除し、黄道の半弧背弦の差二度四十六分を得る。	x^2 を d で割り，$\ell - p_1$ を得る．$\ell - p_1 = 2.46$ を得る．	
黄道の半弧背弦の差を以て黄道の半弧背を減じて、余り四十二度五十四分を黄道の半弧弦と為す。	$\ell = \ell$ の両辺から $\ell - p_1 = 2.46$ を減じることで，$p_1 = 42.54$ を得る．	$p_1 = \ell - 2.46 = 42.54$ を得る．
黄道の矢を以て天の半径六十零度八十七分半を減じ、余り四十三度五十四分半を黄赤道の小弦と為す。	半径 $r = d/2 = 60.875$ より，矢 x を引き，余りを黄赤道の小弦 (DO，長さ q_1) が得られる $q_1 = r - x = 43.545$．	ここで黄道面上での話が終わる．
黄赤道の小弦を列し、黄赤道の大股五十六度零六分半（二至出入する赤道の内外二十三度九十分を以て半弧背と為す。術に依りて黄赤道の大弧矢四度八十一分を求め得て、これを以て天の半径を減ずるの余りなり）を以てこれに相乗して得る数を実と為す。黄赤道の大弦六十零度八十七分半を以てこれを除し、黄赤道の小股四十零度零九分を得る。	（夏至または冬至のとき，黄道と赤道の間は $23.90^{\#}$ の弧の長さ BC がある．先の術をここでも用いて，黄赤道の大弧矢 (CE，長さ x_0) を $x_0 = 4.81^{\#}$ と求め、天の半径 r から x_0 を引いた余りで得られる $r - x_0 = 56.065^{\#}$ を黄赤道の大股 (EO，長さ q_0) とする．）黄赤道の小弦 (DO)q_1 と，黄赤道の大股 q_0 を乗じたものを黄赤道の半径 $r = 60.875$ で割ることで，黄赤道の小股 (FO，長さ ω) $\omega = 40.09$ を得る．	夏至または冬至のとき，原点と黄道面と赤道面で囲まれる円弧の話になる．三角形 OEB と三角形 OFD の相似を用いて，黄赤道の小股 (FO，長さ ω) を求める．
黄赤道の小股を列し、これを自乗して得る数と、黄道の半弧弦これを自乗して得る数とを二位相併せて共に得る数を実と為す。平方にこれを開き、赤道の小弦五十八度四十五分三十秒を得る。	黄赤道の小股 (FO，ω) の 2 乗と黄道の半弧弦 (AD) を 2 乗して加えた数を実とする．平方にこれを開き、赤道の小弦 (GO) を得る．赤道の小弦 (GO) $= \sqrt{(\text{小股 (FO)})^2 + (\text{黄道半弧弦 (AD)})^2} = \sqrt{40.09^2 + 42.54^2} \approx 58.455^{\#}$	三角形 OFG に三平方の定理を適用．AD=GF としているが，本来は，赤道面と黄道面の傾きを考慮すべき．
黄道の半弧弦を列し、天の半径を以てこれに相乗して得る数を実と為す。赤道の小弦を以てこれを除し、赤道の大股四十四度三十零分四十三秒を得る。就いて赤道の半弧弦と為す。	$\dfrac{\text{黄道の半弧弦 (GF)} \times \text{天の半径 (OI)}}{\text{赤道の小弦 (OG)}}$ を計算することによって，赤道の半弧弦 (IH) を得る．$44.3043^{\#}$ となる．この弦 IH(長さ p_3) が求められたので，弧 IC (長さ a) が求められることになる．	三角形 OGF と三角形 OIH が相似なので，OG : GF = OI : IH .
黄赤道の小股を列し、黄赤道の大弦を以てこれに相乗して得る数を実と為す。赤道の小弦を以てこれを除し、赤道の横の大鈎四十一度七十五分を得る。	$\dfrac{\text{黄赤道の小股 OF}(40.09) \times \text{大弦 OI}(60.875)}{\text{赤道の小弦 OG}(58.455)}$ より，赤道の大鈎 OH を得る．41.75.	三角形 OGF と三角形 OIH が相似なので，OF : OG = OH : OI .

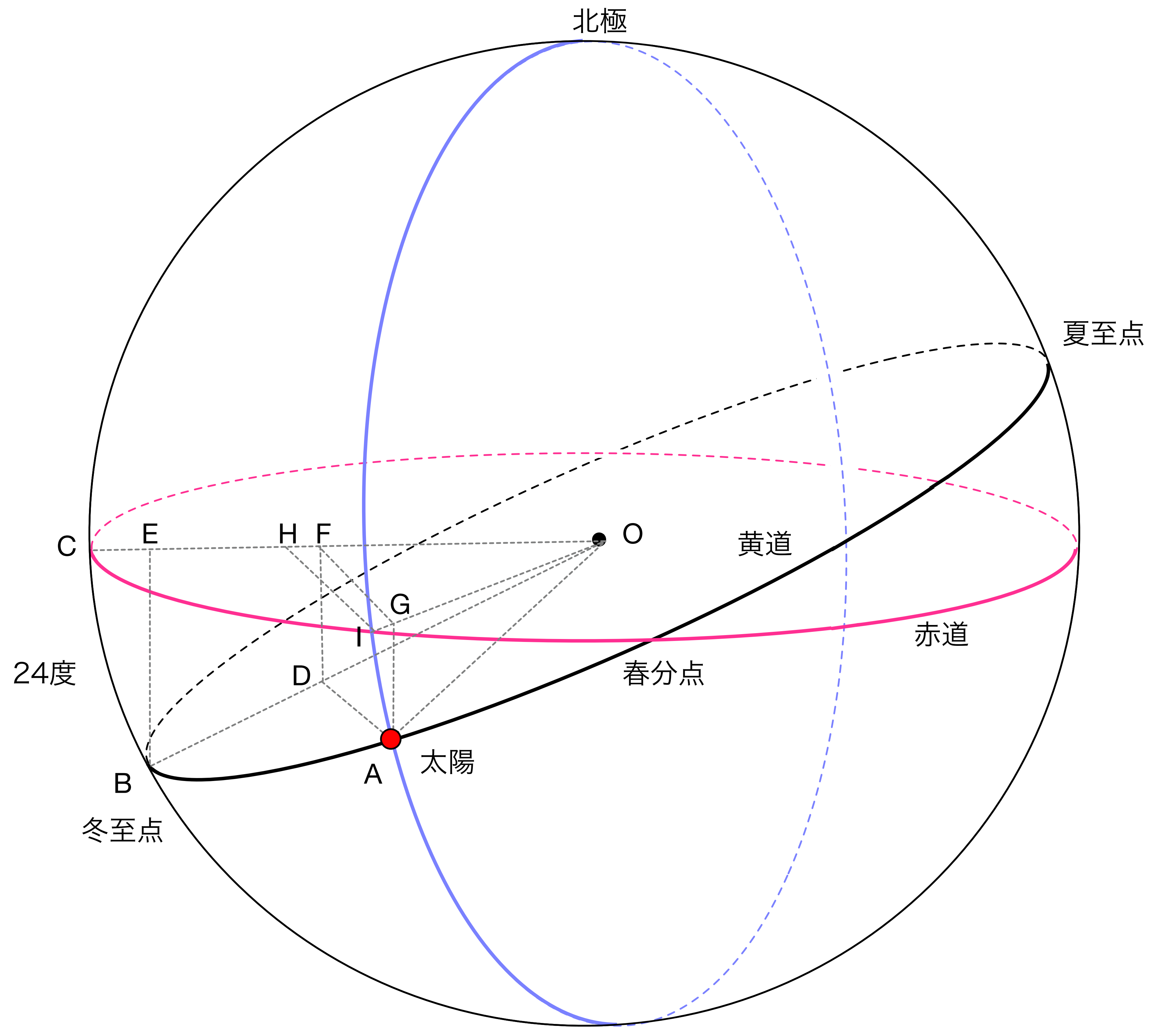
DBがわかったので，DOがわかる

同様にして，弧BC24度から，CEを求め，EOの長さがわかる

三角形OEBと三角形OFDは相似，FOがわかる．

DA=FGとして三角形OGFに三平方の定理を使ってOGを求める．

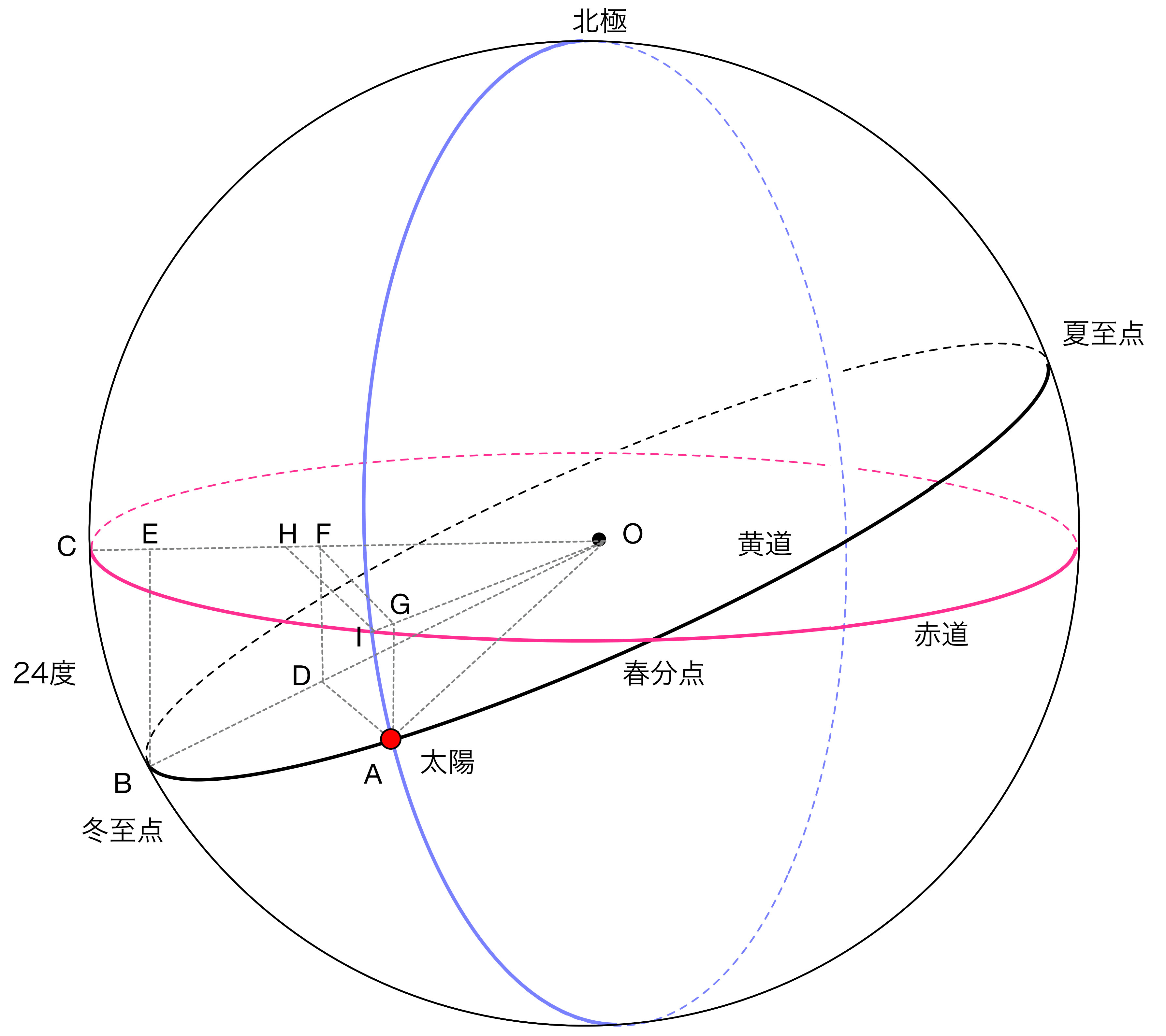
三角形OGFと三角形OIHは，相似，IHがわかる．OHもわかる



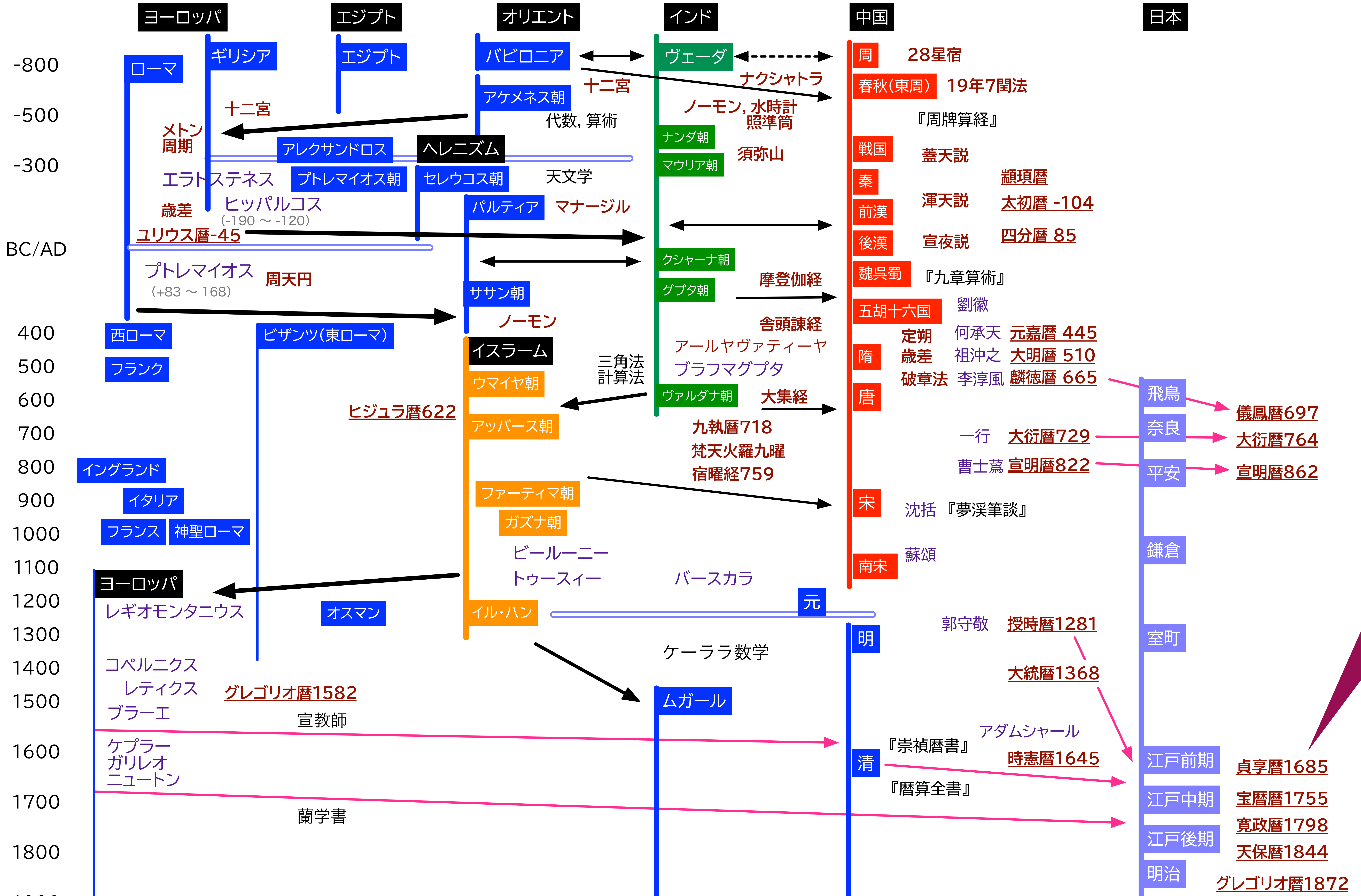
関孝和『授時発明（天文大成三条図解）』（1680） [黄赤道の差] 3

以て半径を減じて、余りを赤道の横の弧矢と為す。赤道の横の大鈎を以て天の半径を減じ、余り一十九度一十二分半を赤道の横の弧矢と為す。	赤道面での弧 OIC にて，弧矢 (CH) を求める． (半径)−(大鈎 OH)=(弧矢 CH)=19.125	赤道面の OIC にて，会円術を適用する準備．
これを自して円径の如く而も一にして、赤道の半背弦の差を得る。赤道の横の弧矢を列し、これを自乗して得る数を実と為す。天径の如く而も一にして、赤道の半弧背弦の差三度零零四十二秒を得る。	CH^2/直径 $= 3.0042^{\#}$ となる．これは，弧 IC（長さ a） − 弦 IH （長さ p_3）に等しい．	会円術を適用．$a - p_3 = \mathrm{CH}^2/d$
赤道の半弧弦に去加して赤道の半弧背と為す（去は当に以て作るべし）。赤道の半弧背弦の差を以て赤道の半弧弦を加入して、赤道の半弧背四十七度三十零分八十五秒を得る（余はこれに倣へ)。図に云く（朱を以て経を見、墨を以て緯を見る）	得られた値 $3.0042^{\#}$ に，弦 IH （長さ $p_3 = 44.3043^{\#}$）を加えることで，弧 CI（長さ a）が求められる．$47.3085^{\#}$	これにより、「黄道上で冬至点から 45 度の位置にある太陽は、赤道上では $47.3085^{\#}$ の位置にあたる」
赤道の半弧背を列し、内、黄道の半弧背を減じて、余り二度三十零分八十五秒を黄赤道の極差と為す。	黄道との差は，$2.3085^{\#}$ となる．	
稍 (やや) 庚午より減ず。この術、循弧宛転、実まこと に天道と■■(ふんごう)合す。(■■は，月+勿+口) 最も微妙為（た）り。古今に冠絶すと謂ふべし。		「(赤道の値が）わずかに庚午の値から減じられる。この算法は、曲線を巧みに扱い、実に天体の運行（天道）とぴったり合致している。最も精妙（極めて精密で奥深い）である。古今に比類なき（天下無双の）優れた術であると言うべきだろう。」(Google AI 訳)

CHとIHがわかるので，会円術を用いてCIがわかる．



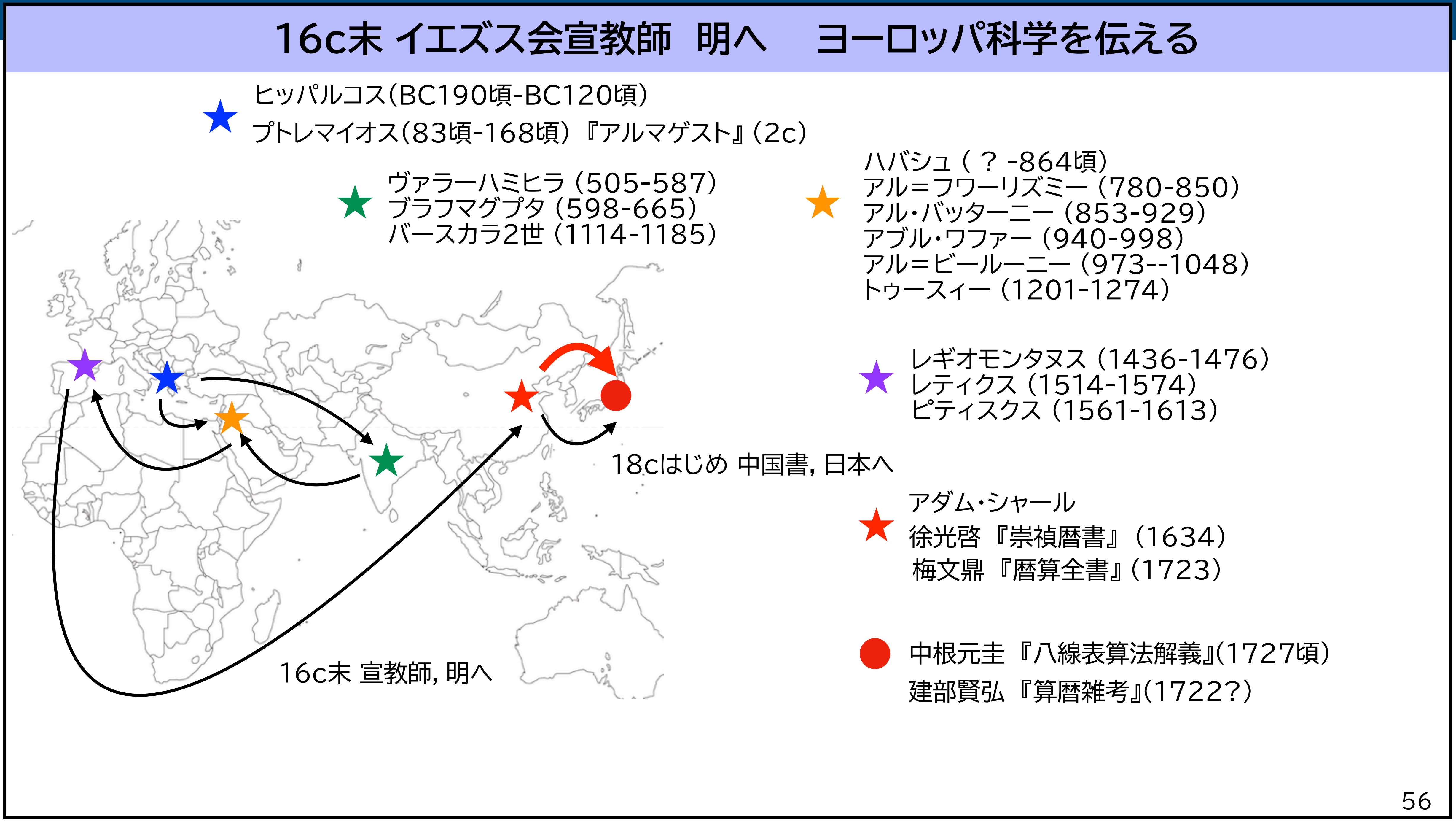
天文学史でみた文化の流れ



江戸時代は
3つに分けられる

前期　中国由来の科学
中期　中国経由の西洋科学
後期　蘭学書の解読

太陰太陽暦の数学：招差法と会円術



まとめ

今回は，前回の「三角関数の伝播」の調査で浮上した『天文学史と数学史のクロスオーバー』の問題に「着手した」報告である．日本に確実に影響を与えた天文暦学に注目したが，まだまだ途上である．今回は補間公式と座標変換に限定する形になったが，他にも惑星運動の表現や日食月食の予報など，大きなテーマが残されている．天文観測技術や器具，および観測データの誤差評価，測量術への影響なども取り上げなければならない問題である．

例えば，中国天文学史に与えた諸外国の影響（とくに，イスラムやインドからの数学・暦（占い）の影響），あるいはその逆ルートでの影響の調査，和算として天文暦学の独自の発展についても，いずれ取り組み，文化の伝搬の観点から科学史を捉え直したいと考えている．

関以降も暦学に関する和算研究は進んだ

建部賢弘 (1664-1739) 円理弧背術・正弦表の作成
中根元圭 (1662-1733) 授時暦研究
中根彦循 (1701-61)　開方盈朒
千葉歳胤 (1713-89)　蝕算活法
安島直円 (1732-92)　弧背術
間重富　(1756-1816) 弧矢索隠

本発表には，科研費 挑戦的研究（開拓）24K21170 『天文文化学の新展開：数理的手法の導入で文化史と科学論から自然観を捉える研究の加速』 のサポートを受けた．