第 31 回天文文化研究会（大阪工大，2026 年 6 月 21 日）報告資料 version 1

三角法の伝播：江戸前期に存在した 2 つの三角関数表

真貝寿明（大阪工業大学情報科学部）

概 要

三角法・三角関数は天文学や航海術と密接に関係しており，すでに古代ギリシャ時代に原型が発明されていた．和算に三角関数がはじめて登場するのは，中根元圭による『八線表算法解義』(1727 年頃) とされる．また，日本で初めて三角関数表を作成したのは建部賢弘の『算暦雑考』(1722 年頃) とされる．二人は同時期に活躍し，師弟関係でもあったが，両書は変数も導き方も全く異なっている．三角法の伝播という視点から，この点を調べた結果を報告する．

中根元圭の書に登場する三角関数（八線）の定義図は，中国書の『暦算全書』が元になっている．同図は，イスラムの数学者 Abū'l Wafā' (940–998) に遡ることができる．日本は，いわゆる数学史で語られる三角法発展の伝播経路の末端である．建部賢弘の着想は，授時暦研究を動機とし，黄道赤道変換の精度をあげるための「会円術」の改良が目的と考えられる．ルートの異なる数学文化が，時間的僅差で日本で邂逅したことになる．

1 Introduction & Summary

三角法が，幾何学の構成で重要な位置を占めるのは言うまでもない．天文学（暦学）や天測航海術での必要性から，三角法・球面三角法は古代ギリシャの頃に発明されている．プトレマイオスが『アルマゲスト』にて，ヒッパルコスやメネラウスの業績を踏まえて，三角関数表（角度と弦の表，詳しくは，§3.1）を著している．

三角法は「ギリシャで生まれ，インドで育ち，アラビアで発展した」[1] とも称される．どのような文献がギリシャからインドへ伝えられたかは，研究書を読む限り不明であるが，インドで作られた数表がヒッパルコスのものに類似しているものから始まっていた[1]ということは，すでに文化交流があったことを伺わせる．ギリシャで定義された「弦 (chord)」は，5 世紀のインドでは，その対応角度を半分にした「半弦 (Jyā)」として（誰か始祖かは不明である），計算方法が整えられていった．現在，我々が使う「正弦 (sin)」である．そして，計算の簡略化から,「余弦 (cos)」「正矢 $(1-\cos\theta)$」「余矢 $(1-\sin\theta)$」なども定義された．

古代ギリシャの科学知識は，ローマ帝国の崩壊とともに，イスラーム圏に引き継がれ，イスラームではインド科学と融合する形で科学が発展した．イスラーム圏では，ギリシャの「弦」をインドの「正弦」へ置き換え，さらに日時計の影の計算から「正接 (tan)」と「余接 (cot)」を定義した．また，各地域から祈りを捧げるメッカの方角を知る必要性から，球面三角法が発展した．現在使われる三角関数が 6 種揃ったのも，イスラームだった.（インドより早く，現在使われている三角関数が揃った.）

イスラーム科学は，中世ヨーロッパに伝えられて現代西洋科学の発展につながる．三角法は，航海術への応用のために，独立した 1 つの分野として確立してゆき，三角関数の計算を簡便にするために，対数を用いた計算法が早くから導入された．

日本で，三角法を紹介したのは中根元圭 (1662-1733) とされる．中根は中国暦算書『暦算全書』(1723) に訓点を付けて将軍吉宗に献上するとともに，中国書『崇禎暦書』(1631-1634) にある三角関数（八線）を『八線表算法解義』(1727 年頃) として紹介した．八線とは，三角関数 6 種に正矢と余矢を加えたものである（後述する図 2.1 と表 2.1 参照）．八線の数表が入手できたのは，1727 年であり，これが『数学史事典』[5] にも記載されている記録である[2].『崇禎暦書』は，アダム・シャールらイエズス会宣教師が編纂した西洋天文学書である．したがって，伝えられた三角法は，ヨーロッパ起源，ひいてはイスラーム経由のギリシャ・ローマ数学と考えられる．本稿では，この系譜を軸に，三角関数の定義図と，三角関数表の作成方法の 2 つを比較することで，数学文化の伝播を追う（§2, 3）.

その一方で，日本で初めて三角関数表を作成した文献として，建部賢弘 (1664-1739) の『算暦雑考』(1722 年頃）が挙げられる．建部は，弧の長さ（半背），矢，半弦の 3 つの量（後述する図 4.1）を角度の関数として[3]数表にした（§4）．独自の関数表で，その導出方法

[1] ヒッパルコスの数表そのものは失われているが，24 の角度についての数表を求めようとした，という点では類似している．

[2] 小曽根は，1650 年にオランダ特使が測量法伝授のために，アストロラーベや三角関数表を持ち込んだことを指摘している [2]．ユリアン・スケードルが幕臣北条氏長らに三角測量法を教え，実演させたようだが，その知識が理解され，定着したかどうかは定かではない．小曽根はその三角関数表がピティスクスの 1630 年版の『A Canon of triangles』であろう，と結論している [3, 4]．後述する八線表輸入稟議の顛末を考えると，和算家には伝わっていなかったものと考えられる．

[3] 当時まだ関数という概念はなかったが.

も独自である．その動機は江戸初期の改暦を目指した研究で，渋川春海や関孝和が取り組んだ授時暦研究であった．授時暦では，北宋時代の沈括（しんかつ）が導いた「会円（かいえん）術」（弦と矢から弧の長さを導く近似式）を用いて黄道・赤道の変換を行っていた．建部の表は，この近似の精度を格段にあげる式として考案されていたようである．

すなわち，数学文化の伝播プロセスとして,「中国発日本着」というルートと,「ギリシャ発インド・イスラム・ヨーロッパ・中国経由日本着」という 2 つのルートが存在した．そして，時間的僅差で江戸前期に両者が邂逅したことになる．

2　三角関数の定義図の由来

2.1　八線の定義図

中根元圭が『八線表算法解義』で紹介したのは,「正弦・余弦・正切・余切・正割・余割・正矢・余矢」の八線である．八線の定義を図 2.1 と表 2.1 で示す．

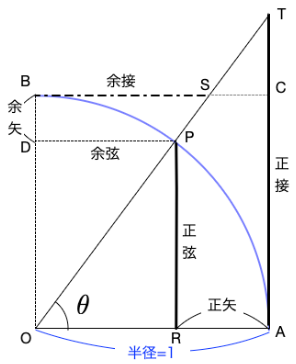


図 2.1: 三角関数の定義図．中根元圭の描いた図（本稿の図 2.2）を（角 θ が現代風に横軸からの角度となるように）描き直したもの．

表 2.1: 図 2.1 における八線の定義

正弦	せいげん	$\mathrm{PR} = \sin\theta$
余弦	よげん	$\mathrm{PD} = \cos\theta$
正接（正切）	せいせつ	$\mathrm{AT} = \tan\theta$
正割	せいかつ	$\mathrm{OT} = \sec\theta = 1/\cos\theta$
余割	よかつ	$\mathrm{OS} = \csc\theta = 1/\sin\theta$
余接（余切）	よせつ	$\mathrm{BS} = \cot\theta = 1/\tan\theta$
正矢	せいし	$\mathrm{AC} = 1 - \cos\theta$
余矢	よし	$\mathrm{BD} = 1 - \sin\theta$

図 2.1 に示すように，半径 1 の円を原点 O を中心に 90 度分だけ描き，角度 θ の方向に直線 OPST を取る．点 P はこの直線と円との交点である．$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ はそれぞれ PR，PD，AT となる．図の OT，BS，OS が，$\sec\theta, \cot\theta, \csc\theta$ になることは，次の式から確認できる．

$$\begin{aligned}
\mathrm{OT} &= \sqrt{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{AT}^2} = \sqrt{1 + \tan^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} && (1)\\
\mathrm{BS} &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} \\
&= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta} && (2)\\
\mathrm{OS} &= \sqrt{\mathrm{OB}^2 + \mathrm{BS}^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2\theta}} \\
&= \sqrt{\frac{1 + \tan^2\theta}{\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sin\theta} && (3)
\end{aligned}$$

図 2.1 は，現代数学で基本とされる 6 つの三角関数を表現したコンパクトな図である．実は，この図と酷似した図が,『数学史事典』[5] 三角法の項に，10 世紀イスラムのアブ・ワファー (Abū'l-Wafā', 940–998) による三角関数の定義図として紹介されている．本章の目的は，このリンクを確かめることである．

2.2　『崇禎暦書』と『暦算全書』

文献 [5, 6] などを参考に，和算における三角関数に関する代表的な文献を表 2.2 に示す．

建部賢弘と，彼の弟子である中根元圭は，将軍吉宗の改暦に対する意思に応えるため，中国からの暦算書の解読に関わっていた．その過程で『暦算全書』が 1726 年に輸入された．そして中根元圭は『暦算全書』の和訳を行い，建部賢弘が序文をつけて 1733 年に紅葉山文庫に献上された．その後に，中根は『八線表算法解義』に，図 2.1 を示している．これが，日本に三角関数を紹介した初めてのもの，とされる．

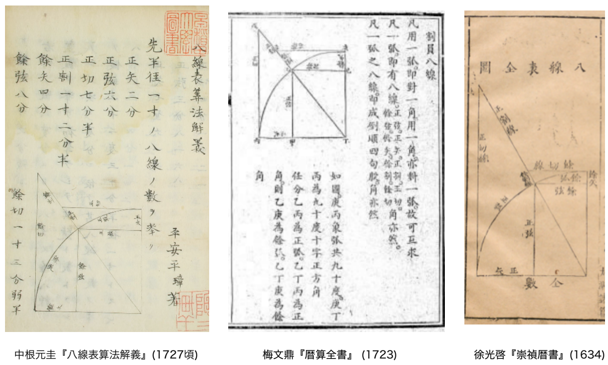


図 2.2: 三角関数の定義図（八線図）．出典：中根元圭は早稲田大学古典籍データベース.『暦算全書』は国書データベース.『崇禎暦書』は国立公文書館.

中根元圭の図は,『崇禎暦書』(1634) と『暦算全書』(1723) に掲載されているものと同じである（図 2.2）．輸入された順は『暦算全書』の方が先のようだが，ここでは二書を編纂された順に見てゆく．

表 2.2: 和算における三角関数表（数学史事典 [5]「数表：和算」の項,『和算史年表』[6] から作成）

中国，オランダ	日本	
梅文鼎『暦算全書』(1723) 西洋の天文数学書，八線表は含まず 徐光啓『崇禎暦書』(1634) 西洋の天文学書，八線表あり	⇒1726 年輸入される 中根元圭が訓点を付け，建部賢弘が序文を書き 1733 年に吉宗に献上 ⇒ 1727 年輸入される 割円八線表が渡来 中根元圭『八線表算法解義』(1727 頃)	
	戸板保佑『関算四伝書前伝』(-1780) 建部賢弘『算暦雑考』(年代不明)　日本初の三角関数表 松永良弼(よしすけ)『割円十分標』(1736) 安倍泰邦『（宝暦）暦法新書』(1760s)	1 度=60 分 半背/矢/半弦 1 度=100 分 1 度=60 分
『暦象考成』1 度=60 分，1 分=60 秒 八線表は含まず		
	石黒信由『八線表製法捷術』(1823)	
戴進賢『暦象考成続編』(1742) 八線表は含まず	⇒ 山路徳風，安倍泰栄『（寛政）暦法新書』(1838)	1 度=60 分
	渋川景佑，足立信行『新法暦書続編』(1844) 福田理軒『測量集成』(1855) 森七蔵正門『割円表』(1857)	1 度=60 分 1 度=100 分，10 分ごと正弦，正接
Pibo Steenstra, *Grondbeginsels der Meetkunst*, Amsterdam, 1803	⇒ 輸入され，蘭学者・吉雄俊蔵 (1787-1847) が所蔵した [42]. 『暦算全書』と同じ三角関数定義図がある.	

表 2.3: 『崇禎暦書』の構成

1. 採用：導入・歴史・公式記録	
奏疏(そうそ)・題疏(だいそ)	改暦の経緯と組織
新法暦引(れきいん)	全体のガイドブック
暦法西伝	西洋天文学の歴史
学暦小弁	疑念を解くための Q&A 集
新法表異	西洋式と中国式の計算結果の比較
2. 法原：数学・理論の基礎	
幾何要法	ユークリッド幾何学
大測(だいそく)	球面三角法
測量全義	測量術
割円八線表	三角関数表
籌算(ちゅうざん)	ネイピアの棒（骨）の使用法
3. 暦指(れきし)：天文学の理論的背景と天体ごとの運行理論	
測天約説	宇宙構造論と観測法の概説
日躔(にってん)暦指	太陽の運行理論
月離暦指	月の運行理論
交食暦指	日食・月食の理論
五緯暦指	五惑星の運行理論
恒星暦指	恒星の位置理論
4. 暦表：計算用の数値データ集	
日躔表	太陽の運行データ
月離表	月の運行データ
交食表	日食・月食のデータ
五緯表	五惑星の位置データ
距緯度表	恒星の位置データ
5. 暦器：観測機器と計算の実践	
渾天儀説(こんてんぎ)	観測機器の構造と使い方
遠鏡説	望遠鏡の構造と使い方
比例規解	計算定規の使い方
測食	日食・月食の計算・観測法
古今交食考	過去の日食・月食データの検証

『崇禎暦書』は中国，明代末に徐光啓 (1562–1633)・李子藻 (1565–1630) らがイエズス会宣教師アダム・シャール (Johann Adam Schall von Bell, 湯若望, 1591–1666) らの協力のもとに編纂した，西洋暦法の解説書である．徐光啓(じょこうけい)と李子藻(りしそう)は，中国に初めて宣教師として入ったマテオ・リッチ (Matteo Ricci, 利瑪竇, 1552–1610) の教え子である [7]．イエズス会の到着以前から中国では改暦の必要性が認識されていたが，リッチは西洋科学の優位性を示すことで布教を進める足掛かりを築くことにした.『崇禎暦書』は 1631-1634 年に明帝に献上されたが，明から清へ時代が変わっても改暦のプロジェクトは続けられ，1644 年に時憲暦に改暦されることになる．その後,『崇禎暦書』は『西洋新法暦書』と名称を変えている．

『崇禎暦書』は 135 巻からなる．基礎理論・計算されたデータ・観測機器の解説・測量法までをカバーした内容である（表 2.3）．宇宙の構造（太陽系の構造）を説明する箇所は，地球中心説に固執したチコ・ブラーエの体系が採られているが，相対的な位置関係は太陽中心説と同じなので暦作成の点では問題にはならない．

『崇禎暦書』から約 90 年後に，梅文鼎(ばいぶんてい) (1633-1721) が西洋天文学・数学と中国伝統の知識を折衷し，自身の著作をまとめて『暦算全書』とした.『暦算全書』は，暦学（天文学）と数学に関する 75 巻の書として知られているが，雍正元年 (1723 年) の初版には，三角関数表（八線表）は掲載されていなかった（「割円八線之表一巻　続出」となっている [8]）．雍正二年版には，二巻ものとして総目に記載されている．中根元圭と建部賢弘が 1726 年に手にした『暦算全書』には八線表がなかった．そこで，八線表の取り寄せが急務となり，

幕府の「御用本」として [10]，1727 年に改めて八線表が輸入されることになった.『船載書目』によれば，このときの八線表は，梅文鼎著のもの（上下巻），徐光啓奉・[redacted]玉函（ヨアンネス・テレンティウス, Ioannes Terrentius, 1576–1630，[redacted]は登＋おおざと）撰のもの，および八線表用法の巻の３つであったという [10]．中根と建部が献上した訓点付きの『暦算全書』には，八線表が付けられていて，その表は『崇禎暦書』のものと考えられている [11, 12].

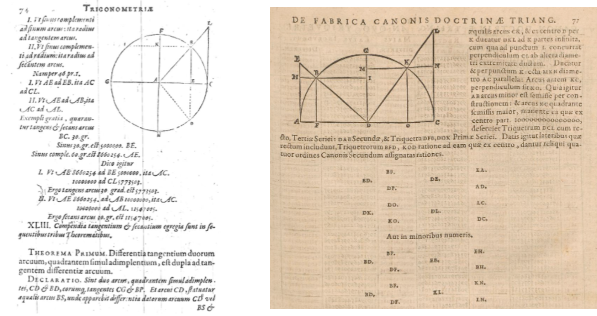
2.3 宣教師が手にした欧州の数学書

『崇禎暦書』には，詳細な三角関数表がある．正弦，正切，正割，余弦，余切，余割の６つについて，0 度から 45 度まで，1 分角ごとに最大 7 桁の値が記されている（クラヴィウスによって小数点の表記が導入されるまでは，表の精度を決める桁数を多くするためには，半径を大きくする必要があった.『崇禎暦書』では基準円の半径を 10 万としている）．ただし，6 桁までの使用を推奨している．45 度から 90 度までは同じ表で異なる箇所を参照すれば 6 種の値が得られることも承前とした表である．宣教師と徐光啓・李子藻らがこの表を作成した折には，参考とした表があったはずである．宣教師らが自ら計算した可能性もあるが，必ずしもそう信じる必要もないだろう[4]．ここでは参照元となる本を探ることにする．

16 世紀に誕生したキリスト教イエズス会は，中国への布教活動を 1582 年から 1773 年まで行った[5]．もともとイエズス会は，グレゴリオ暦への改暦に従事したクラヴィウス（Christoph Clavius, 1538–1612）が数学を教える教育体制を取るなど，基礎となるカリキュラムが存在していた [7]．リッチは布教の最初の数十年の間に，クラヴィウスの著作である『エウクレイデス原論 (Euclidis elementorum, 1574)』『アストロラビウム (Astrolabium, 1593)』『実用幾何 (Geometrica practica, 1604)』『天球論註解 (In sphaeram Ioannis de Sacro Bosco commentarius, 1570)』『実用算術要綱 (Epitome arithmeticae practicae, 1583)』などを徐光啓や李子藻と漢訳している [7].

このうち,『実用幾何』は測量・建築などへの応用を念頭にした数学書で，アストロラーベや四分儀などの利用法も含んでいる．簡易な正弦表が添えられている．『アストロラビウム』は，アストロラーベの構造・原理およびその使用法（時刻の測定、星の位置計算、測量など）を詳細に解説した書である．0 度から 45 度まで，2 分角ごとに 7 桁の正弦表（円の半径は 10^7）があり，45 度から 90 度までは同表を参照して値を探し出せるような構造になっている.『崇禎暦書』の表と構造は似ているが，正弦以外の値はないし，八線の定義図と同じ図はないようだ.

李迪 [13] は,『崇禎暦書』のうち『大測』は，ドイツのピティスクス (B. Pitiscus, 1561-1613) の『三角法 (Trigonometria)』(1595 年/1600 年/1612 年の各版あり) と，フランドルのステヴィン (S. Stevin, 1548-1620)『三角法』(1605）を編訳したもの，との説を紹介している.



B. ピティスカス『Trigonometriae』(1612)　レティクス『Opus Palatinum de triangulis』(1596)

図 2.3: 三角関数の定義図．出典：Pitiscus は，ExLibris のサイト．Rheticus は，スイス中近世の貴重書デジタルアーカイブ.

ピティスクスとその時期の三角法については，Miura[15] に詳しい．ピティスクスの書によって英語とフランス語に trigonometry （三角法）という言葉が生まれた．半径 10^5 あるいは 10^7 の円に対して計算された sin, tan, sec の三角関数表[6]が，10 秒角ごとに描かれている．三角関数を紹介するものとしては，当時の最新版だったといえる．ピティスクスの書にも八線の定義図（欧州では三角関数の定義図というべきか）が掲載されている（図 2.3）.

ピティスクスが書中に言及した [15] 数学者・天文学者は，コペルニクス，レギオモンタニウス，プトレマイオス，ルーメン (Adriaan van Roomen, 1561 - 1615)，ラムス (Petrus Ramus, 1515-1572)，ショーン (Lazarus Schonerus, 1543-1607)，レティクス，アピアヌス (Petrus Apianus, 1495 - 1552), ソクラテス，ユークリッドである（表 2.4 参照）.

[4]中国に古代より伝わる星座を，宣教師が西洋星図を用いて同定したが，その際には詳細な観測をしたわけではなかったことが竹迫 [9] によって確認されている.

[5]明朝 (1368-1644) の末期から清朝 (1644-1911) の最盛期まで，といえる

[6]なぜ，sin, tan, sec の 3 種か，という点については，Miura[15] の「天文学者が必要としたのは sin，測量士が必要としたのは tan，航海士が必要としたのが sec だった」というコメントが推察の根拠となろう.

表 2.4: ルネサンスのヨーロッパでの三角法の発展.

名前生没年	代表著書と数学的な貢献	三角関数表	文献
レギオモンタヌス 1436-1476 (Regiomontanus; Johannes Müller)	『すべての三角形について (De Triangulis Omnimodis)』(1464, 刊行は 1533 年) 三角法を天文学から独立した分野にした．正弦を用いた．正弦定理，球面余弦定理を示した.	半径 60000 の sin	[30]
コペルニクス 1473-1543 (Nicolaus Copernicus)	『天球の回転について (De revolutionibus orbium coelestium)』(1543) 球面三角法を詳述して，地動説を提案.	半径 10^5，10 分角ごとの正弦表	
レティクス 1514-1574 (Georg Joachim Rheticus)	『三角形理論のカノン（Canon doctrinætriangulorum）』(1551) 『三角法（Opus Palatinum de triangulis）』(1596) 三角関数を「円の弦」ではなく「直角三角形の辺の比」として初めて定義.	半径 10^4，10 秒角ごと. 6 種の三角関数	[29]
ヴィエト 1540-1603 (François Viète)	『数学的表（Canon mathematicus）』(1579) 和積の公式，n 倍角公式	半径 10^5，1 分角ごと. 6 種の三角関数	[31]
ピティスクス 1561-1613 (Bartholomäus Pitiscus)	『三角法（Trigonometria）』(1595) 『数学宝典 (Thesaurus Mathematicus)』(1613) Trigonometry という用語を創案．和積の公式（prosthaphaeresis, プロスタパエレシス）を用いて表計算．レティクスの遺稿を整理・修正し普及させた.	半径 10^{15}，10 秒角ごと，sin, tan, sec	[15, 30, 3]
ステヴィン 1548-1620 (Simon Stevin)	『三角法 (De Driehouckhandel)』（1605）十進小数の記法を考案し，三角関数の値を小数で扱う．測量への応用を詳述.	sin, tan, sec	

レティクスはコペルニクスの弟子である．10 秒角ごとの 6 つの三角関数表の作成に着手したが，半ばで亡くなった．その計算は，弟子のオットー (Valentinus Otho, 1545-1603) に引き継がれ,『三角法（Opus Palatinum de triangulis）』として 1596 年に出版された．700 ページ以上の数表である．定義図も同じものが見つかる（図 2.3）．レティクスは三角関数を直角三角形の辺の比として定義し，以下の 3 つのグループに分けている．

- 斜辺 (Hypotenusa) を 1 とした場合の垂直辺 (Perpendiculum) が sin , 底辺 (Basis) が cos
- 底辺を 1 とした場合の斜辺 (Hypotenusa) を sec, 垂直辺 (Perpendiculum) を tan
- 垂直辺を 1 とした場合の斜辺 (Hypotenusa) を csc，底辺 (Basis) を cot

なお，オットーの数表には誤りがあることをピティスクスが指摘し，ピティスクスは究極の表として『数学宝典』を作る．これが，ヨーロッパで 20 世紀はじめまで長く使われるものとなった．

レギオモンタニウス（ヨハン・ミュラー）は，プトレマイオスの『アルマゲスト』を再発見し，ギリシャ語原典から読み解き，三角法を用いてその内容を批判的に紹介した天文学者である．活字印刷がはじまった初期の頃，科学書を多く出版したことでも知られている．その批判がコペルニクスの発想につながった，とされる．

2.4 イスラームの三角法

この節は，文献 [16, 17, 18, 19, 20] を参考にした．

イスラームの科学が，ヨーロッパに伝えられたのは，主に 12 世紀とされる．

そのルートの 1 つは，キリスト教勢力がイベリア半島で進めた，後に国土回復運動（レコンキスタ，914–1492）と呼ばれる運動の結果である．とくに都市トレドが奪還されると，アラビア語の膨大な文献の翻訳が始められた．この他に，両文化の接点であったシチリア王国パレルモや，北アフリカとイタリアの貿易ルートも窓口となった．ユークリッド幾何学，プトレマイオスの天動説，ヒポクラテスやガレノスの医学，アリストテレスの哲学などのギリシア文化やヘレニズム文化が伝わり，12 世紀ルネサンスと呼ばれる欧州文化の変革が生じた．この時期に，数学の分野では，インド・アラビア数字，ゼロの概念，代数学，三角法も伝わった．どのルートで，どの書籍がヨーロッパに紹介されていったのかは未調査であるが，文化の伝播経路はイスラームへ辿れることは確かである．

イスラームの知識は，もともと，ギリシア・ローマ時代の学術文献が，5 世紀のローマ帝国の崩壊によって，アラビア地域にもたらされたものを含んでいる．サーサーン朝ペルシア (226-651) の時代では，知識収集のための翻訳活動が進められ，同時にインドからの科学も蓄積された．セーボーフト (Severus Sebokht, 575 頃-666) は，プトレマイオスの『簡便表』をまとめた

『星座について』をシリア語で著すとともに，インド天文学・数学の優位性に言及している．アッバース朝(750–1258) の 2 代目最高権力者（カリフ）のマンスール（在位 754-774）の時代には，書物のアラビア語への翻訳振興が進んだ．プトレマイオスの『アルマゲスト』(827 年頃のハッジャージュ訳が現存)，ユークリッドの『数論入門』などはこの頃に訳されている．フワーリズミー (780 頃-850 頃) が，インドで使われていた数字を導入したため，現在それが（インド・）アラビア数字と呼ばれていることはよく語られる話である．

三角法は，イスラームで大きく発展した．関係した数学者を表 2.5 に示す．

表 2.5: 三角法の発展に関係したイスラームの数学者．[16, 19] を参考に作成．大文字で始まる三角関数は半径を乗じた値 (Sin θ は $60 \sin\theta$ など)．

名前		主な貢献・特徴	三角関数表
アル＝フワーリズミー al-Khwārizmī	780-850	代数学の体系化，地理学的座標の改訂．アルゴリズムの語源．日時計，観象儀（アストロラーベ）なども作成したとされる．(フワーリズミーは「ホラズム出身の人」の呼称)	Sin θ (1° ごと，3 桁), $12 \cot\theta$ (1° ごと，少数 1 桁)
ハバシュ・ハーシブ Ḥabash al-Ḥāsib	? -864 頃	太陽・月の距離と大きさに関してアラビア語で初めて言及．弦ではなく正弦を使うインド数学を用いるが，インド数学にはない球面三角表や 60 進法を用いるプトレマイオス天文学を中心にする．	Sin θ (15′ ごと，4 桁)，Tan θ(30′ ごと，小数 2 桁), Cot θ, Vers θ, Csc θ (1° ごと，3 桁)
アル・バッターニー Al-Battānī	853–929	三角法・球面三角法の発展．私立天文台を設けて観測し，489 個の恒星表作成．	Sin θ (30′ ごと，3 桁)，$12 \cot\theta$ (1° ごと，小数 1 桁)
アブル・ワファー・ブーズジャーニー Abū al-Wafā' al-Būzjānī	940-998	三角関数の概念と計算法，円の分割，負数の研究，象限儀の考案．ギリシア科学文献の翻訳・注釈を行い，特にプトレマイオスの『アルマゲスト』の翻訳で名を残す． $R = 1$ で三角関数定義．正弦に対する加法定理.	Sin θ (1′ ごと，3 桁)
クーシュヤール・イブン・ラッバーン Kūshyār ibn Labbān	971–1029	『天体の距離と大きさに関する論文』	Sin θ (1′ ごと，3 桁)，Tan θ (1° ごと，3 桁)，$7 \cot\theta$, Vers θ (1° ごと，3 桁)
アル＝ビールーニー・アル＝フワーリズミー al-Bīrūnī al-Khwārizmī	973-1048	数学，測地学，天文学に多くの業績．歴史書『過去の足跡』，地理書『インド誌』，精密科学書『占星術要約』，百科全書『マスウード宝典』，地球の計測.『天文表』に正矢，60 進法の採用	Sin θ (10′ ごと，4 桁，表差 2 種)，Tan θ (1° ごと，5 桁，表差 2 種).
ナスィールッディーン・トゥースィー Nasīr al-Dīn al-Tūsī	1201-1274	神学者，哲学者，数学者，天文学者．非ユークリッド幾何学の基礎，三角法の独立．正弦定理．(トゥースィーは「トゥース生まれの人」の呼称)	Sin θ, Vers θ, Tan θ (1′ ごと，3 桁)
ウルグ・ベク Uluġ Beg	1394–1449	サマルカンドに天文台を設立，1,018 の恒星表作成.	Sin θ, Tan θ (1′ ごと，5 桁)

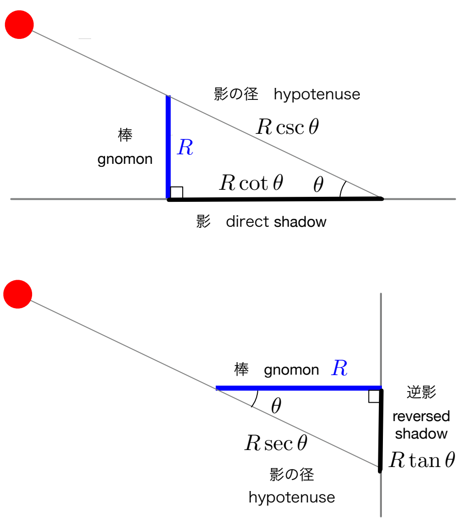
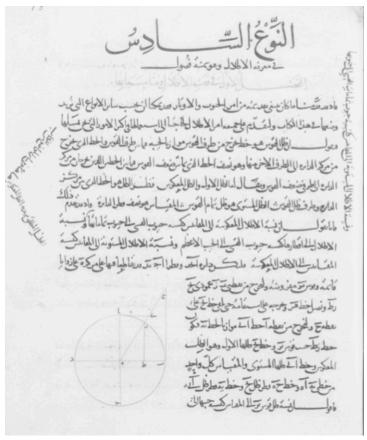


図 2.4: 日時計の影の長さと影の径.



アブ・ワファー『Kitab al Kamil』（10c）

図 2.5: 三角関数の定義図．出典：フランス国立図書館.

イスラームで三角法が発展した理由が２つある，とされている．１つは，日時計の影の長さを表すためである．図 2.4 に示すように，日時計には地面に棒 (gnomon) を立てるものと，壁に棒を水平に打ちつけるものの２種類ある．どちらも太陽を見込む角を θ とすれば，影の長さはそれぞれ $\cot\theta$，$\tan\theta$ になる．イスラームでは，棒の先端から影の先端までを「影の径」という．その長さはそれぞれ　$\csc\theta$，$\sec\theta$ になる．

もう一つは，１日に５回礼拝するときに，メッカにあるカアバ神殿の方角（Qibla，キブラ）を知る必要があったことである．自分の位置とメッカの位置の緯度差と経度差を既知として，どちらがキブラか．バッターニーは，座標値の差から方向を導く方法を提案した．ナイリージー (875-940) は，地球表面に球面三角法を適用した方向決めを提案している．球面三角法の上手い使い方である．

10 世紀に書かれたワファーの『アルマゲスト（完備の書）』は，プトレマイオスの『アルマゲスト』の注釈書や改訂版としての側面を持っているが，平面・球面三角法の改良（正弦定理の証明など）を含めた独自の進展を含んでいる，という．ワファーは三角関数６種を統合して説明した．それが，本章で追跡してきた三角関数の定義図である（図 2.5）．そして，三角関数を半径１の円に対応する辺の比で表すことを提案した（すぐには主流にならなかったようだが）．また，数表も用意した．プトレマイオスの弦の表が 60 進法で小数点以下２桁相当（10 進法換算で５桁相当）の精度だったのに対し、彼は小数点以下８桁（現代の 10 進法換算）に相当する精度で，sin と tan の表を 15 分角刻みで作成している．その際，独自の増分法や，半角の公式・倍角の公式を用いている．

＊＊

このようにして，八線の定義図が，その原型が作られたイスラーム科学まで辿れることができた．

3　日本に輸入された三角関数表

ここでは，三角関数表の変遷を軸にして，数学文化の伝播を見ることにする．すでに,『崇禎暦書』経由で日本に伝えられた三角法のルートは，イスラーム発ヨーロッパ・中国経由であることを見たが，三角関数表の作成方法についても類似していることを確認する．

現存する最も古い三角関数表は，プトレマイオス『アルマゲスト』の弦の表である．後ほど，インド数学についても検討するので，本章では，インドと『崇禎暦書』での三角関数表作成についても紹介する．

3.1　プトレマイオス『アルマゲスト』の弦の表

２世紀のギリシャ人天文学者プトレマイオスは,『メギステ・シンタクシス（最も偉大な数学的集成）』という書にて，数式と幾何学で説明する天文学を確立した．惑星の順行逆行運動を離心円と周転円を用いて説明する地球中心説は，その後中世ヨーロッパでコペルニクスが太陽中心説を唱えて以降も長く支持されることになる．この書はイスラームにて定冠詞「アル」が付されて『アルマゲスト』と呼ばれるようになった.『アルマゲスト』書 [21, 22] には，ヒッパルコスの業績が引用されている．ヒッパルコスは三角関数表（弦の表）も作成したと考えられているが，現存しておらず,『アルマゲスト』中の三角関数表が最も古いものとされる．

『アルマゲスト』の数表は，図 3.1 にあるような，角度 θ と弦 (chord) AB の関係を 60 進法にて表記したものである．現代表記にすれば，半径を R として,（弦を無次元量として），

$$R\,\mathrm{crd}\ \theta = 2R\sin(\theta/2) \tag{4}$$

となる．すぐにわかる値は

$$\begin{aligned} R\,\mathrm{crd}\ 60^\circ &= R & (5)\\ R\,\mathrm{crd}\ 90^\circ &= \sqrt{2}R & (6) \end{aligned}$$

である．

角度も弦も小数点以下は 60 進法で表記する．プトレマイオスは半径 R を 60 とした表としており，例えば,

$$\begin{aligned} R\,\mathrm{crd}\ 90^\circ &= \sqrt{2}R = 84.85281374 \\ &= 84 + \frac{51}{60} + \frac{10}{60^2} + \frac{8}{60^3} + \cdots \quad (7) \end{aligned}$$

となる場合，$84; 51, 10, 8$ などとして表記する．

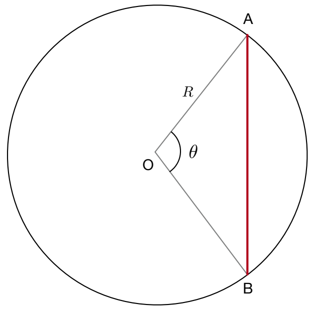


図 3.1: 角度 θ と弦 (chord) AB .

さて，弦の定義と三平方の定理から

$$R\,\mathrm{crd}\ (180^\circ - \theta) = \sqrt{(2R)^2 - (R\,\mathrm{crd}\ \theta)^2} \tag{8}$$

の補角の関係が導かれる．また，半角の公式

$$R\,\mathrm{crd}\,\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{(2R)^2 - 2R\sqrt{(2R)^2 - (R\,\mathrm{crd}\ \theta)^2}\right\}} \quad (9)$$

が導かれる．この関係は，ヒッパルコスも導いていたようだ．

crd 60° と crd 90°，そして上記の補角の関係と半角の公式が既知であれば，0° から 180° まで 24 の角度に対する弦を求めることができる（図 3.2）．

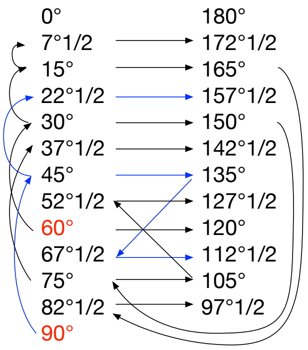


図 3.2: 60° と 90° の弦の値と，補角の関係と半角の公式が既知であれば，24 の角度の値での数表が作成できる．

プトレマイオスは，0.5° 刻みの弦の値を求めるため，36° と 54° の弦の値を幾何学的に求めている．現代数学での $\sin\theta$ で説明する [23] と次のようになる．

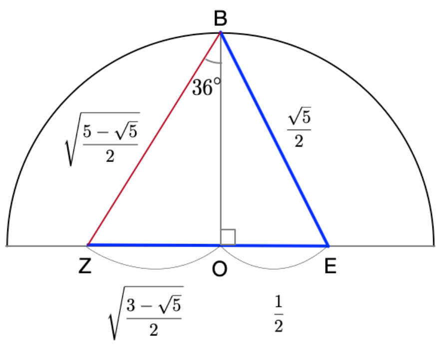


図 3.3: $\sin 36°, \sin 54°$ を求める図．

$\sin 36°$ は，次のように求めている．O を中心とする半径 1 の円を考える．OE=1/2 となる点 E と，点 B を結ぶ直線 BE の長さは $\sqrt{5}/2$ である．点 E より，BE と同じ長さをとった点 Z を考えると，BZ は，半径 1 の円に内接する正五角形の辺の長さ $\sqrt{(5-\sqrt{5})/2}$ に等しくなる．したがって，角 OBZ は 36° となるので，

$$\sin 36° = \sqrt{(5-\sqrt{5})/8}$$

となる．角 OZB は 54° となるので，$\sin 54°$ も求められる．

$\sin 30°$ と $\sin 36°$ がわかったことから，加法定理を用いることで，6° 刻みの三角関数を作ることができる．さらに，半角定理，倍角定理を用いることで，3° 刻み，1.5° 刻み，0.75° 刻みの三角関数を求めることができる．さらに，

$$\frac{\sin 0.75°}{0.75°} < \frac{\sin 1°}{1°} < \frac{\sin 1.5°}{1.5°}$$

の関係から間の $\sin 1°$ を求めるなどを繰り返し行っていった．

さらに，詳細な角度に対応するため，プトレマイオスは，sixtieth とよぶ補正値も出している．これは，

$$\text{sixtieth}\ \theta° = \frac{\mathrm{crd}\ (\theta+1)° - \mathrm{crd}\ \theta°}{60} \quad (10)$$

とした値である．

3.2　インドの三角法

この節では，文献 [16] を参考にした．

インドの数学書で三角法に触れる最も古い文献は，ヴァラーハミヒラ (Varāhamihira, 505-587) の『パイターマハー・シッダーンタ (Paitāmahā-siddhānta)』とされる．インドでは，このときからすでに，弦の定義を半分にした「半弦（Jyārdha, Jyā）」を用いた．これが現代数学で使われる「正弦」(sine, dorjyā) である[7]．

アールヤバタ (Āryabhata, 476-) は，著書『アールヤバティーヤ (Āryabhatiya)』にて，半径 $R = 3438$ とした正弦表を示している．ヒッパルコスの計算方法と同様で，$R\sin 90° = R$, $R\sin 30° = R/2$ および余角の関係式

$$R\sin(90° - \theta) = \sqrt{R^2 - (R\sin\theta)^2} \quad (11)$$

と半角公式

$$R\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\left(\frac{R - R\sin(90° - \theta)}{2}\right)^2 + \left(\frac{R\sin\theta}{2}\right)^2} \quad (12)$$

を用いることで 24 の角度について数表を作成した（図 3.5）．このような数表は，ヒッパルコスの手法と酷似している [16] という．このことは，ギリシャ数学のヒッパルコスの時代の成果がインドに伝わっていた（プトレマイオスの著作は伝わっていなかった）ことを示唆していると感じられる．

[7] サンスクリット語で「弦」を意味する「jya-ardha」が 8 世紀にアラビア語に翻訳されたとき，音訳でジーブ (jiba) となった．通常は母音を記載しないアラビア語では，jb となり，「湾、入り江、曲面」を意味する言葉ジャイブ (jayb) と混同されるようになった．12 世紀にラテン語に翻訳される際には，sinus（湾、湾曲、懐）へと誤訳された．この sinus が省略され，現在の記号 sin となった．

ブラフマグプタ (Brahmagupta, 598-665) は『ブラーフマスプタ・シッダーンタ (Brāhmasphuta-siddhānta)』にて,「正矢」(versed sine, Utkramajyā)

$$R\,\mathrm{vers}\ \theta = R - R\ \sin(90^\circ - \theta) \tag{13}$$

も定義した．正矢を用いると計算式が簡単になる．例えば，半角公式 (12) は

$$R \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{(R\sin\theta)^2 + (R\,\mathrm{vers}\ \theta)^2}{4}} \tag{14}$$

となる．

12 世紀になると，バースカラ 2 世 (Bhāskara II, 1114-1185) が「角度」を用いて正弦・正矢を定義しなおし，同時に「余弦」(cosine, kotijyā),「余矢」(coversed sine, koty-utkramajyā) を新たに導入した．図 3.4 の記号を用いると，

$$
\begin{array}{lll}
\text{正弦} & \mathrm{AB} = R\sin\theta, & (15)\\
\text{余弦} & \mathrm{AE} = \mathrm{BO} = R\cos\theta = R\sin(90^\circ - \theta), & (16)\\
\text{正矢} & \mathrm{BC} = R\ \mathrm{vers}\ \theta = R - R\cos\theta, & (17)\\
\text{余矢} & \mathrm{DE} = R\ \mathrm{covers}\ \theta = R - R\sin\theta & (18)
\end{array}
$$

である．

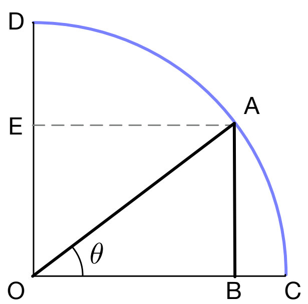


図 3.4: バースカラ 2 世による 4 つの三角関数の定義

余角の関係は余弦と正弦で $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$ のようになる．三平方の定理は $(R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2 = R^2$ となる．関係式も対称性よく書かれることになる．バースカラ 2 世は，角度差の半分の正弦を与える公式

$$R\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(R\sin\alpha - R\sin\beta)^2 + (R\cos\alpha - R\cos\beta)^2} \tag{19}$$

を示し，これを用いて，3° ごとの正弦が計算できることを述べている（図 3.5）．さらに加法定理を導いて 1° ごとの正弦表を作成している．

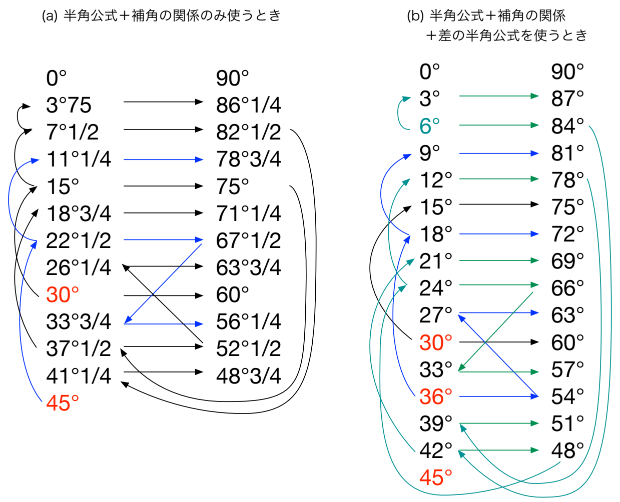


図 3.5: 60° と 90° の正弦の値と，補角の関係と半角の公式が既知であれば，24 の角度の値での数表が作成できる（図 3.2 と原理は同じ）．さらに差の半分の正弦を求める公式が既知であれば，30 の角度での数表が作成できる．右図は，27° と 15° の正弦から 6° の正弦を求めたときの例.

ただし，加法定理はすでにプトレマイオスが示していたし，バースカラの時代にはイスラームではより精密な三角関数表が作られていた．したがって，インドでは初期に正弦を定義したことが数学史上で重要であり，その後は独自の発展を続けていたことがわかる．

3.3 『崇禎暦書』の三要法と二簡法

『崇禎暦書』で紹介されている三角関数表の作成は，次のようである．基本的には，西洋で使われた方法である．

『崇禎暦書』の『大測』第 2 巻には，三要法と二簡法と呼ぶ公式がある．

要法一　（原文）前後両弦其能等于半径

（書き下し）前後の両弦，其の能は半径に等し．円において、ある弧の正弦と余弦（前後両弦）を二乗して足したものは，半径の二乗（単位円なら 1）に等しい．すなわち，

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{20}$$

要法二　（原文）有各弧之前後両弦求倍本弧之正弦

（書き下し）各弧の前後の両弦有りて、本弧を倍する正弦を求む

ある角（弧）の正弦と余弦が分かっているときに，その 2 倍の角（倍本弧）の正弦は，

$$\sin 2\theta = (2\sin\theta)\cos\theta. \qquad \text{(倍角の公式)} \tag{21}$$

要法三　（原文）有各弧之前後両弦求倍本弧之正弦

（書き下し）各弧の全弦の上方は、其の正半弦

の上と、其の矢の上とに偕にあり。両方并すれば等し。

$$(2\sin\theta)^2 = (\sin 2\theta)^2 + (1-\cos 2\theta)^2. \qquad (22)$$

これは，半角の公式と等価である．

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \qquad (23)$$

簡法一　（原文）両正弦之較。與六十度左右距等弧之正弦等

（書き下し）両正弦の較は、六十度の左右に距等しき弧の正弦に等し。

$$\sin(60^\circ + A) - \sin(60^\circ - A) = \sin A \qquad (24)$$

簡法二　（原文）有両弧不等之各正弦。又有其各餘弦。而求両弦相加、相減弧之各正弦。其法有二。一相加。一相減。相加者。以前弧之正弦。乗後弧之餘弦。以後弧之正弦。乗前弧之餘弦。各得數。并之為實。以半径為法。而一。得両弧相加為總弧之正弦。相減者。亦如前法互乗、得各數。相減、餘為實。以半径為法。為両弧相減弧之正弦

（書き下し）不等なる両弧の各正弦有り。又、其の各余弦有り。而して両弦相い加え、相い減ずる弧の各正弦を求む。其の法に二有り。一に相い加うる、一に相い減ずるなり。

相い加うるは、前弧の正弦を以て後弧の余弦を乗じ、後弧の正弦を以て前弧の余弦を乗ず。各々数を得、之を併せて実と為す。半径を以て法と為して、之を一にすれば、両弧相い加えて総弧と為るの正弦を得。

相い減ずるは、亦前法の如く互いに乗じ、各々の数を得。相い減じ、余りを実と為す。半径を以て法と為せば、両弧相い減ずる弧の正弦と為る。

これは加法定理を説明している．

$$\sin(A \pm B) = \sin A\,\cos B \pm \cos A\,\sin B \qquad (25)$$

したがって，倍角・半角の公式や加法定理を用いる方法が順に伝えられていたことがわかる．

4　建部賢弘による三角関数表

4.1　建部の三角関数表

多くの書物で，建部賢弘 (1664-1739) は,『算暦雑考』(制作年不詳)[8]にて，日本で初めての三角関数を作成した，とされている．上野健爾氏によると,『算暦雑考』は序文の内容から考えて,『綴術算経』と近い頃（1722年前後）ではないか，とのことである．平山 [25] は，建部賢弘が 1722 年以前に書いた『弧率』にてすでに半弦表と半背表があることを紹介している．

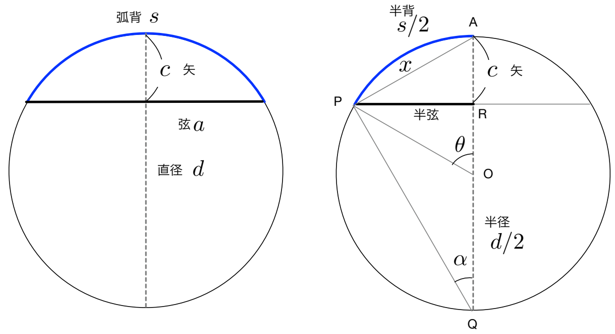


図 4.1: 建部が作成した三角関数表は，角度と半背，矢，半弦の 3 つの量の数表である．

図 4.1 左のように，直径 d の円を考え，上部から矢 c のところで切り取られる円弧（弧背という）s を取る．s の半分を半背 $s/2$ とし，その中心角を θ とする．建部が作成した三角関数表は，角度 θ と半背 $s/2$，矢 c，半弦（$a/2$ とする）の 3 つの量の数表である．建部は，直径を $d = 10$ 寸とし，0 度から 90 度の角 1 度ごとに対し， 3 つの量を 11 桁まで計算した表を作成している．

建部の問題設定は，矢 c の長さを与えたときに，弧背 s はいくらになるか．あるいは，s を与えたときに c はいくらになるか，というものだった．現代の表記では，角度を θ [radian] とすれば，

$$\begin{aligned}
\text{半背}\quad \frac{s}{2} &= \frac{d}{2}\theta, && (26)\\
\text{矢}\quad c &= r(1-\cos\theta) = d\sin^2\frac{\theta}{2}, && (27)\\
\text{半弦}\quad \frac{a}{2} &= \frac{d}{2}\sin\theta && (28)
\end{aligned}$$

となる．現代風に考えるなら，矢の式から $\theta = 2\sin^{-1}\sqrt{c/d}$ である[9]から，c/d が小さいものとして逆三角関数を展開することになる．

建部は，$(s/2)^2$ の展開式（$(\sin^{-1}\theta)^2$ の展開式）を与えている．付録の §B に,『算暦雑考』で記載した 3 つの展開式（[24] の解説にある式）と,『綴術算経』(1722) 弧数第十二に登場している 3 つの展開式（[28] の註にある式）を記載した．厳密に展開した場合と比較すると，最も良い式で，7 次の展開項の係数まで一致している．

[8]佐藤 [24] に翻刻と印影がある．原著は消失．

[9]あるいは，図 4.1 右のように，補助線を引き，三角形 PQA と三角形 RPA が相似であることから，$d : x = x : c$，すなわち $x^2 = cd$ となる．これより，$\sin\alpha = \dfrac{x}{d} = \sqrt{\dfrac{c}{d}}$ となる．扇形 OAP の弧（半背 $s/2$）の長さは，中心角が $\theta = 2\alpha$ であることから，同じ式が得られる．

逆三角関数の展開式の導出は，ヨーロッパでは，オイラー（Leonhard Euler）とヨハン・ベルヌーイ 1 世（Johann I Bernoulli）の 1737 年の書簡に登場する [26] ものであり，年代的に 15 年はやい．また，このような無限級数で表記される数があることについて,『綴術算経』にて建部は「数に盡（つく）るあり，不盡（つきず）あり」（数には尽きるものと尽きないものがある [28]）との感慨を記している．

ところで，このような高次の展開式で半背の値が得られたとしても，角度が大きなところでは必ず収束性が悪くなる（図 B.1）．おそらくその点に建部も気づいたのだろうか.『算暦雑考』で数表を作成する際には，これらの近似式を使わず，角度を倍にしたときの弦と矢の関係式「倍術」（倍角の公式），余角を利用した関係式「折術」，3 倍の角についてなりたつ「三双術」（3 倍角の公式），そして加法定理に相当する「併接術」を開発し，三角関数表（図 4.2）を作成した．

限数	半背	矢	半弦
一限	八厘七二六六四六二六○○	七絲六乙五二四二乙八○五	八厘七二六二○参二乙八七
二限	乙分七四五参二九二五二○	参毫○四五八六四九○四五	乙分七四四九七四八参五乙
三限	二分六乙七九九参八七八○	六毫八五二参六二二七一	二分六乙六七九七八乙二二
四限	参分四九○六五八五○四○	乙厘二乙七九七四八七乙	参分四八七八二参六八七二
五限	四分参六参参二参乙参○○	乙厘九○二六五○九五四乙	四分参三七七八七乙参七四
六限	五分二参五九八七七五六○	二厘七参九○五二参乙五九	五分二二六四二参乙六参四
七限	六分乙○八六五二参八二○	参厘七二六九二四乙七九参	六分○九参四六七乙七○参
八限	六分九八乙参乙七○○八○	四厘八六五九六五六二九参	六分九五八六五五○四八○
九限	七分八五参九八乙六参四○	六厘乙五五八二九七○二五	七分八二乙七二参二五二○
十限	八分七二六六四六二六○○	七厘五九六乙二参四九四○	八分六八二四○八八八参四
十一限	九分五九九参乙○八八六○	九厘乙八六四○八二七六二	九分五四○四四八七八八

図 4.2: 『算暦雑考』にある三角関数表（角度 θ と半背 $s/2$，矢 c，半弦（$a/2$ とする）の 3 つの量の数表）．佐藤が翻刻したもの [24].

このような方針転換の動機はわからない．この種の公式を見出すきっかけが『崇禎暦書』に記載された計算法と考えれば説明できるが，そうだとすれば,『算暦雑考』の成立は，1727 年以降ということになる．

建部の「矢と弧と弦」の関係に対する研究の目的は，天文暦学への応用とされる．実際『算暦雑考』の最後には,「黄赤道」と称された章があり，赤道（地球の自転軸を南北にしたときの天球面上の赤道）から黄道（天球面上の太陽の通り道）への変換，およびその逆変換などが述べられている．

同時に，当時の和算書では「矢と弧と弦」の関係を用いた問題が散見される．まず，関連する中国書から見ていくことにする．

4.2 『九章算術』の弧田問題

中国の古算書の代表格のものに，後漢 (25-220) の頃に現存する形でまとめられた『九章算術』がある（大矢真一による訳が [33] にある）．撰者不明であるが，263 年に魏の劉徽（りゅうき）が註釈を施している（川原秀城による訳が [34] に，また，諸研究を含めた一連の解説が大阪産業大学のグループで報告 [35] されている）.『九章算術』は官吏の実務に必要な数学を解説したものである．

『九章算術』は，8 世紀頃には日本に伝わったとされる．大宝律令 (701 年) には役人を養成する大学寮に「算道」という学科があり，中国の数学書「算経十書」が指定されていた．しかし，その知識は途絶え，江戸時代に再び輸入されるまで，日本では記録がないようだ.『九章算術』は，問題を提示した後,「答え曰く」「術に曰く」の形で解説が続くが，これが『塵劫記』で採られ，和算での基本スタイルになったと言われる．

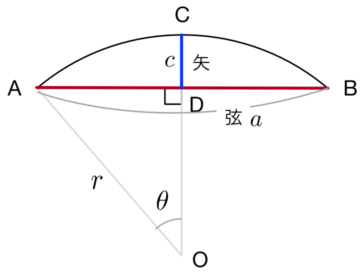


図 4.3: 『九章算術』の弧田問題（方田の第 35・36 問）．

『九章算術』では円周率を 3 としている（方田章の第 31/32 問）．円周率を使って円周を求める問題の次に，円の一部の面積を求める問題（第 35/36 問）がある．弧田（あるいは弧形田）問題と呼ばれるが，図 4.3 にあるように，弦 a と矢 c を与えて，弧 ACB と弦 ADB の囲む面積 S（以下，弧田の面積とよぶ）を求めさせるもので，答えは，

$$\text{弧田面積} \quad S = \frac{1}{2}(ac + c^2) \tag{29}$$

としている．また，この円の直径を d とすれば

$$d = \frac{(a/2)^2}{c} + c \tag{30}$$

が成り立つことを述べている．式 (30) は，三角形 OAD に三平方の定理を用いれば導かれるが，式 (29) は正しくない．形状が半円のとき，かつ円周率を 3 とするときのみ正しい．このことは，劉徽も指摘している [34, 37] が，正解を導出していない．

弧田面積式 (29) の妥当性を見るために，実際の面積と，近似式を求めてみる．角 AOD を θ として，$\sin^{-1}\theta$

の展開が必要になる．すなわち，円の半径を $r(=d/2)$ として，三角形 AOD に三平方の定理を用いると $r^2=(r-c)^2+(a/2)^2$ より，

$$r=(a^2+4c^2)/8c. \tag{31}$$

扇 OAC の面積 $\pi r^2\times(\theta/2\pi)=r^2\theta/2$ から，三角形 OAD の面積 $(r-c)a/4$ を引いて 2 倍することで，弧田の面積 S が

$$S=r^2\theta-(r-c)a/2 \tag{32}$$

となる．θ を求めるには，$\theta=\sin^{-1}(a/2r)$ が必要である．展開して 3 次までの近似をすると，

$$S=\frac{1}{2}ac+\frac{a^3c}{6(a^2+4c^2)} \tag{33}$$

となるが，半円に近い場合にはさらに高次の近似が必要となる．式 (29) と式 (33) を比較したものが次の図である．式 (29) は意外にもよい近似になっている．

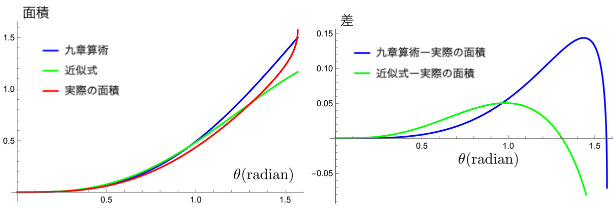


図 4.4: 弧田面積式 (29) と 1 次近似式 (33) を実際の面積と比較したもの．横軸は角度 (radian) で $\pi/2$ まで．

『塵劫記』に弧田問題はない．関孝和や建部賢弘に影響を与えたことがわかっている書物で探すと，村松茂清『算俎』（1663 年）には，第 3 巻に径弧矢弦の章があり，円闕図（弧田の図）が示され，16 問が掲載されている（[38]）．直径が 1 尺，矢が 1 寸，半弦が 3 寸という限定された設定のみの問題で，直径と矢と弧の長さを与えたときの円闕の面積を求めさせたり，直径と弦を与えたときの矢の長さを求めさせたりするようなものである．3 : 4 : 5 の直角三角形の存在と，扇の面積 S と弧の長さ L が直径 d を用いて $S=Ld/4$ となることを知っていれば解ける問題である．おそらく，この問題を一般化して，どんな設定でも解けるようにすることが，建部賢弘の脳裏にあったことも考えられる．

また，中国では，弧の長さに対する近似式も見出された．それを次に見る．

4.3 『夢渓筆談』の会円術

北宋時代，沈括（1031-1095）は，さまざまな分野に及ぶ随筆集『夢渓筆談』（1088）にて，数学に関するものも記載している．第 18 巻（[40] に所収）には，隙積術という積分（区分求積法）と，「会円術」という円の弧長を近似計算する式が提示されている．設定を『九章算術』の図 4.3 と同じ文字で表すことにして，円の直径を d，矢 CD の長さを c，弦 AB の長さを a とすると，弧 ACB の長さ s は

$$\text{会円術}\quad s=\frac{2c^2}{d}+a \tag{34}$$

となる，というものである．証明はないが，その後長く使われた近似式だという．

この式の有効性を見るために，実際の長さと，逆三角関数を用いた近似式とを比較してみる．半径 r は，b,c を用いて式 (31) で表されるので，弧の長さ s は，

$$s=2r\theta=2r\,\sin^{-1}\frac{a/2}{r} \tag{35}$$

これを $r\gg a$ として近似すると

$$\begin{aligned} s &= 2r\theta\simeq 2r\left(\frac{a}{2r}+\frac{1}{6}\left(\frac{a}{2r}\right)^3\right) \\ &= a+\frac{a^3}{24r^2}\simeq a+\frac{8c^2}{3a} \end{aligned} \tag{36}$$

となる．この第 2 項を d を用いて表しても式 (34) にはならない．しかし，図 4.5 のように，比較すると，式 (34) は，$\theta\sim\pi/2$ 付近では 3 次近似式よりも実際に近い値を与える式であることがわかる．

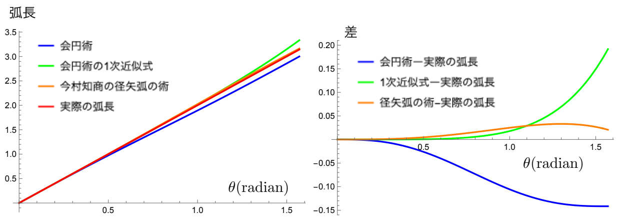


図 4.5: 会円術の弧長 (34) と 1 次近似式 (36) を実際の弧長と比較したもの．今村知商『竪亥録』径矢弦の術による弧長も示す．横軸は角度 (radian) で $\pi/2$ まで．

ところで，会円術に似た近似式が和算でも開発されていた．今村知商『竪亥録』(1639) にて，「径矢弦の術」として導出された

$$s^2=4cd+2c^2 \tag{37}$$

である [39]．これは円周率を $\sqrt{10}$ として求められたものだが，意外によく合う．比較のために図 4.5 に入れた．

当然ながら，建部が導出した展開式から弧長 s を計算すると，格段に実際の長さに合う．比較のため，付録 A にて列挙した『綴術算経』の展開式から得られた弧長を，図 4.5 と同じスケールで描いたものを用意した．

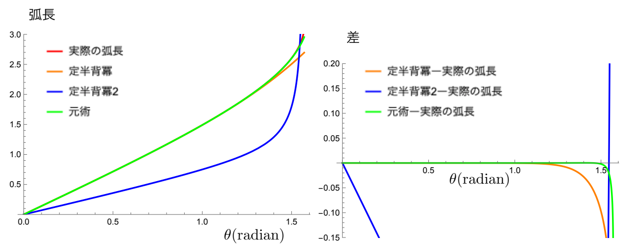


図 4.6: 弧長を建部の展開式から導出したもの．横軸は角度 (radian) で $\pi/2$ まで．

4.4 江戸初期の改暦

中国では太陰太陽暦が使われ，それが周辺諸国にも共有された．暦を作る際には，精密な天体観測が必要となる．太陽の見かけの位置は背景の星に対して日々動いていくが（地球の公転が楕円運動であることから）一定速度ではない．月の場合も同様である．また，近日点の移動による日出・日入の時刻変化や，歳差や章差による恒星の位置の移動，1 年や 1 日の長さの長期的な変化など，観測技術が向上するにしたがって，考慮すべき数学的な要素も精密さを要求された．

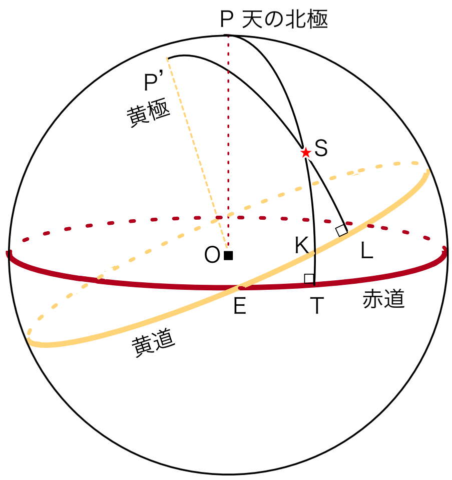


図 4.7: 星 S の位置を表すのに，赤道座標系は（ET, TS），黄道座標系は（EL, LS）を用いる．極黄道座標系は（EK, KS）を用いる．

中国での天体観測は，距星を基準にした（入宿度，去極度）の座標を使う方法と，極黄道座標系を使う方法の 2 つが使われた．後者は，黄経と赤緯を用いる座標系である（図 4.7）．そこで必要となるのが，黄経 EK と赤経 ET の対応である．球面三角法を知っている現代では簡単に求められる対応であるが，元の時代にできた授時暦（1281-1367 年）では会円術が使われた．授時暦は，イスラームでの天体観測技術も導入して，精密な観測結果にもとづく中国固有の最高峰とも呼ばれる暦である．1 年=365.2425 日として，定朔の計算法（毎月の始まりを決める計算）に 3 次補間を取り入れたものである．明の時代に使われた大統歴（1268-1644 年）は，授時暦の定数をわずかに変えたものにすぎない．

日本では，唐で 9 世紀に作られた宣明暦が 800 年近く使われていた．宣明暦は 1 年を 365.2446 日，授時暦は 365.2425 日とした．宣明暦を 800 年使い続けた日本では，江戸初期には，この差が 2 日の違いとなってしまい，日食の予報がずれることになり，改暦が必要とされた．そこで，積極的に研究されたのが，授時暦と大統歴だった．このあたりの話は冲方丁の小説『天地明察』（とその映画化）でお馴染みである．

関は 1680 年頃の書とされる『授時発明』にて，「黄赤道の差を論す」「黄赤内外の差を論す」「白道と黄赤道の差を論す」と題された章立てで，授時暦に使われた数学を解読している．これは，中国で 1652 年に黄鼎(こうてい)が授時暦の数理をまとめた全 80 巻の『天文大成管窺(かんき)輯要(しゅうよう)』の中にあるものを，一行ずつ解読したものである．(のちの貞享 3 年 (1686 年）に,『管窺輯要』のうち 15 条について，関が訓点を加えた写本『関訂書』が残されている [41]）.

こうした授時暦の研究の成果が，渋川春海（安井算哲）が編纂した日本独自の暦である貞享暦として 1685 年から使われることになる．数学の視点から授時暦の解明に取り組んだ関にとって，おそらく円周率の詳しい計算の必要性と，会円術の近似の悪さが問題視されたに違いない．そして，その研究が，建部賢弘による「$\sin^{-1} x$ の展開式の構築」と「三角関数表の作成」に向かわせたものと考えられる．

5 数学文化の伝播経路

数学文化の系譜を，伊東俊太郎 [16] や Joseph[32] を参考にして，図 A.1 のように描いてみた．

今回の話の発端となった，2 つの三角関数表の存在から，三角法の文化の伝播には 2 つの経路があり，ほぼ同時に江戸時代前期の 1700 年前後に日本で邂逅していたことがわかる．

関孝和らの授時暦研究をもとに，貞享(じょうきょう)暦が採用されるに至ったが，中国（清）では，西洋天文学を取り入れた時憲暦が 1645 年には始まっていた．日本では，1755 年に宝暦(ほうりゃく)暦，1798 年に寛政暦，1844 年に天保暦と改暦を行う．いずれも西洋天文学を取り入れる方向で行われ（宝暦暦は貞享暦を少しだけ手直ししたものにすぎなかった），建部の三角関数表は，残念ながら日本の次の改暦に活かされることはなかった．

参考文献

[1] 楠葉隆徳，林隆夫，矢野道雄著『インド数学研究』（恒星社厚生閣，1997）

[2] 小曽根淳「紅毛流として伝来した測量術について(I)」数理解析研究所講究録 1787 (2012), 127-137

[3] 小曽根淳「紅毛流として伝来した測量術について(II): 三角関数表の伝来と二つの経路」数理解析研究所講究録別冊 50 (2014), 109-123

[4] 小曽根淳「17 世紀に日中へ渡来した三角関数表について」数学史研究 221 (2015) 21-41

[5] 日本数学史学会編『数学史事典』（丸善出版，2020）

[6] 佐藤健一，大竹茂雄，小寺裕，牧野正博『和算史年表　増補版』（東洋書店，2006）

[7] E. Robson, J. Stedall 編，齊藤憲・三浦伸夫・三宅克哉監訳『Oxford 数学史』（共立出版，2014）

[8] 小林龍彦「紅葉山文庫に収蔵される梅文鼎の著作について」科学史研究 41 (2002) p26.

[9] 竹迫 忍「宣教師による中国星座の同定方法の検証」数学史研究 III 期 3 (2023) 93.

[10] 平岡隆二「徳川吉宗の数理科学書収集と長崎聖堂」（佐藤賢一・梅田千尋・平岡隆二　編『幕府天文方の研究』思文閣出版，2026 所収）

[11] 小林龍彦「『暦算全書』の三角法と『崇禎暦書』の割円八線之表の伝来について」科学史研究 II, 29 (1990) p83.

[12] 小林龍彦「享保 12 年伝来の『割円八線之』をめぐって」数学史研究 129 (1991) p1.

[13] 李迪 (編著)，大竹茂雄，陸 人瑞 (共訳)『中国の数学通史』（森北出版，2002）

[14] 銭宝そう（王＋宗）著，川原秀城訳,『中国数学史』（みすず書房，1990）

[15] Nobuo Miura, The Applications of Trigonometry in Pitiscus : a Preliminary Essay, Historia Scientiarum 30 (1986), 63-78.

[16] 伊東俊太郎編『数学の歴史 2 中世の数学』（共立出版，1987）

[17] Roshdi Rashed, ed. *Encyclopedia of the History of Arabic Science, Vol. 2* (Routledge, 1996).

[18] Glen van Brummelen, *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry* (Princeton Univ. Press, 2009).

[19] J. L. Berggren, *Episodes in the Mahtematics of Medieval Islam* (Springer-Verlag, New York, 2016) 邦訳は，三浦伸夫監訳，坂田基如訳『中世イスラーム数学史　エピソードでたどるアラビア数学』（丸善出版，2023）

[20] 三村太郎『天文学の誕生　イスラーム文化がもたらしたもの』（講談社学術文庫，2026）

[21] プトレマイオス著，薮内清訳『アルマゲスト』（恒星社，1993）

[22] Claudius Ptolemy 著，Bruce M. Perry 訳『The Almagest: Introduction to the Mathematics of the Heavens』（Green Lion Press, 2014）

[23] 加藤賢一『世界最初の天文書『アルマゲスト』を読んでみよう』（恒星社厚生閣，2025）

[24] 佐藤健一『建部賢弘の「算暦雑考」』（研成社, 1995）

[25] 平山諦『東西数学物語』（恒星社厚生閣，1973）

[26] 日本学士院編『明治前日本数学史　第二巻』（岩波書店，1956）

[27] 小川束，佐藤健一，竹之内脩，森本光生『建部賢弘の数学』（共立出版，2008）

[28] 建部賢弘著，小川束訳註『綴術算経』（岩波書店, 2026）

[29] 三浦伸夫『近代数学の創造と発酵　中世・ルネサンス・17 世紀』（現代数学社，2023）.

[30] 三浦伸夫『改訂版　数学の歴史』（放送大学, 2019）.

[31] U.C. メルツバッハ，C.B. ボイヤー著，三浦伸夫，三宅克哉監督訳，久村典子訳『メルツバッハ& ボイヤー数学の歴史　1』（朝倉書店，2018）

[32] George G. Joseph, *The Crest of the Peacock : Non-European Roots of Mathematics, Third edition* (Princeton Univ. Press, 2011) [初版は 1991 年，第 2 版は 1993 年] 邦訳が 1996 年に講談社ブルーバックスから出ている.『非ヨーロッパ起源の数学　もう一つの数学史』ジョージ・G・ジョーゼフ著，垣田高夫，大町比佐栄訳.

[33] 薮内清編『中国の科学』〈世界の名著，続 1 巻〉（中央公論社，1975）

[34] 薮内清編『中国天文学数学集』〈科学の名著，2 巻〉（朝日出版社，1980）

[35] 大阪産業大学の『九章算術』関係論文ページ参照.

[36] 大川俊隆「『九章算術』訳注稿 (3)」大阪産業大学論集 人文・社会科学編 4 (2008) 25–52

[37] 大川俊隆「『九章算術』訳注稿 (4)」大阪産業大学論集 人文・社会科学編 5 (2009) 23–41

[38] 佐藤健一『算組 現代訳と解説』（研成社，1987）

[39] 和算研究所編，佐藤健一編集代表『和算百科』（丸善，2017）

[40] 沈括著，梅原郁訳註『夢溪筆談 2』東洋文庫 362（平凡社，1979）

[41] 小林博行「『関訂書』に見られる明代後期の中国・回回暦法研究について」科学史研究 53（2014）85-98.

[42] 小倉金之助『日本の数学』（岩波新書 61，岩波書店，1940）

＊＊＊

本発表準備には，科研費 挑戦的研究（開拓）24K21170 『天文文化学の新展開：数理的手法の導入で文化史と科学論から自然観を捉える研究の加速』 のサポートを受けた.

A 数学文化の伝播経路

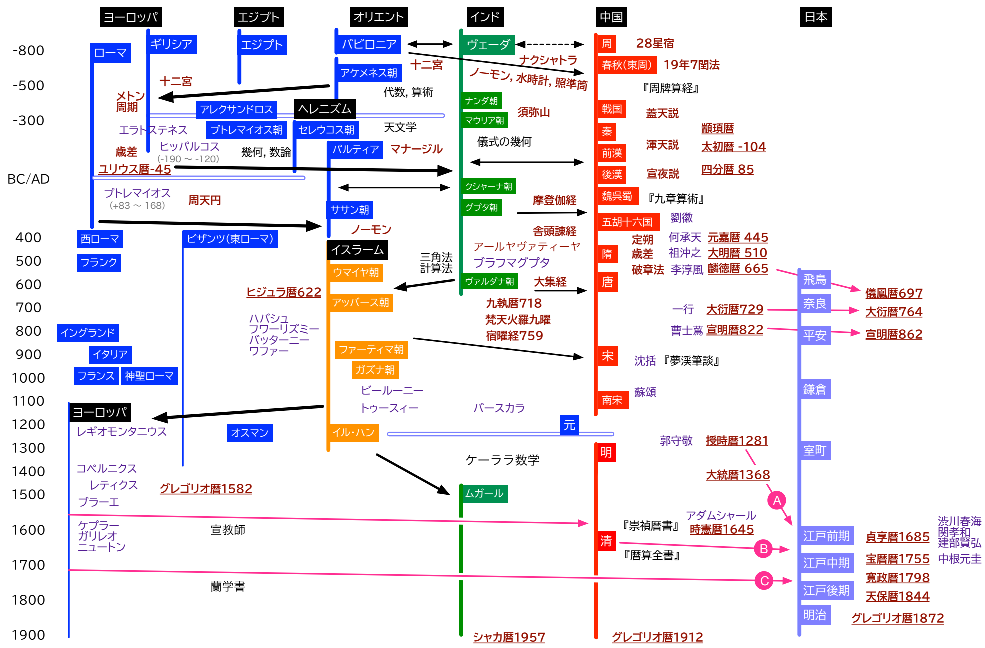


図 A.1: 数学文化の伝播経路．伊東俊太郎 [16] や Joseph[32] を参考にして作成した．江戸期に結ばれる A, B, C の線が前期・中期・後期を分けることになる．

B 建部が示した $(\mathrm{ArcSin})^2$ の展開式

逆三角関数 $\sin^{-1} x$ の展開公式は，$|x| \ll 1$ のとき，次のようになる．

$$\sin^{-1} x \quad = \quad x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \cdots + \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)} x^{2k+1} + \cdots \tag{A.1}$$

$$\tag{A.2}$$

以下では，直径 d，矢を c とする．半背の 2 乗 $\left(\frac{s}{2}\right)^2$ の展開式として建部が示した式を列挙する．

この展開式は，現代数学では，次のようになる．

$$f_0(c) = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \left(2\sin^{-1}\sqrt{\frac{c}{d}}\right)^2 \tag{A.3}$$

$$= dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{8}{45}\frac{c^3}{d} + \frac{4}{35}\frac{c^4}{d^2} + \frac{128}{1575}\frac{c^5}{d^3} + \frac{128c^6}{2079d^4} + \frac{1024c^7}{21021d^5} + \frac{256c^8}{6435d^6} + \frac{32768c^9}{984555d^7} + \frac{32768c^{10}}{1154725d^8}\cdots \tag{A.4}$$

$$= dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{0.1777\cdots}{d}c^3 + \frac{0.1142856\cdots}{d^2}c^4 + \frac{0.08126984\cdots}{d^3}c^5 + \cdots$$

『算暦雑考』に記載された展開式（佐藤健一『建部賢弘の算暦雑考』，研成社，1995）は以下の 3 つである．比較のため，c で展開した式も添える．

- 「背恒術」（とりあえず簡略化した計算で値を求める方法）

$$f_{S1}(c) = dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{c^3}{d - c \times \frac{9}{14}} \times 0.18 \tag{A.5}$$

$$= dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{0.18}{d}c^3 + \frac{0.115714}{d^2}c^4 + \frac{0.0743878}{d^3}c^5 + \cdots$$

- より精密な結果を得る「立限之術」

$$f_{S2}(c) = dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{\frac{c^2}{3} \times c}{d - c \times 0.632} \times 0.534 \tag{A.6}$$

$$= dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{0.178}{d}c^3 + \frac{0.112496}{d^2}c^4 + \frac{0.0710975}{d^3}c^5 + \cdots$$

- さらに「立限之術 2」

$$f_{S3}(c) = dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{\frac{c^2}{3} \times c}{d - c} \times \frac{8}{15} - \frac{\frac{c^2}{3} \times c \times \frac{8}{15}}{d - c} \times \frac{c}{d - c \times \frac{13}{25}} \times 0.3573 \tag{A.7}$$

$$= cd + \frac{c^2}{3} + \frac{8c^3}{45d} + \frac{0.114258c^4}{d^2} + \frac{0.0812274c^5}{d^3} + \cdots$$

『綴術算経』(1722) 弧数第十二に記載された展開式（小川束訳註，岩波文庫，2026）は以下の 3 つである．

- 「定半背冪」（c^7 の項の係数まで厳密解と一致）

$$f_{T1}(c) = dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{c^3}{d} + \frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{9}{14}\frac{c^4}{d^2} + \frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{9}{14}\frac{32}{45}\frac{c^5}{d^3} + \frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{9}{14}\frac{32}{45}\frac{25}{33}\frac{c^6}{d^4} + \frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{9}{14}\frac{32}{45}\frac{25}{33}\frac{72}{91}\frac{c^7}{d^5} \tag{A.8}$$

$$= dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{8c^3}{45d} + \frac{4c^4}{35d^2} + \frac{128c^5}{1575d^3} + \frac{128c^6}{2079d^4} + \frac{1024c^7}{21021d^5} + \cdots$$

- 「定半背冪 2」（c^4 の項の係数まで厳密解と一致）

$$f_{T2}(c) = dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{c^3}{d-c} - \frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{5}{14}\frac{c^4}{(d-c)^2} + \frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{5}{14}\frac{12}{15}\frac{c^5}{(d-c)^3} - \frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{5}{14}\frac{12}{15}\frac{223}{396}\frac{c^6}{(d-c)^4} \tag{A.9}$$

$$= dc + \frac{c^2}{3} + \frac{8c^3}{45d} + \frac{4c^4}{35d^2} + \frac{32c^5}{315d^3} + \frac{3464c^6}{31185d^4} + \frac{712c^7}{6237d^5} + \frac{2564c^8}{31185d^6} - \frac{416c^9}{31185d^7} - \frac{896c^{10}}{4455d^8} + \cdots$$

- 「元術」（c^7 の項の係数まで厳密解と一致）

$$f_{T3}(c) = dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}\frac{c^3}{d - \frac{9}{14}c}\frac{8}{15} + \frac{1}{3}\frac{c^3}{d - \frac{9}{14}c}\frac{c^2}{d^2 - \frac{1696}{1419}cd - \frac{6743008}{26176293}c^2}\frac{8}{15}\frac{43}{980} \tag{A.10}$$

$$= dc + \frac{c^2}{3} + \frac{8c^3}{45d} + \frac{4c^4}{35d^2} + \frac{128c^5}{1575d^3} + \frac{128c^6}{2079d^4} + \frac{1024c^7}{21021d^5} + \frac{2655317160448c^8}{66665128605075d^6} + \cdots$$

これらの収束度合いを比較する図 B.1 を示す．

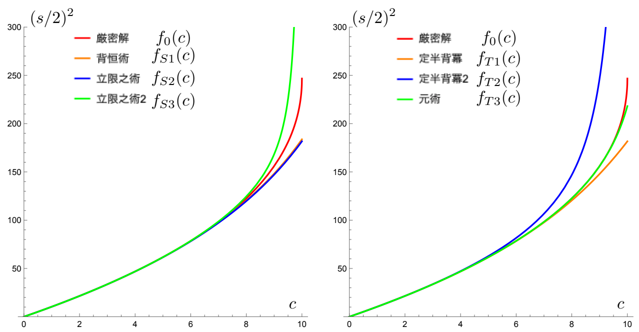


図 B.1: 建部の導いた半背の 2 乗の値を厳密な値と比較したもの．横軸は矢の長さ c で，$c = 10$ は半径と一致する場合（半円の場合）である．