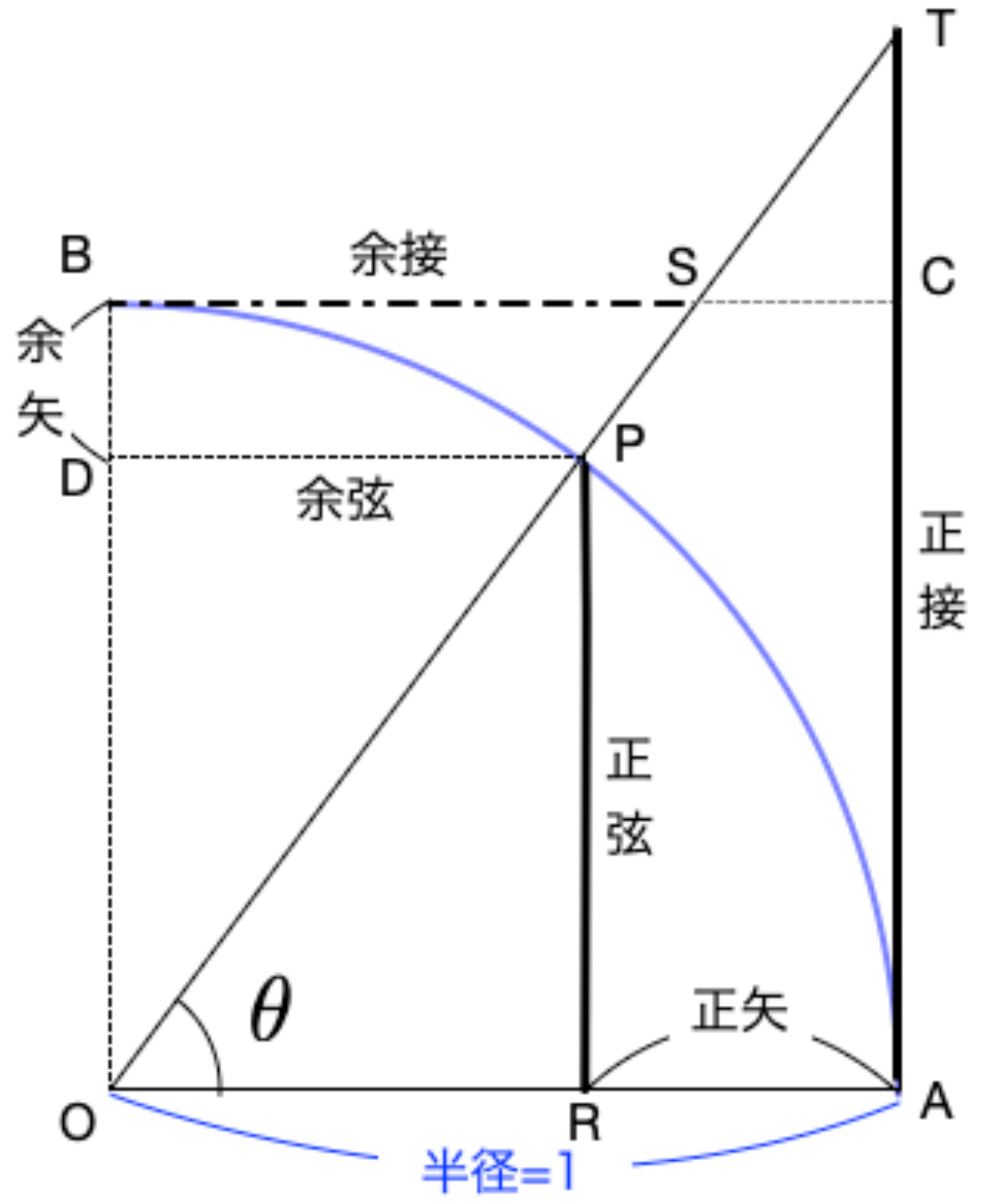
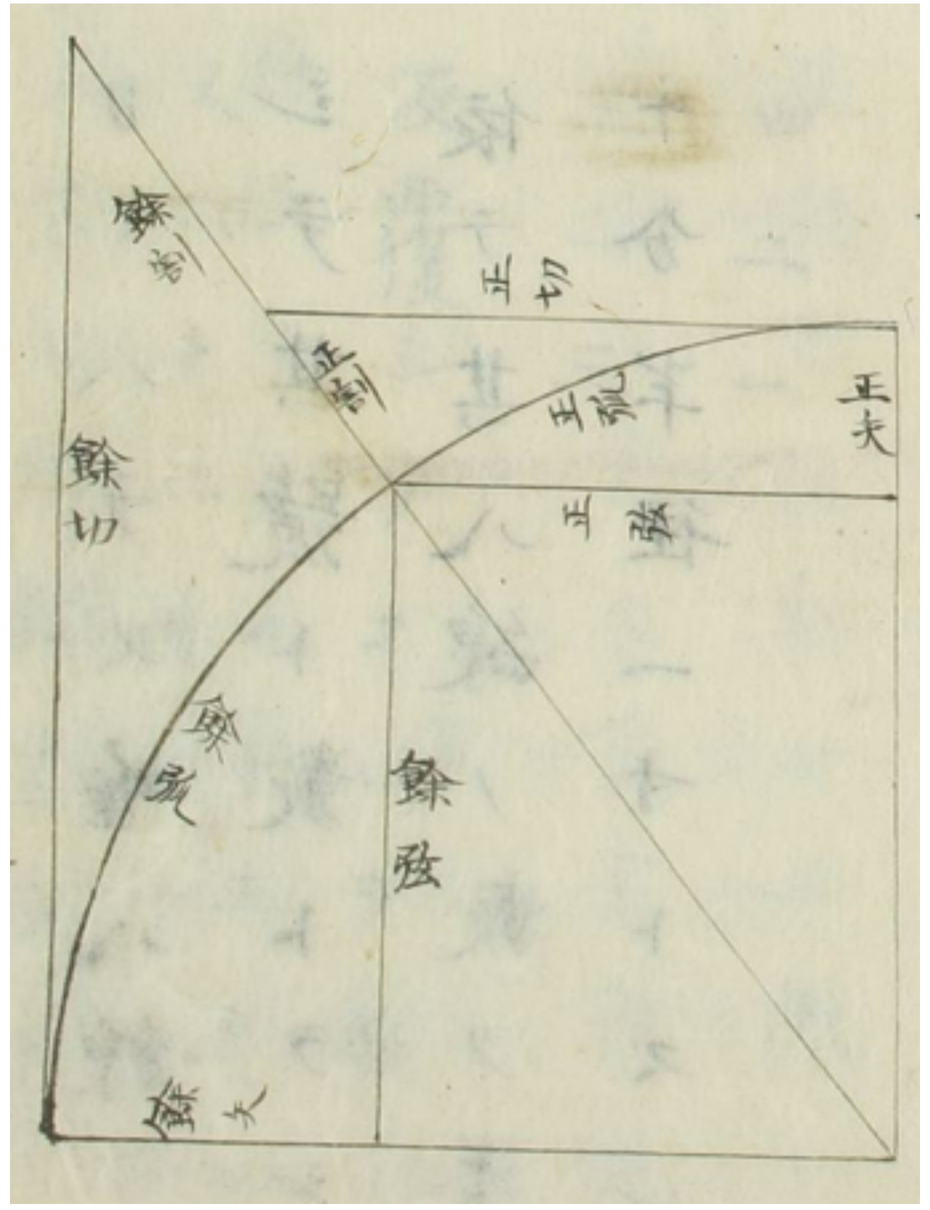
# 三角法の伝播　江戸前期に存在した2つの三角関数表



中根元圭『八線表算法解義』
(1727頃)

中根元圭 『八線表算法解義』(1727年頃)

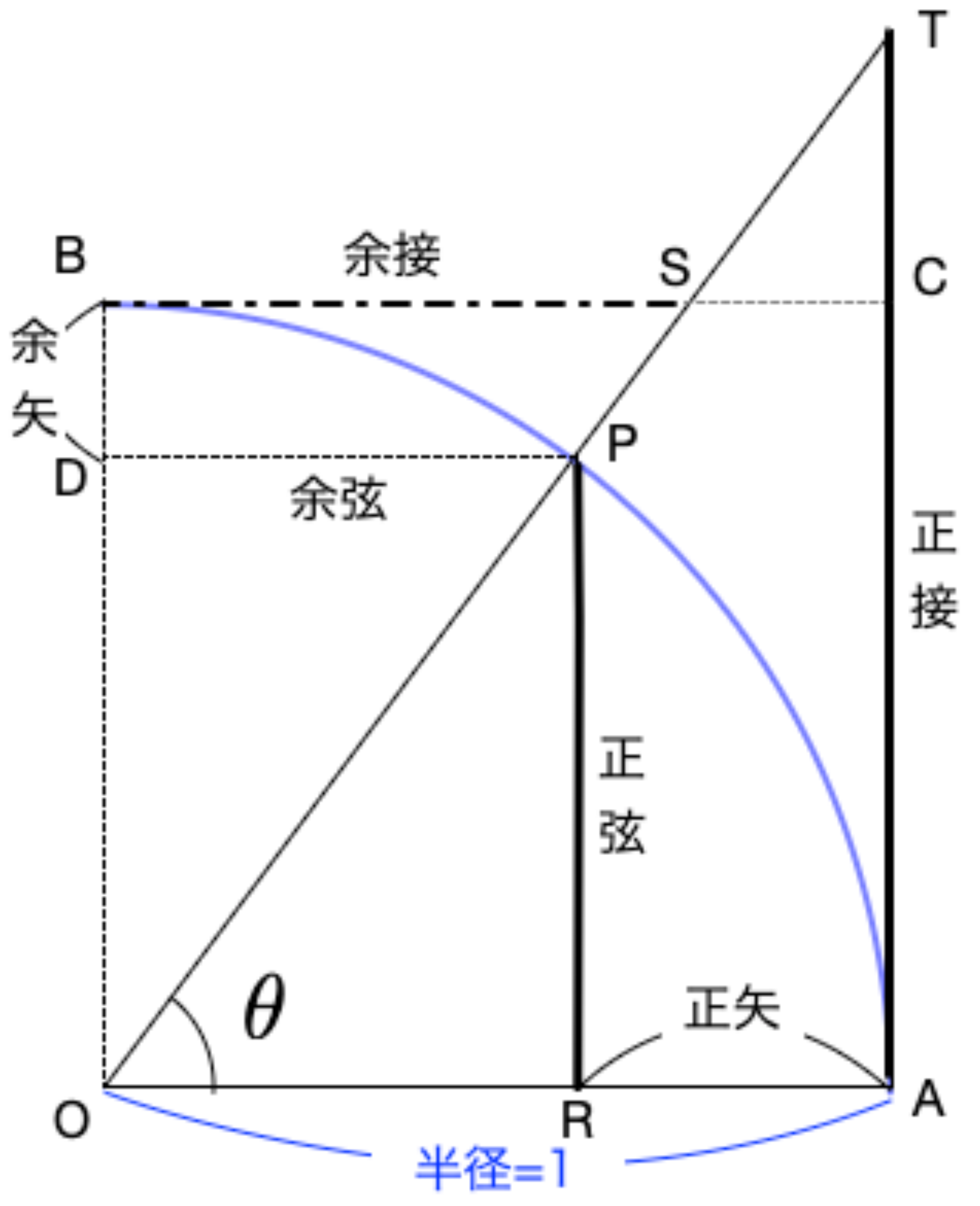
建部賢弘の『算暦雑考』(1722年頃)

真貝寿明(大阪工業大学 情報科学部)
hisaaki.shinkai@oit.ac.jp

https://www.oit.ac.jp/labs/is/system/shinkai/
https://www.oit.ac.jp/labs/is/system/shinkai/Viewgraphs/202606_tenbun_trigonometry_slide.pdf　このスライド
https://www.oit.ac.jp/labs/is/system/shinkai/Viewgraphs/202606_tenbun_trigonometry_print.pdf　配布プリント

# 八線(三角関数)の定義

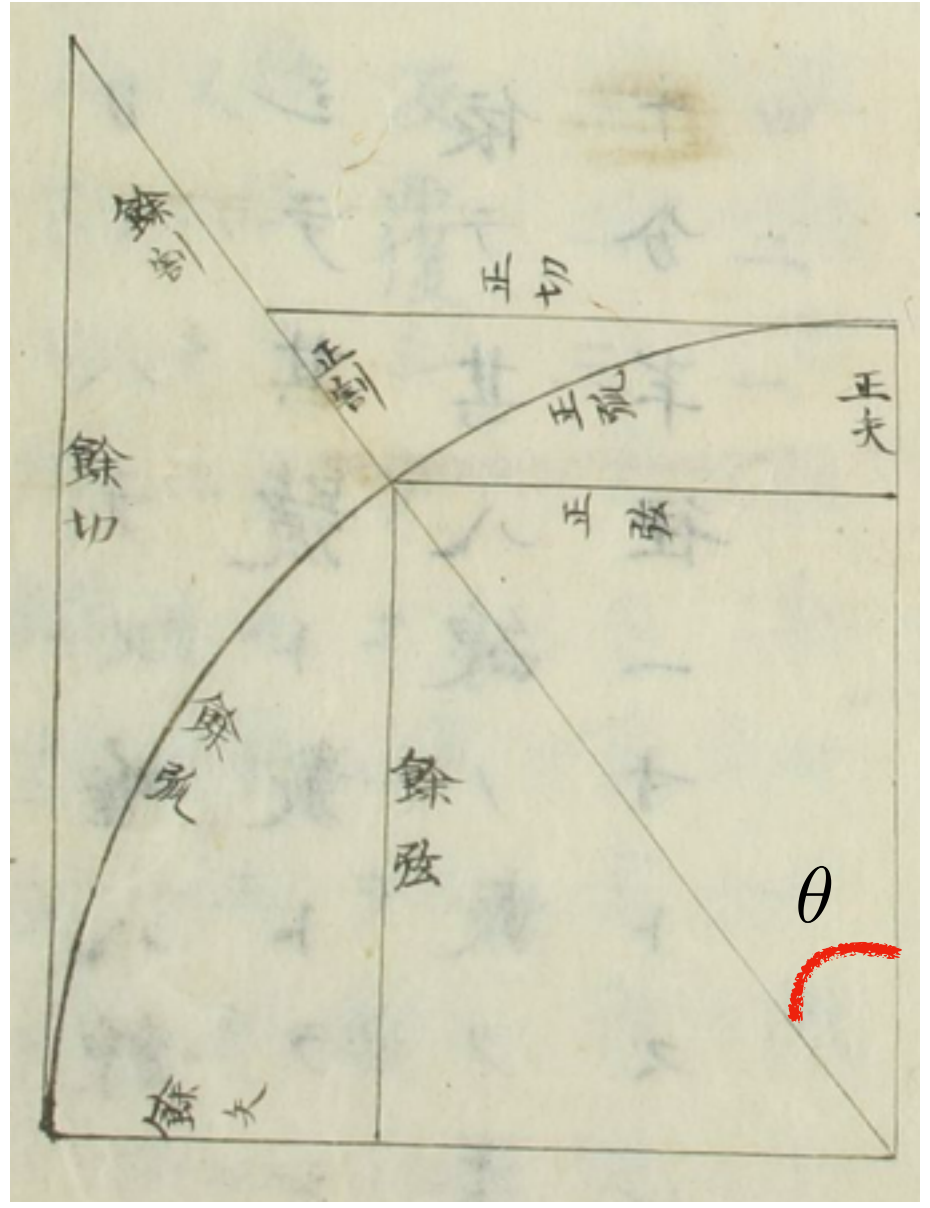
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 正弦 せいげん | $\mathrm{PR} = \sin\theta$ | 余弦 よげん | $\mathrm{PD} = \cos\theta$ | 正接 せいせつ | $\mathrm{AT} = \tan\theta$ |
| 正割 せいかつ | $\mathrm{OT} = \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ | 余割 よかつ | $\mathrm{OS} = \csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ | 余接 よせつ | $\mathrm{BS} = \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ |
| 正矢 せいし | $\mathrm{AC} = 1 - \cos\theta$ | 余矢 よし | $\mathrm{BD} = 1 - \sin\theta$ | | |




$$\mathrm{OT} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{AT}^2} = \sqrt{1 + \tan^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \quad (1)$$

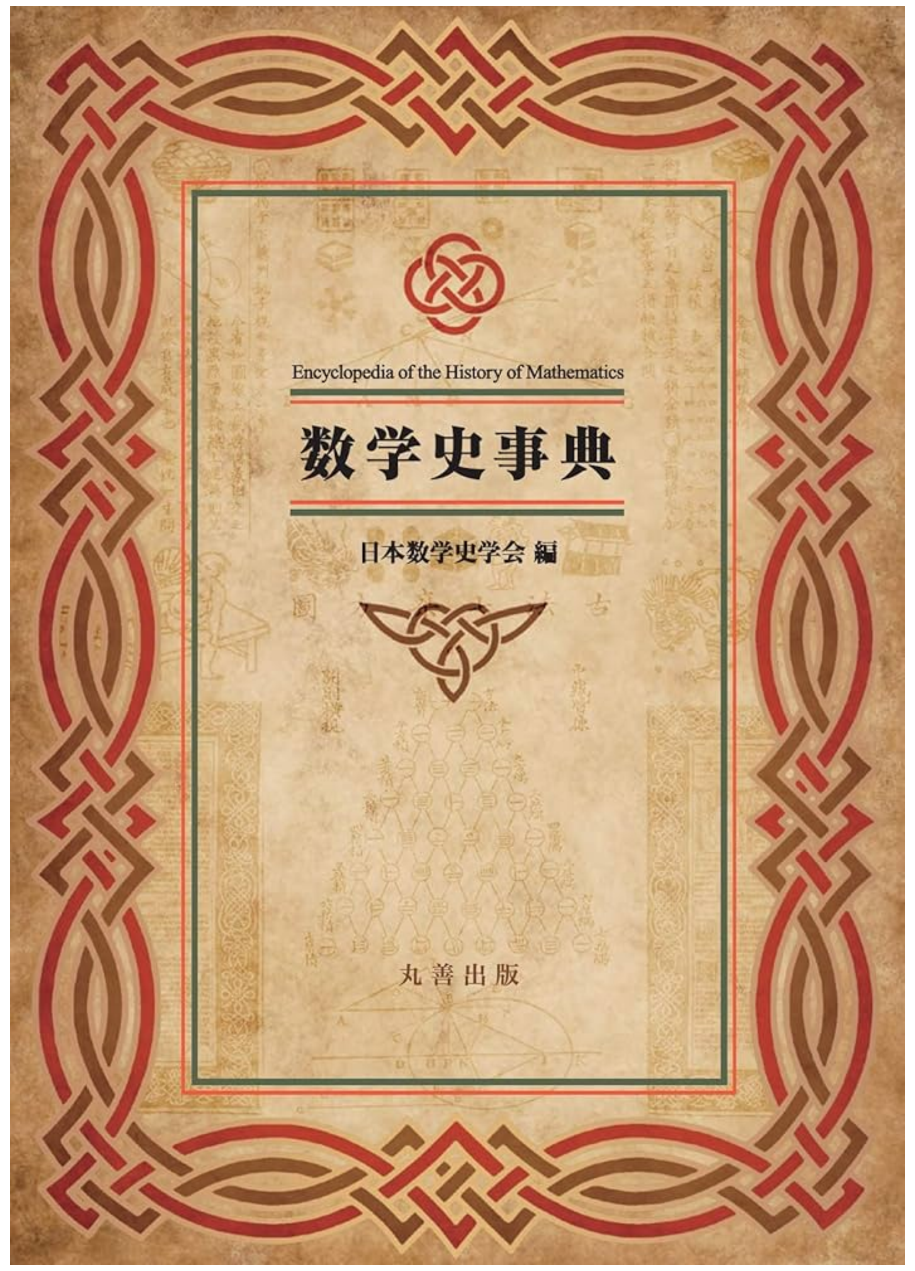
$$\begin{aligned}\mathrm{BS} &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} \\ &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}\end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{OS} &= \sqrt{\mathrm{OB}^2 + \mathrm{BS}^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2\theta}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \tan^2\theta}{\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sin\theta}\end{aligned} \quad (3)$$




中根元圭『八線表算法解義』
(1727頃)

# 八線(三角関数)の定義は　イスラーム　→ 西洋　→ 中国　→ 日本




第９章　計算法と計算器具の歴史　　すうひょう：わさん　345

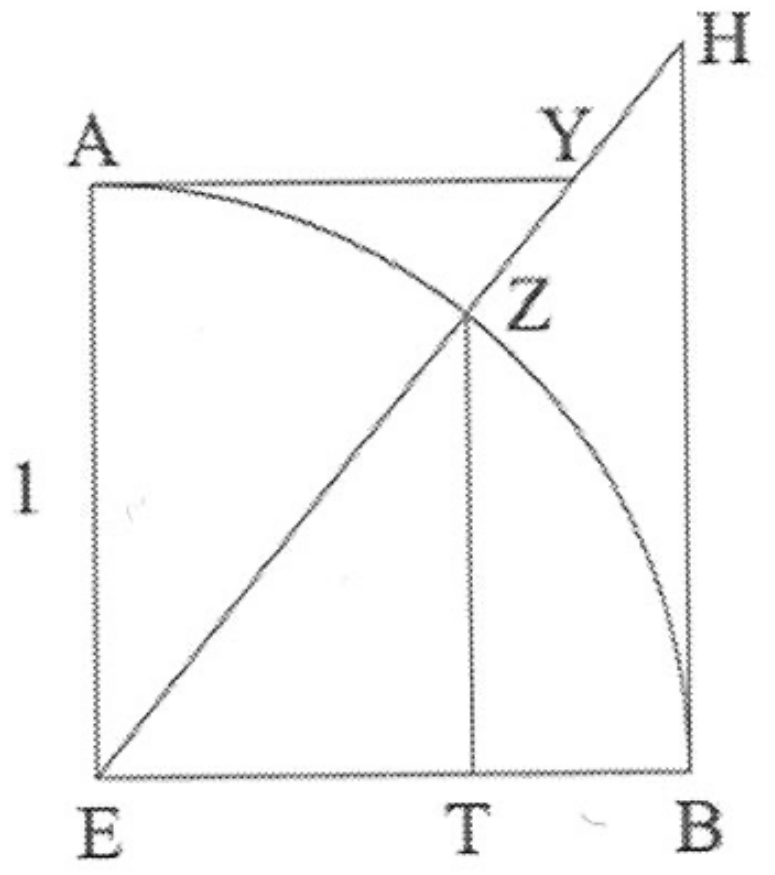



図８　アブー・ワファーの三角関数の定義

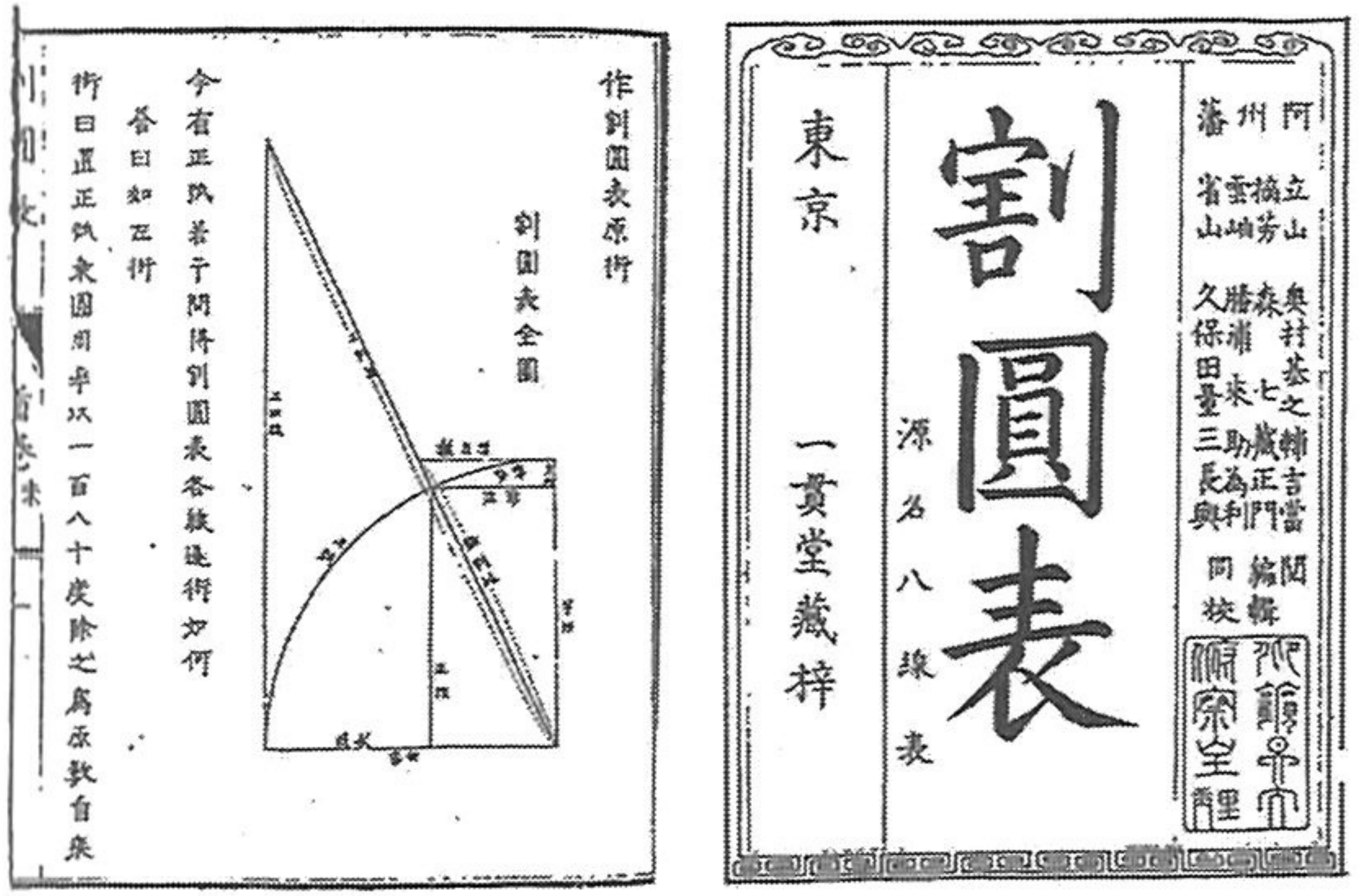
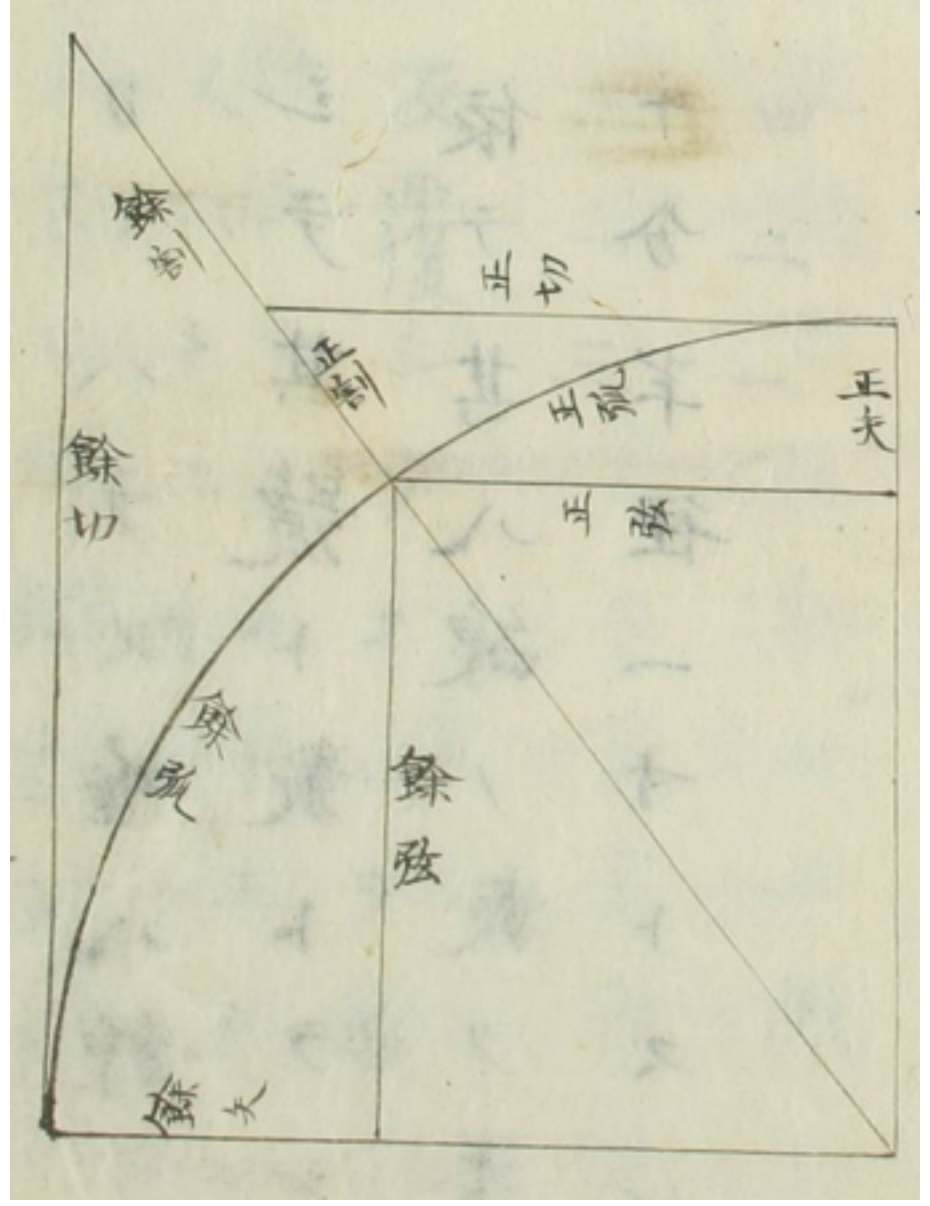


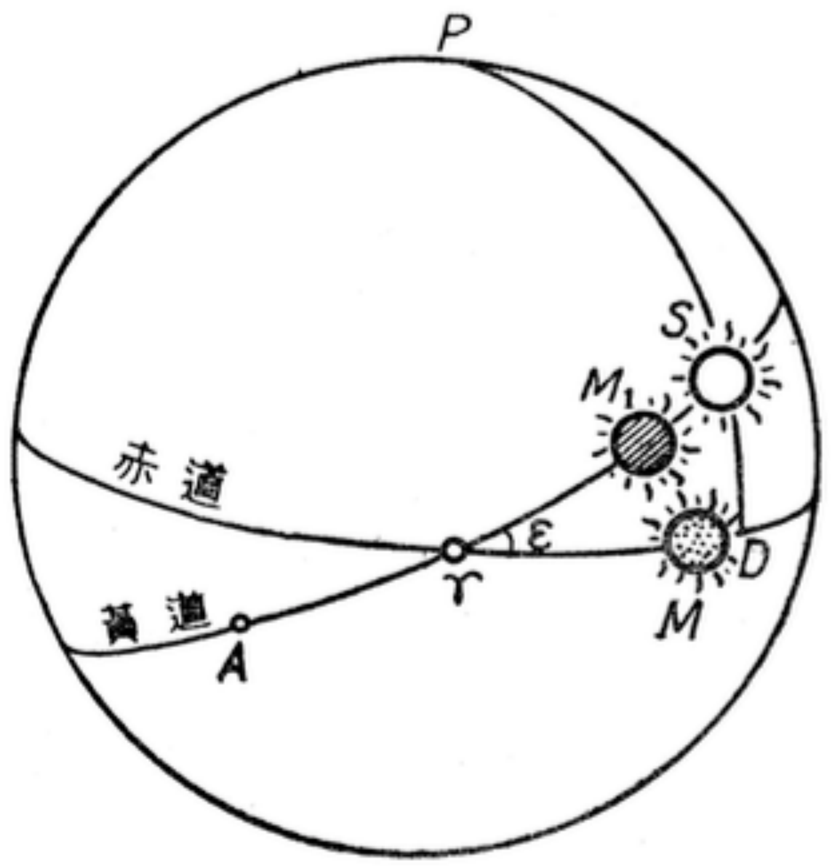

図１　『割円表』



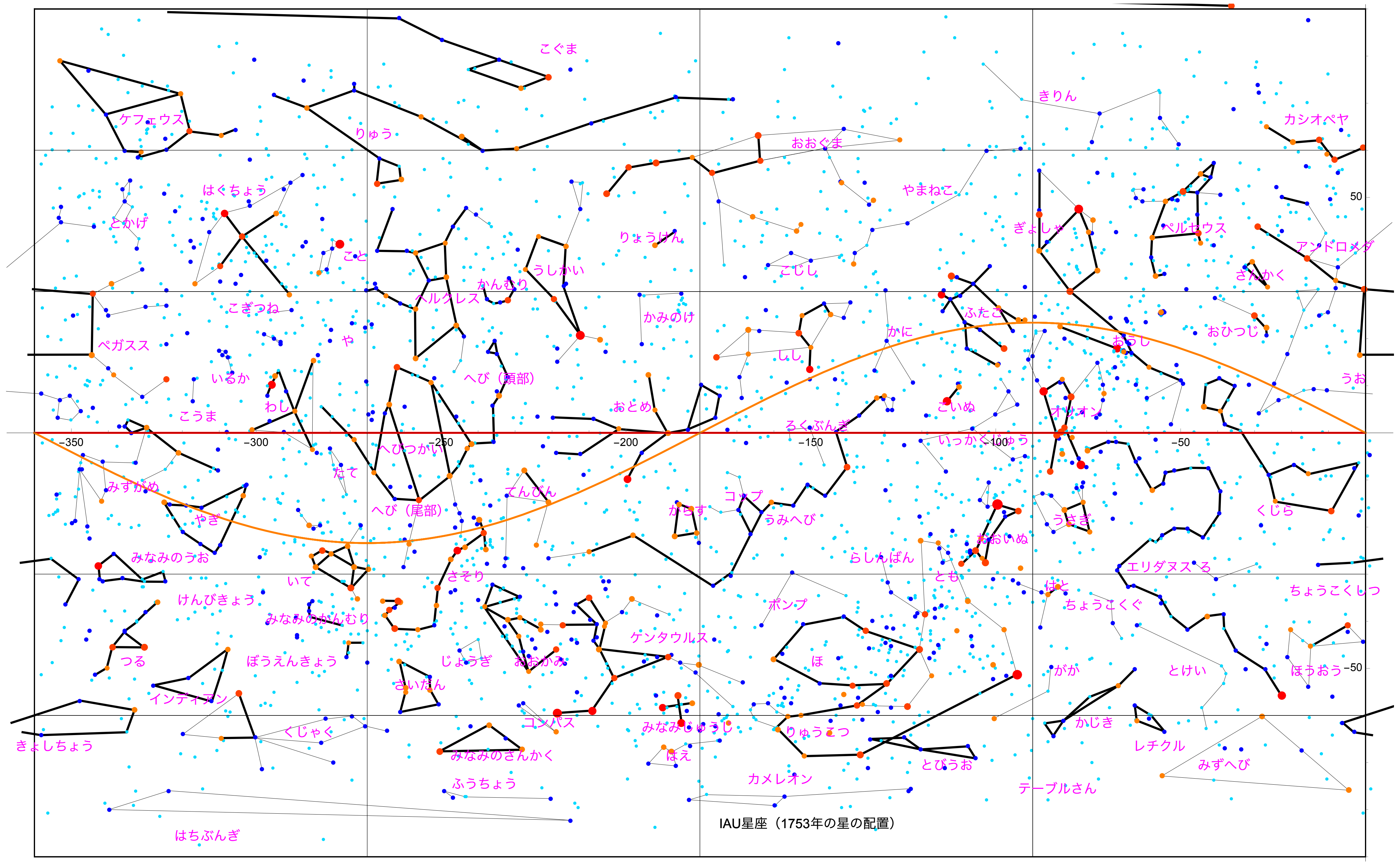
中根元圭『八線表算法解義』
(1727頃)

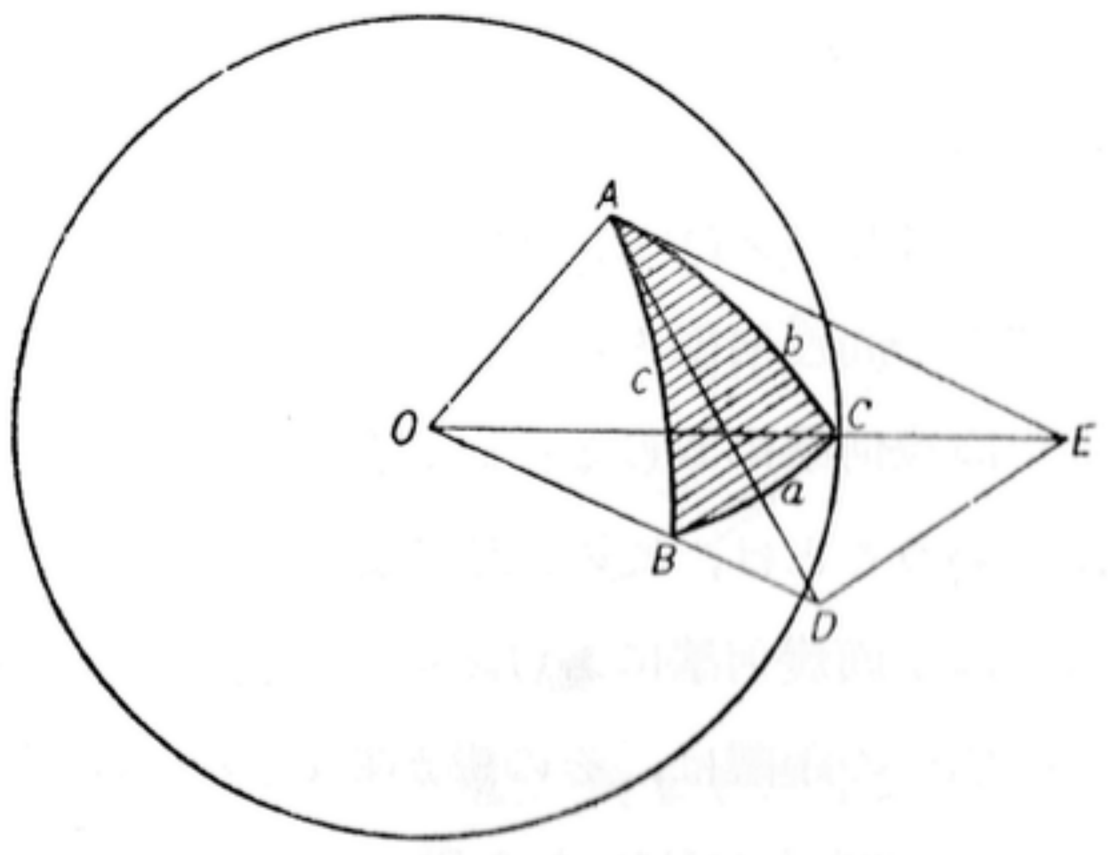
# 三角法・球面三角法は天文学で必要とされた

渡邊敏夫『数理天文学』（恒星社厚生閣，1959）

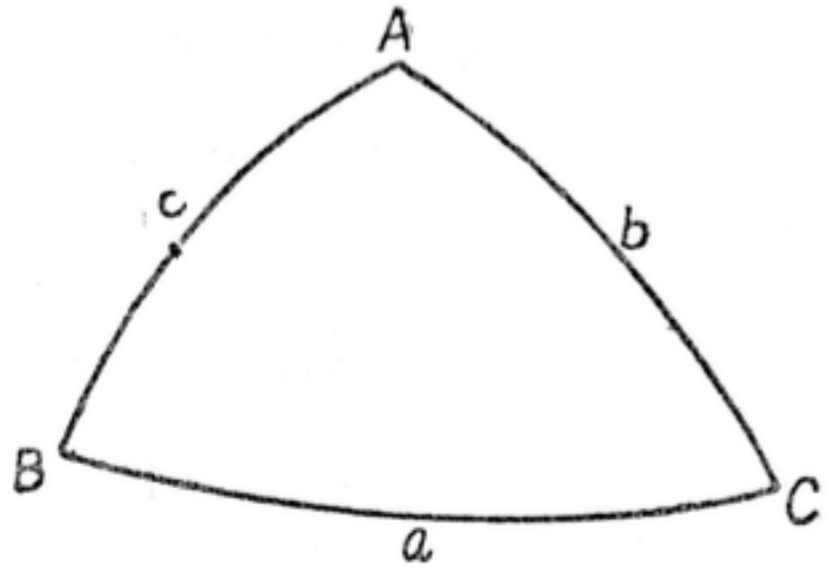



第 3 3 圖




第 2 圖

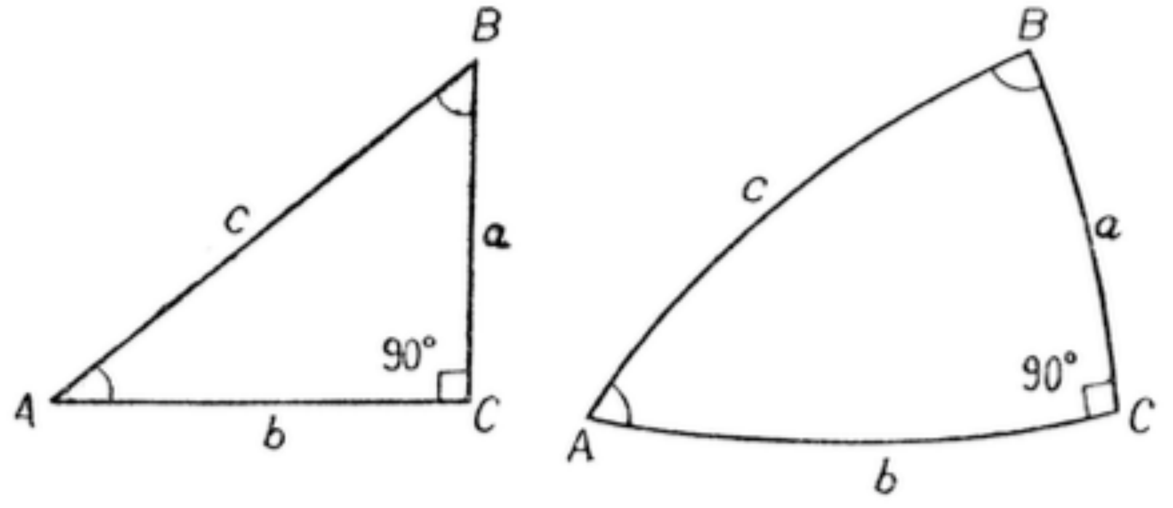



第 3 圖

$$
\left.\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\
\cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\
\cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}
$$

$$
\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \qquad \text{(B)}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sin a \sin B &= \sin b \sin A \\
\sin a \cos B &= \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A \\
\cos a &= \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos A
\end{aligned}\right\} \qquad (4{\cdot}6)
$$

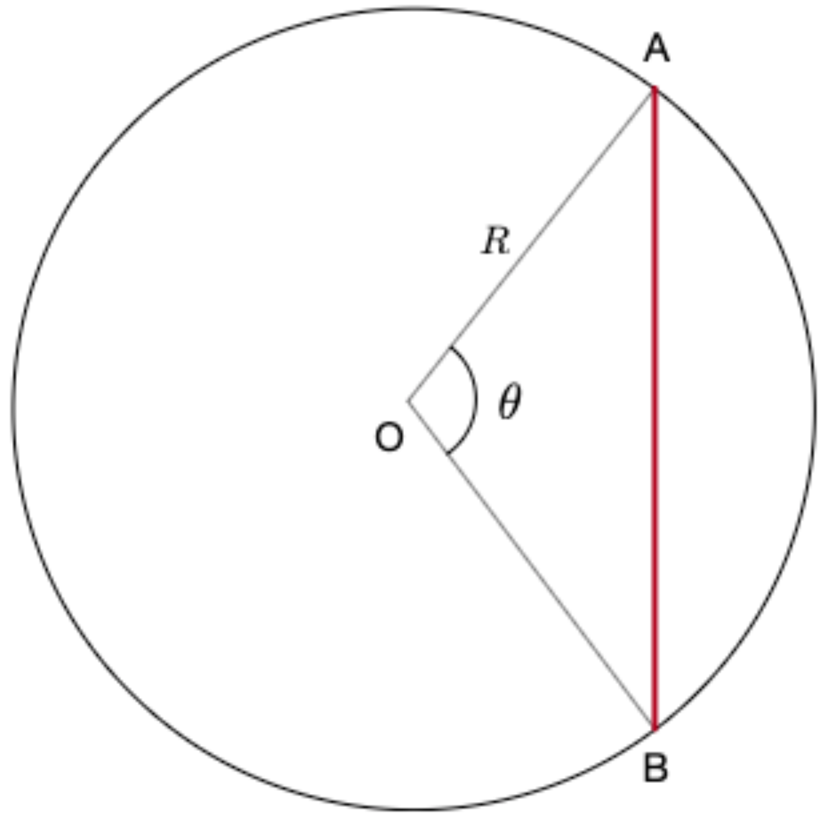



第 5 圖

| 平面直角三角形 | 球面直角三角形 |
|---|---|
| $\sin A = \frac{a}{c}$, $\sin B = \frac{b}{c}$ | $\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$ $\sin B = \frac{\sin b}{\sin c}$ |
| $\cos A = \frac{b}{c}$ · $\cos B = \frac{a}{c}$ | $\cos A = \frac{\mathrm{tg}\, b}{\mathrm{tg}\, c}$ $\cos B = \frac{\mathrm{tg}\, a}{\mathrm{tg}\, c}$ |
| $\mathrm{tg}\, A = \frac{a}{b}$ $\mathrm{tg}\, B = \frac{b}{a}$ | $\mathrm{tg}\, A = \frac{\mathrm{tg}\, a}{\sin b}$ $\mathrm{tg}\, B = \frac{\mathrm{tg}\, b}{\sin a}$ |
| $\sin A = \cos B$, $\sin B = \cos A$ | $\sin A = \frac{\cos B}{\cos b}$ $\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$ |
| $c^2 = a^2 + b^2$ | $\cos c = \cos a \cos b$ |
| $1 = \cot A \cot B$ | $\cos c = \cot A \cot B$ |

# プトレマイオス『Almagest』の三角関数表への道

ヒッパルコス(BC190頃-BC120頃)




$$R\,\mathrm{crd}\,60^\circ = R$$
$$R\,\mathrm{crd}\,90^\circ = \sqrt{2}R$$

**図 3.1:** 角度 $\theta$ と弦 (chord) AB .

弦の定義と三平方の定理から

$$R\,\mathrm{crd}\,(180^\circ - \theta) = \sqrt{(2R)^2 - (R\,\mathrm{crd}\,\theta)^2}$$

の補角の関係が導かれる．また，半角の公式

$$R\,\mathrm{crd}\,\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{(2R)^2 - 2R\sqrt{(2R)^2 - (R\,\mathrm{crd}\,\theta)^2}\right\}}$$

が導かれる．この関係は，ヒッパルコスも導いていた

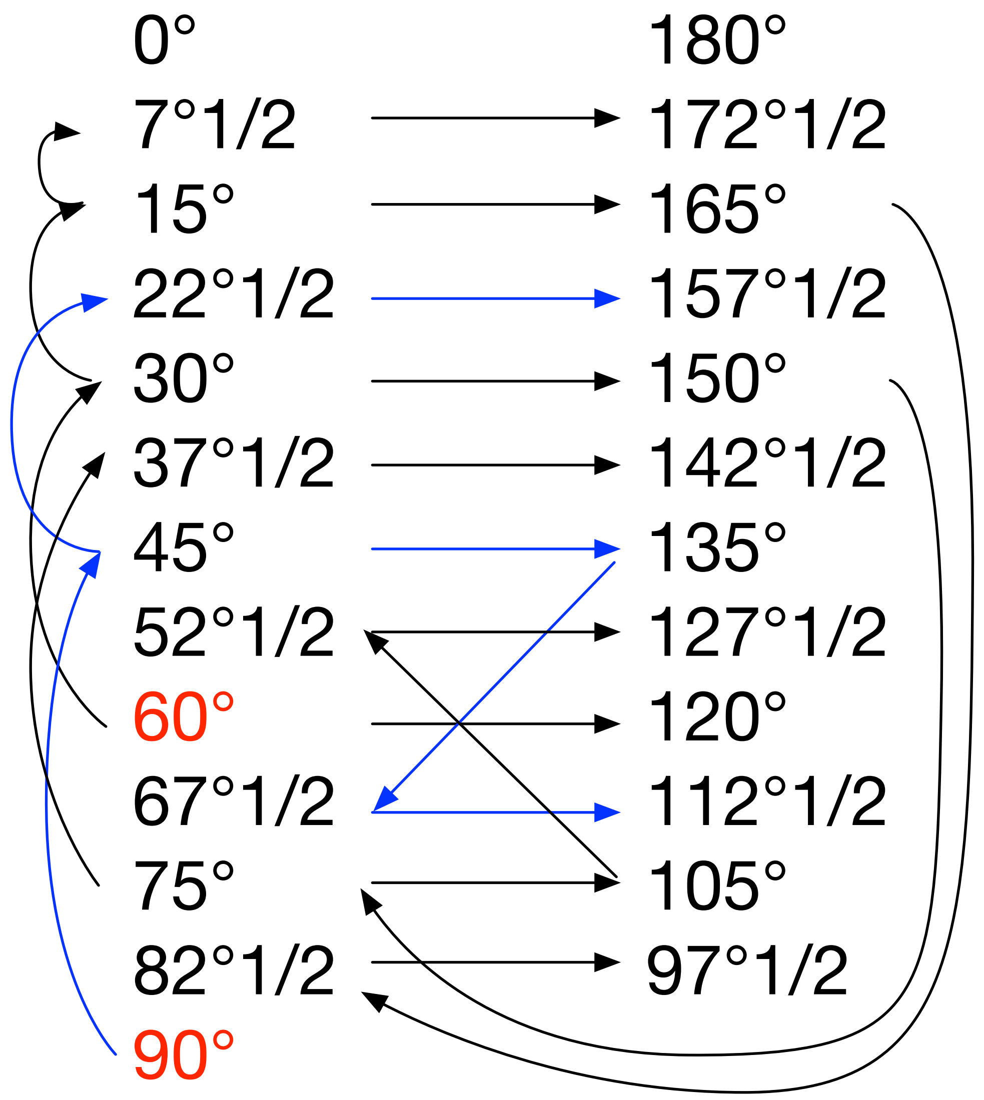
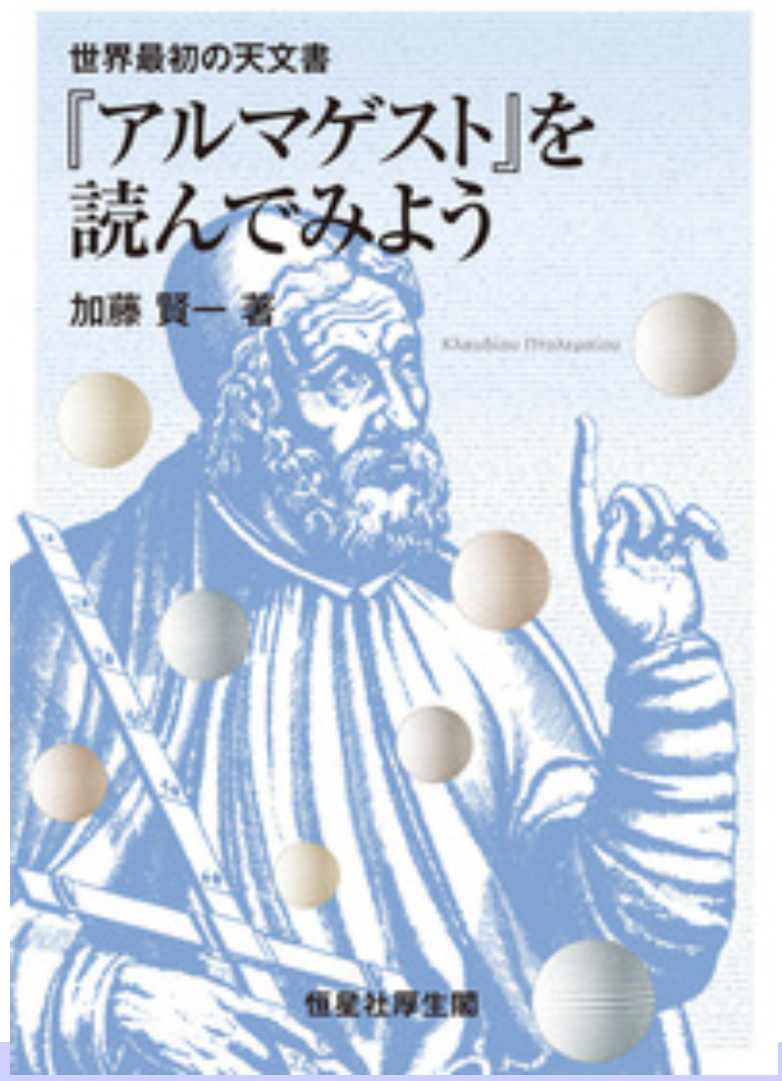



**図 3.2:** $60^\circ$ と $90^\circ$ の弦の値と，補角の関係と半角の公式が既知であれば，24 の角度の値での数表が作成できる．



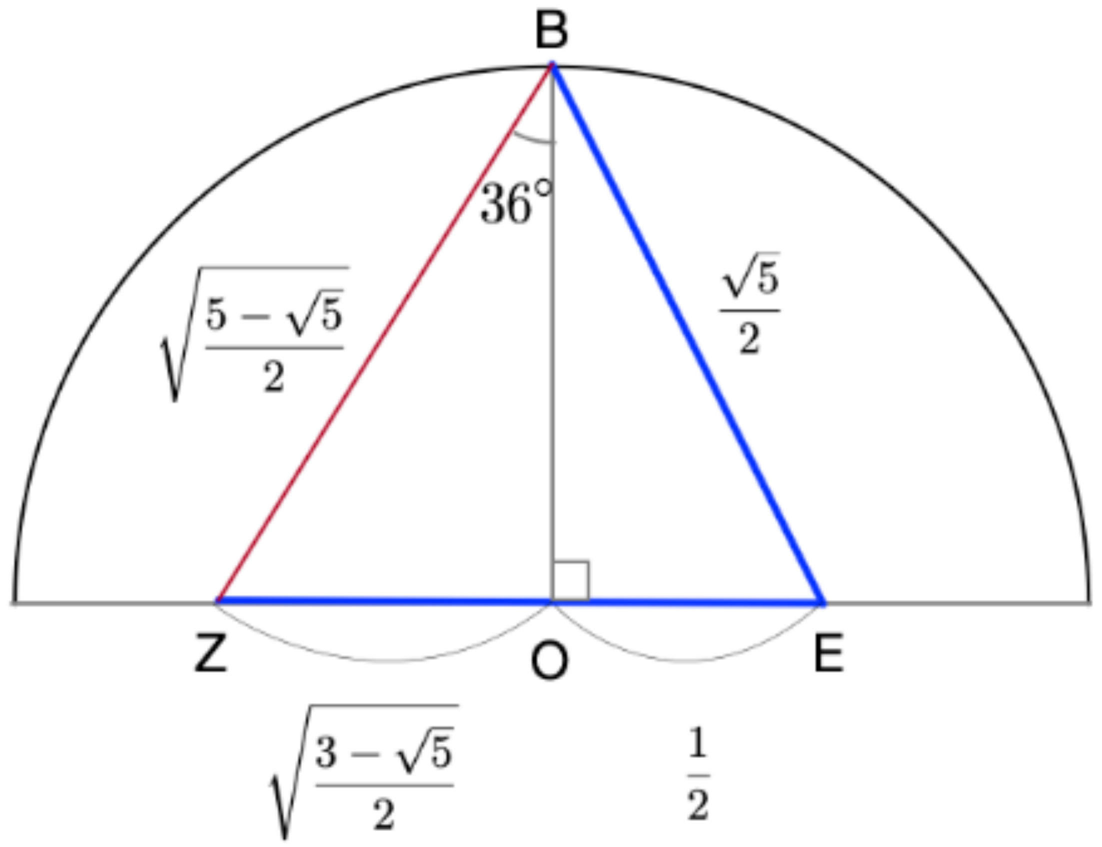




**図 3.3:** $\sin 36^\circ, \sin 54^\circ$ を求める図.

36°, 54°の弦を求める ▶▶▶ 6°刻みの表ができる
半角の定理 ▶▶▶ 3°刻みの表ができる
半角の定理 ▶▶▶ 1.5°刻みの表ができる
半角の定理 ▶▶▶ 0.75°刻みの表ができる

$$\frac{\sin 0.75^\circ}{0.75^\circ} < \frac{\sin 1^\circ}{1^\circ} < \frac{\sin 1.5^\circ}{1.5^\circ}$$

の関係から間の $\sin 1^\circ$ を求めるなどを繰り返し

# プトレマイオス『Almagest』の三角関数表

半径R=60としたときのCrdの表

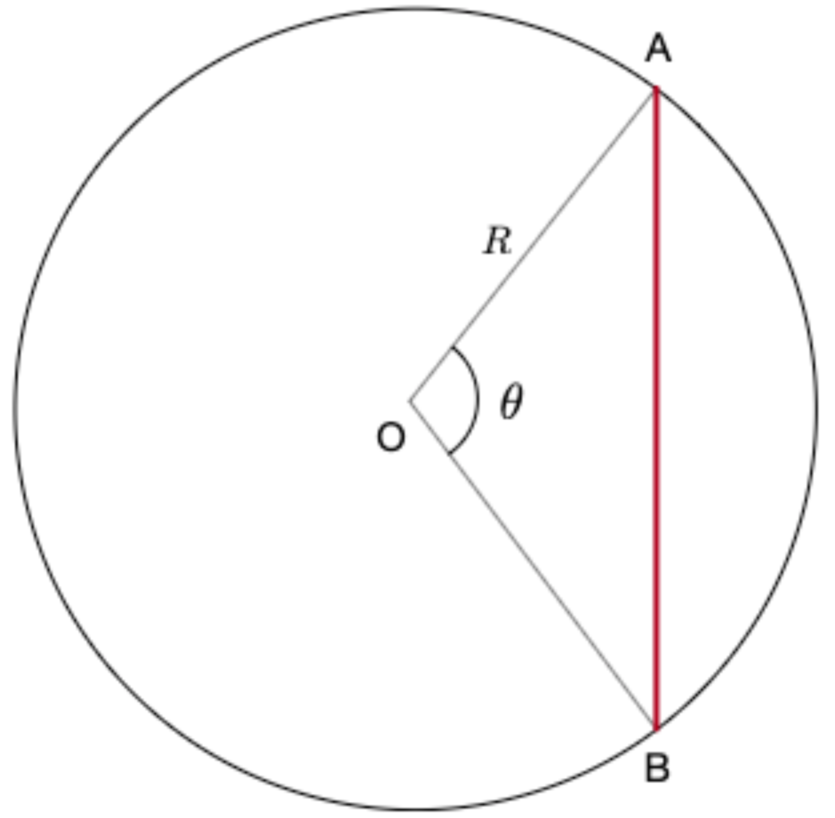



**図 3.1:** 角度 $\theta$ と弦 (chord) AB .

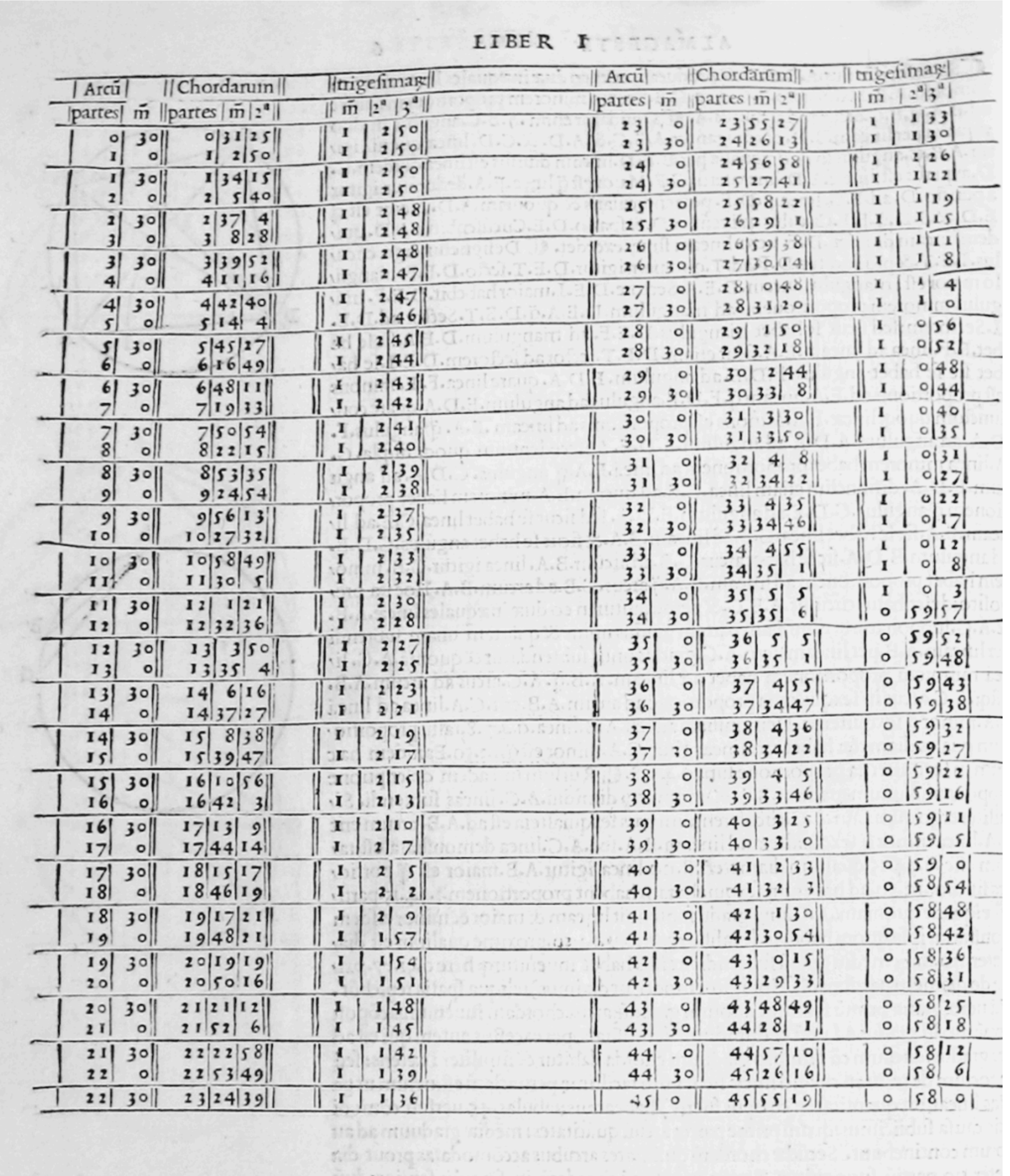
1分角ごとの
増分も示す

**表 3.1:** Mathematica にて再現したアルマゲストの三角関数表（部分）

| degree | Chord | Sixties | degree | Chord | Sixties | degree | Chord | Sixties |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0°30 | 0 ; 31, 25 | 0 ; 1, 2, 50 | 30. | 31 ; 3, 30 | 0 ; 1, 0, 37 | 40. | 41 ; 2, 33 | 0 ; 0, 58, 57 |
| 1. | 1 ; 2, 50 | 0 ; 1, 2, 50 | 30°30 | 31 ; 33, 49 | 0 ; 1, 0, 33 | 40°30 | 41 ; 32, 3 | 0 ; 0, 58, 51 |
| 1°30 | 1 ; 34, 15 | 0 ; 1, 2, 49 | 31. | 32 ; 4, 7 | 0 ; 1, 0, 28 | 41. | 42 ; 1, 30 | 0 ; 0, 58, 45 |
| 2. | 2 ; 5, 39 | 0 ; 1, 2, 49 | 31°30 | 32 ; 34, 22 | 0 ; 1, 0, 24 | 41°30 | 42 ; 30, 54 | 0 ; 0, 58, 39 |
| 2°30 | 2 ; 37, 4 | 0 ; 1, 2, 49 | 32. | 33 ; 4, 35 | 0 ; 1, 0, 19 | 42. | 43 ; 0, 15 | 0 ; 0, 58, 34 |
| 3. | 3 ; 8, 28 | 0 ; 1, 2, 48 | 32°30 | 33 ; 34, 46 | 0 ; 1, 0, 15 | 42°30 | 43 ; 29, 33 | 0 ; 0, 58, 28 |
| 3°30 | 3 ; 39, 53 | 0 ; 1, 2, 48 | 33. | 34 ; 4, 55 | 0 ; 1, 0, 10 | 43. | 43 ; 58, 49 | 0 ; 0, 58, 22 |
| 4. | 4 ; 11, 17 | 0 ; 1, 2, 47 | 33°30 | 34 ; 35, 1 | 0 ; 1, 0, 5 | 43°30 | 44 ; 28, 1 | 0 ; 0, 58, 15 |
| 4°30 | 4 ; 42, 40 | 0 ; 1, 2, 46 | 34. | 35 ; 5, 5 | 0 ; 1, 0, 0 | 44. | 44 ; 57, 10 | 0 ; 0, 58, 9 |
| 5. | 5 ; 14, 4 | 0 ; 1, 2, 46 | 34°30 | 35 ; 35, 6 | 0 ; 0, 59, 55 | 44°30 | 45 ; 26, 16 | 0 ; 0, 58, 3 |
| 5°30 | 5 ; 45, 27 | 0 ; 1, 2, 45 | | | | | | |
| 6. | 6 ; 16, 49 | 0 ; 1, 2, 44 | | | | | | |
| 6°30 | 6 ; 48, 11 | 0 ; 1, 2, 43 | | | | | | |
| 7. | 7 ; 19, 33 | 0 ; 1, 2, 42 | | | | | | |
| 7°30 | 7 ; 50, 54 | 0 ; 1, 2, 41 | | | | | | |
| 8. | 8 ; 22, 15 | 0 ; 1, 2, 40 | | | | | | |
| 8°30 | 8 ; 53, 35 | 0 ; 1, 2, 38 | | | | | | |
| 9. | 9 ; 24, 54 | 0 ; 1, 2, 37 | | | | | | |
| 9°30 | 9 ; 56, 13 | 0 ; 1, 2, 36 | | | | | | |
| 10. | 10 ; 27, 31 | 0 ; 1, 2, 34 | | | | | | |

$$R\,\mathrm{crd}\,90^\circ = \sqrt{2}R = 84.85281374$$
$$= 84 + \frac{51}{60} + \frac{10}{60^2} + \frac{8}{60^3} + \cdots$$

となる場合，84; 51, 10, 8 などとして表記する.



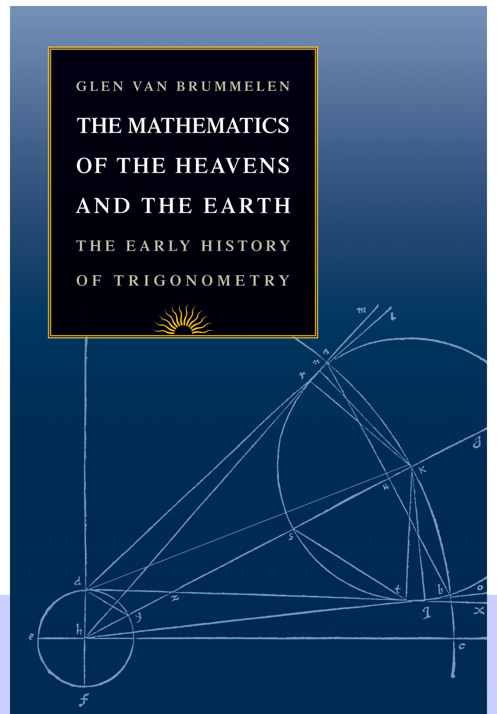
LIBER I

| Arcũ partes m̃ | Chordarum partes m̃ 2ª | trigesimarũ m̃ 2ª 3ª | Arcũ partes m̃ | Chordarũm partes m̃ 2ª | trigesimarũ m̃ 2ª 3ª |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 30 | 0 31 25 | 1 2 50 | 23 0 | 23 55 27 | 1 1 33 |
| 1 0 | 1 2 50 | 1 2 50 | 23 30 | 24 26 13 | 1 1 30 |
| 1 30 | 1 34 15 | 1 2 50 | 24 0 | 24 56 58 | 1 1 26 |
| 2 0 | 2 5 40 | 1 2 50 | 24 30 | 25 27 41 | 1 1 22 |
| 2 30 | 2 37 4 | 1 2 48 | 25 0 | 25 58 22 | 1 1 19 |
| 3 0 | 3 8 28 | 1 2 48 | 25 30 | 26 29 1 | 1 1 15 |
| 3 30 | 3 39 52 | 1 2 48 | 26 0 | 26 59 38 | 1 1 11 |
| 4 0 | 4 11 16 | 1 2 47 | 26 30 | 27 30 14 | 1 1 8 |
| 4 30 | 4 42 40 | 1 2 47 | 27 0 | 28 0 48 | 1 1 4 |
| 5 0 | 5 14 4 | 1 2 46 | 27 30 | 28 31 20 | 1 1 0 |
| 5 30 | 5 45 27 | 1 2 45 | 28 0 | 29 1 50 | 1 0 56 |
| 6 0 | 6 16 49 | 1 2 44 | 28 30 | 29 32 18 | 1 0 52 |
| 6 30 | 6 48 11 | 1 2 43 | 29 0 | 30 2 44 | 1 0 48 |
| 7 0 | 7 19 33 | 1 2 42 | 29 30 | 30 33 8 | 1 0 44 |
| 7 30 | 7 50 54 | 1 2 41 | 30 0 | 31 3 30 | 1 0 40 |
| 8 0 | 8 22 15 | 1 2 40 | 30 30 | 31 33 50 | 1 0 35 |
| 8 30 | 8 53 35 | 1 2 39 | 31 0 | 32 4 8 | 1 0 31 |
| 9 0 | 9 24 54 | 1 2 38 | 31 30 | 32 34 22 | 1 0 27 |
| 9 30 | 9 56 13 | 1 2 37 | 32 0 | 33 4 35 | 1 0 22 |
| 10 0 | 10 27 32 | 1 2 35 | 32 30 | 33 34 46 | 1 0 17 |
| 10 30 | 10 58 49 | 1 2 33 | 33 0 | 34 4 55 | 1 0 12 |
| 11 0 | 11 30 5 | 1 2 32 | 33 30 | 34 35 1 | 1 0 8 |
| 11 30 | 12 1 21 | 1 2 30 | 34 0 | 35 5 5 | 1 0 3 |
| 12 0 | 12 32 36 | 1 2 28 | 34 30 | 35 35 6 | 0 59 57 |
| 12 30 | 13 3 50 | 1 2 27 | 35 0 | 36 5 5 | 0 59 52 |
| 13 0 | 13 35 4 | 1 2 25 | 35 30 | 36 35 1 | 0 59 48 |
| 13 30 | 14 6 16 | 1 2 23 | 36 0 | 37 4 55 | 0 59 43 |
| 14 0 | 14 37 27 | 1 2 21 | 36 30 | 37 34 47 | 0 59 38 |
| 14 30 | 15 8 38 | 1 2 19 | 37 0 | 38 4 36 | 0 59 32 |
| 15 0 | 15 39 47 | 1 2 17 | 37 30 | 38 34 22 | 0 59 27 |
| 15 30 | 16 10 56 | 1 2 15 | 38 0 | 39 4 5 | 0 59 22 |
| 16 0 | 16 42 3 | 1 2 13 | 38 30 | 39 33 46 | 0 59 16 |
| 16 30 | 17 13 9 | 1 2 10 | 39 0 | 40 3 25 | 0 59 11 |
| 17 0 | 17 44 14 | 1 2 7 | 39 30 | 40 33 0 | 0 59 5 |
| 17 30 | 18 15 17 | 1 2 5 | 40 0 | 41 2 33 | 0 59 0 |
| 18 0 | 18 46 19 | 1 2 2 | 40 30 | 41 32 3 | 0 58 54 |
| 18 30 | 19 17 21 | 1 2 0 | 41 0 | 42 1 30 | 0 58 48 |
| 19 0 | 19 48 21 | 1 1 57 | 41 30 | 42 30 54 | 0 58 42 |
| 19 30 | 20 19 19 | 1 1 54 | 42 0 | 43 0 15 | 0 58 36 |
| 20 0 | 20 50 16 | 1 1 51 | 42 30 | 43 29 33 | 0 58 31 |
| 20 30 | 21 21 12 | 1 1 48 | 43 0 | 43 48 49 | 0 58 25 |
| 21 0 | 21 52 6 | 1 1 45 | 43 30 | 44 28 1 | 0 58 18 |
| 21 30 | 22 22 58 | 1 1 42 | 44 0 | 44 57 10 | 0 58 12 |
| 22 0 | 22 53 49 | 1 1 39 | 44 30 | 45 26 16 | 0 58 6 |
| 22 30 | 23 24 39 | 1 1 36 | 45 0 | 45 55 19 | 0 58 0 |

**Figure 2.24** The first page of the chord table in Ptolemy's *Almagest*, George of Trebizond's edition (1528) (courtesy of the Burndy Library)

弦　の　表

| 弧 | 弦 | 差の 1/30 | 弧 | 弦 | 差の 1/30 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0° 30′ | 0p 31′ 25″ | 0p 1′ 2″ 50‴ | 23° 0′ | 23p 55′ 27″ | 0p 1′ 1″ 33‴ |
| 1 0 | 1 2 50 | 0 1 2 50 | 23 30 | 24 26 13 | 0 1 1 30 |
| 1 30 | 1 34 15 | 0 1 2 50 | 24 0 | 24 56 58 | 0 1 1 26 |
| 2 0 | 2 5 40 | 0 1 2 50 | 24 30 | 25 27 41 | 0 1 1 22 |
| 2 30 | 2 37 4 | 0 1 2 48 | 25 0 | 25 58 22 | 0 1 1 19 |
| 3 0 | 3 8 28 | 0 1 2 48 | 25 30 | 26 29 1 | 0 1 1 15 |
| 3 30 | 3 39 52 | 0 1 2 48 | 26 0 | 26 59 38 | 0 1 1 11 |
| 4 0 | 4 11 16 | 0 1 2 47 | 26 30 | 27 30 14 | 0 1 1 8 |
| 4 30 | 4 42 40 | 0 1 2 47 | 27 0 | 28 0 48 | 0 1 1 4 |
| 5 0 | 5 14 4 | 0 1 2 46 | 27 30 | 28 31 20 | 0 1 1 0 |
| 5 30 | 5 45 27 | 0 1 2 45 | 28 0 | 29 1 50 | 0 1 0 56 |
| 6 0 | 6 16 49 | 0 1 2 44 | 28 30 | 29 32 18 | 0 1 0 52 |
| 6 30 | 6 48 11 | 0 1 2 43 | 29 0 | 30 2 44 | 0 1 0 48 |
| 7 0 | 7 19 33 | 0 1 2 42 | 29 30 | 30 33 8 | 0 1 0 44 |
| 7 30 | 7 50 54 | 0 1 2 41 | 30 0 | 31 3 30 | 0 1 0 40 |
| 8 0 | 8 22 15 | 0 1 2 40 | 30 30 | 31 33 50 | 0 1 0 35 |
| 8 30 | 8 53 35 | 0 1 2 39 | 31 0 | 32 4 8 | 0 1 0 31 |
| 9 0 | 9 24 51 | 0 1 2 38 | 31 30 | 32 34 22 | 0 1 0 27 |
| 9 30 | 9 56 13 | 0 1 2 37 | 32 0 | 33 4 35 | 0 1 0 22 |
| 10 0 | 10 27 32 | 0 1 2 35 | 32 30 | 33 34 46 | 0 1 0 17 |
| 10 30 | 10 58 49 | 0 1 2 33 | 33 0 | 34 4 55 | 0 1 0 12 |
| 11 0 | 11 30 5 | 0 1 2 32 | 33 30 | 34 35 1 | 0 1 0 8 |
| 11 30 | 12 1 21 | 0 1 2 30 | 34 0 | 35 5 5 | 0 1 0 3 |
| 12 0 | 12 32 36 | 0 1 2 28 | 34 30 | 35 35 6 | 0 0 59 57 |
| 12 30 | 13 3 50 | 0 1 2 27 | 35 0 | 36 5 5 | 0 0 59 52 |
| 13 0 | 13 35 4 | 0 1 2 25 | 35 30 | 36 35 1 | 0 0 59 48 |
| 13 30 | 14 6 16 | 0 1 2 23 | 36 0 | 37 4 55 | 0 0 59 43 |
| 14 0 | 14 37 27 | 0 1 2 21 | 36 30 | 37 34 47 | 0 0 59 38 |
| 14 30 | 15 8 38 | 0 1 2 19 | 37 0 | 38 4 36 | 0 0 59 32 |
| 15 0 | 15 39 47 | 0 1 2 17 | 37 30 | 38 34 22 | 0 0 59 27 |
| 15 30 | 16 10 56 | 0 1 2 15 | 38 0 | 39 4 5 | 0 0 59 22 |
| 16 0 | 16 42 3 | 0 1 2 13 | 38 30 | 39 33 46 | 0 0 59 16 |
| 16 30 | 17 13 9 | 0 1 2 10 | 39 0 | 40 3 25 | 0 0 59 11 |
| 17 0 | 17 44 14 | 0 1 2 7 | 39 30 | 40 33 0 | 0 0 59 5 |
| 17 30 | 18 15 17 | 0 1 2 5 | 40 0 | 41 2 33 | 0 0 59 0 |
| 18 0 | 18 46 19 | 0 1 2 2 | 40 30 | 41 32 3 | 0 0 58 54 |
| 18 30 | 19 17 21 | 0 1 2 0 | 41 0 | 42 1 30 | 0 0 58 48 |
| 19 0 | 19 48 21 | 0 1 1 57 | 41 30 | 42 30 54 | 0 0 58 42 |
| 19 30 | 20 19 19 | 0 1 1 54 | 42 0 | 43 0 15 | 0 0 58 36 |
| 20 0 | 20 50 16 | 0 1 1 51 | 42 30 | 43 29 33 | 0 0 58 31 |
| 20 30 | 21 21 12 | 0 1 1 48 | 43 0 | 43 58 49 | 0 0 58 25 |
| 21 0 | 21 52 6 | 0 1 1 45 | 43 30 | 44 28 1 | 0 0 58 18 |
| 21 30 | 22 22 58 | 0 1 1 42 | 44 0 | 44 57 10 | 0 0 58 12 |
| 22 0 | 22 53 49 | 0 1 1 39 | 44 30 | 45 26 16 | 0 0 58 6 |
| 22 30 | 23 24 39 | 0 1 1 36 | 45 0 | 45 55 19 | 0 0 58 0 |



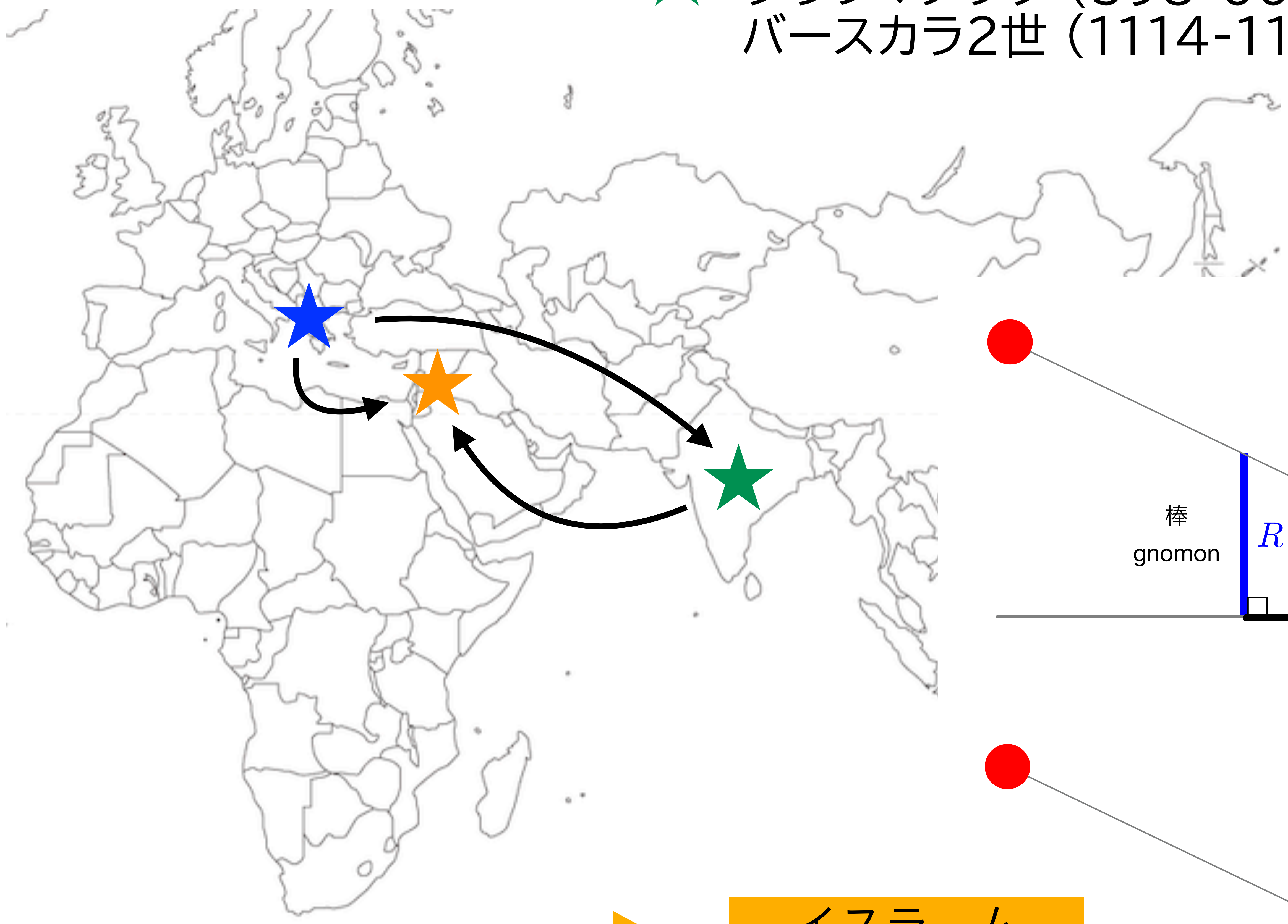

Glen van Brummelen, The Mathematics of the Heavens and the Earth (Princeton Univ. Press, 2009).

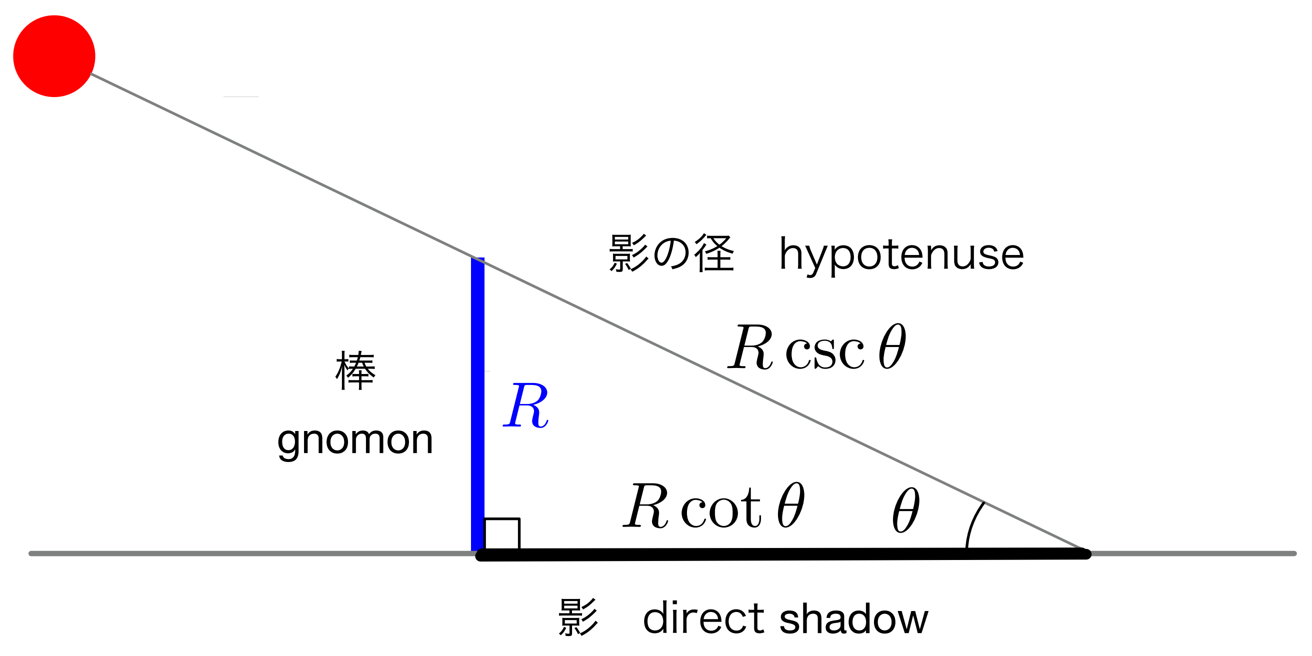
プトレマイオス著，薮内清訳『アルマゲスト』（恒星社，1993）

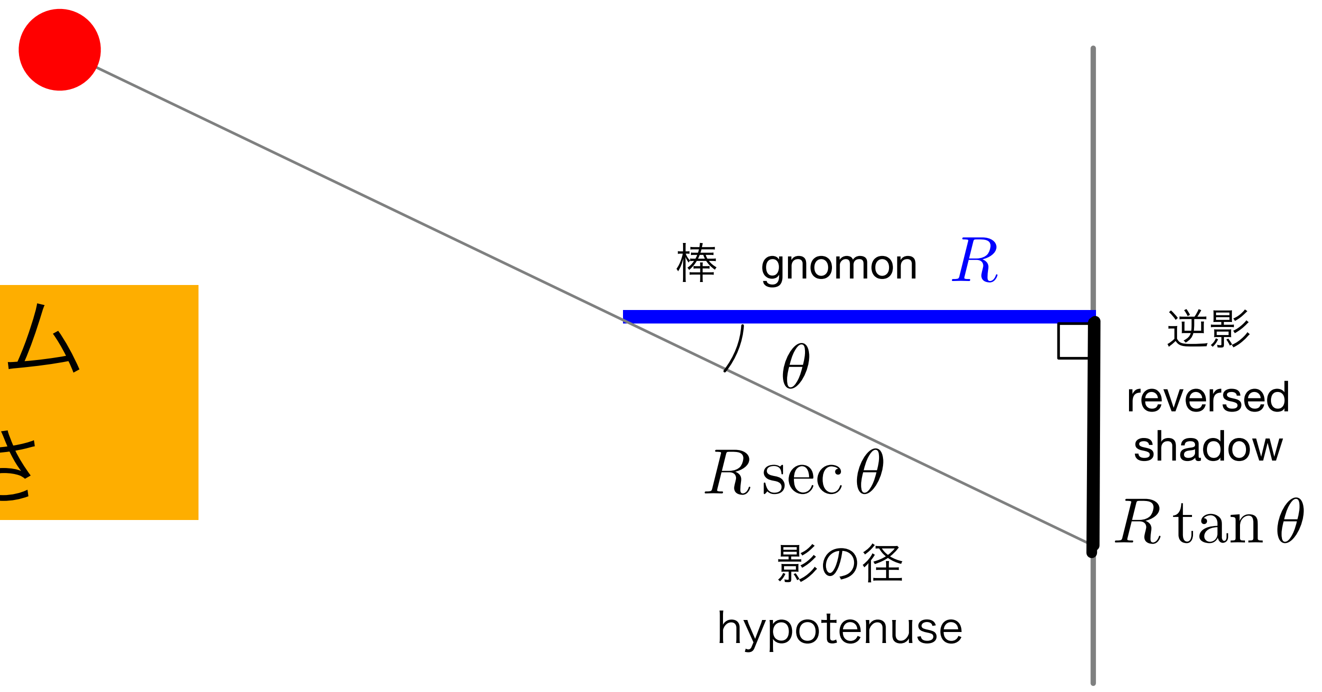
# 「三角法は, ギリシャで生まれ, インドで育ち, アラビアで発展」

★ ヒッパルコス(BC190頃-BC120頃)
プトレマイオス(83頃-168頃)『アルマゲスト』(2c)

★ ヴァラーハミヒラ (505-587)
ブラフマグプタ (598-665)
バースカラ2世 (1114-1185)

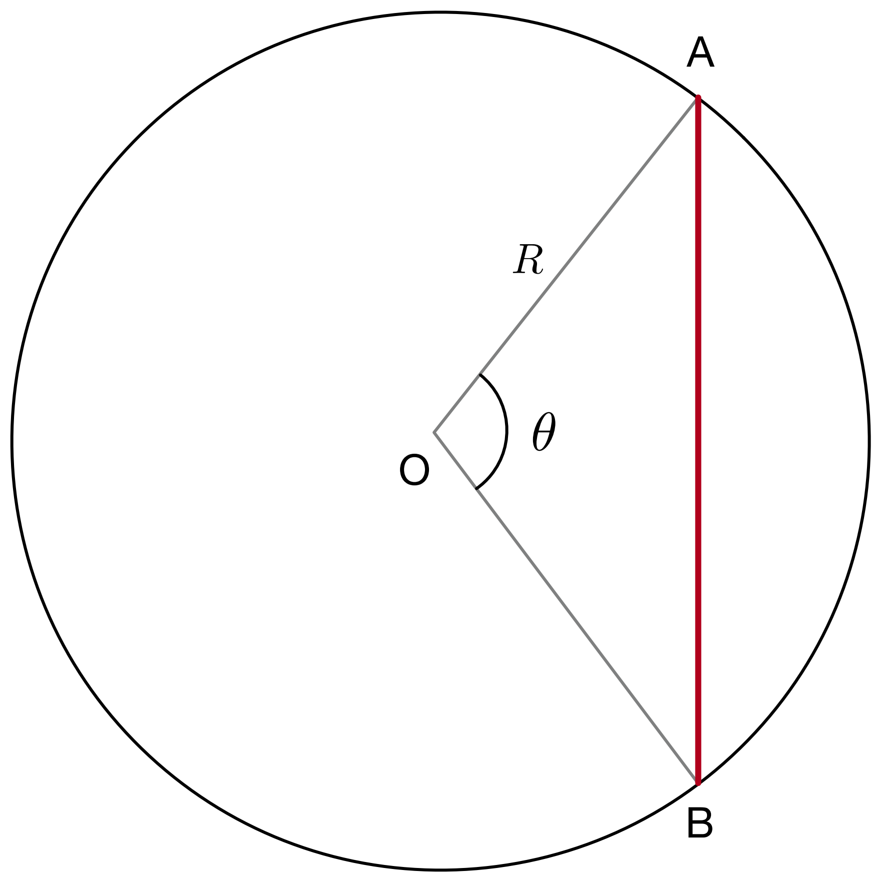





イスラーム
影の長さ

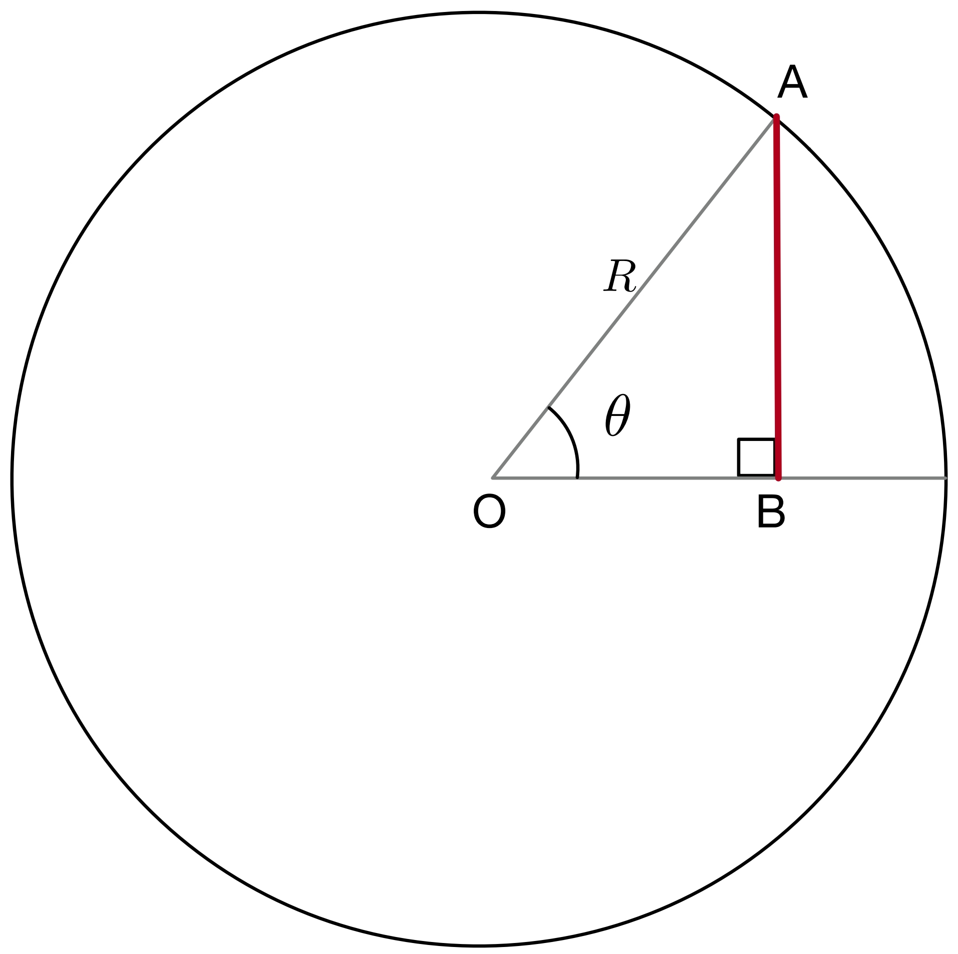
9c—




弦 chord

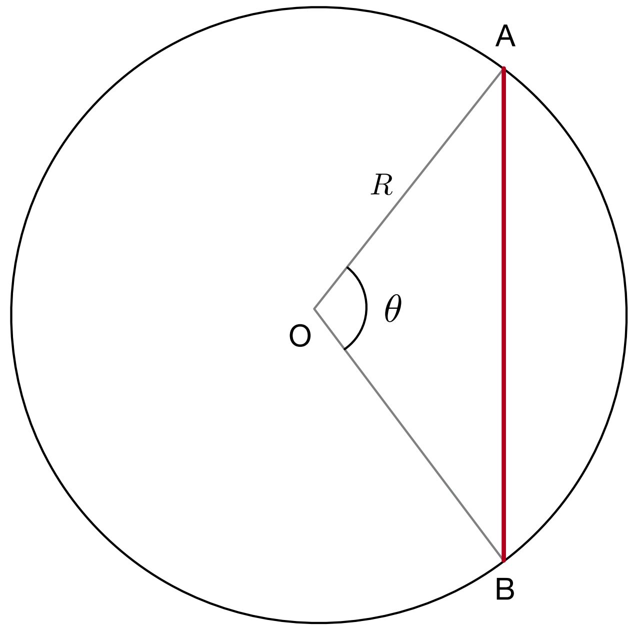
5c　インドで長さ半分の正弦に

12c　余弦, 正矢, 余矢



# インドで正弦が登場(5cにはあった)

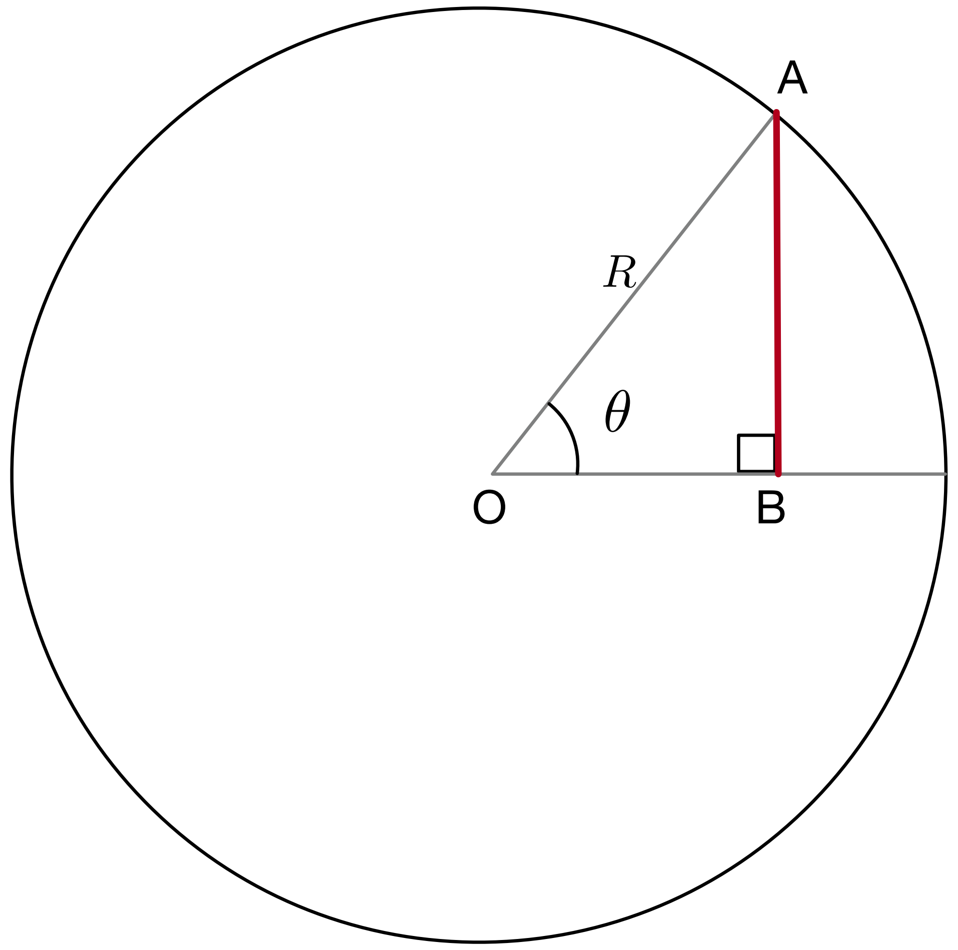
# 7c 正矢が登場




弦 chord

5c インドで長さ半分の正弦に

12c 余弦, 正矢, 余矢




アールヤバタ (Āryabhata, 476-) は，著書『アールヤバティーヤ (Āryabhatiya)』にて，半径 $R = 3438$ とした正弦表を示している．ヒッパルコスの計算方法と同様で，$R\sin 90^\circ = R$, $R\sin 30^\circ = R/2$ および余角の関係式

$$R\sin(90^\circ - \theta) = \sqrt{R^2 - (R\sin\theta)^2} \qquad (11)$$

と半角公式

$$R\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\left(\frac{R - R\sin(90^\circ - \theta)}{2}\right)^2 + \left(\frac{R\sin\theta}{2}\right)^2} \qquad (12)$$

を用いることで 24 の角度について数表を作成した（図

ブラフマグプタ (Brahmagupta, 598-665) は『ブラーフマスプタ・シッダーンタ (Brāhmasphuta-siddhānta)』にて，「正矢」(versed sine, Utkramajyā)

$$R \operatorname{vers} \theta = R - R\sin(90^\circ - \theta) \qquad (13)$$

も定義した．正矢を用いると計算式が簡単になる．例えば，半角公式 (12) は

$$R\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{(R\sin\theta)^2 + (R\operatorname{vers}\theta)^2}{4}} \qquad (14)$$

# 12c 余弦, 余矢が登場

12 世紀になると，バースカラ 2 世 (Bhāskara II, 1114-1185) が「角度」を用いて正弦・正矢を定義しなおし，同時に「余弦」(cosine, kotijyā),「余矢」(coversed sine, koty-utkramajyā) を新たに導入した．図 3.4 の記号を用いると，

| | | |
|---|---|---|
| 正弦 | $\mathrm{AB} = R\sin\theta,$ | (15) |
| 余弦 | $\mathrm{AE} = \mathrm{BO} = R\cos\theta = R\sin(90^\circ - \theta),$ | (16) |
| 正矢 | $\mathrm{BC} = R \operatorname{vers} \theta = R - R\cos\theta,$ | (17) |
| 余矢 | $\mathrm{DE} = R \operatorname{covers} \theta = R - R\sin\theta$ | (18) |

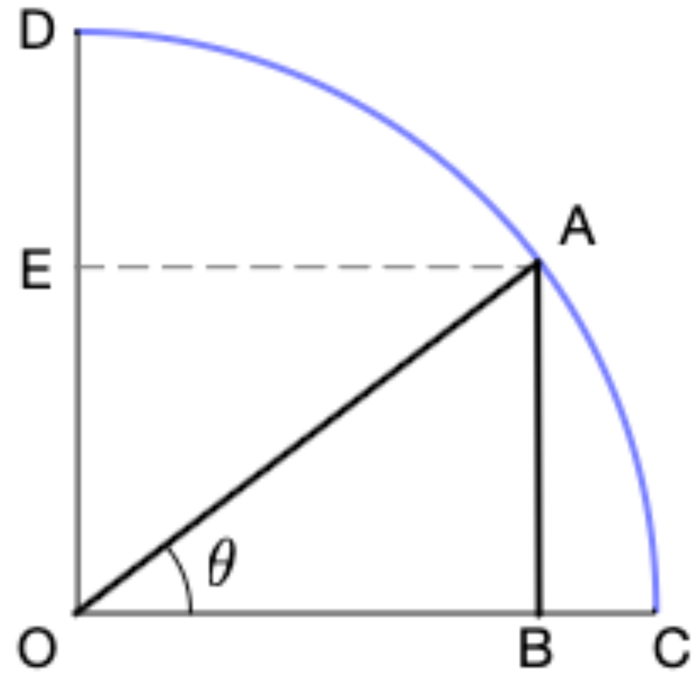
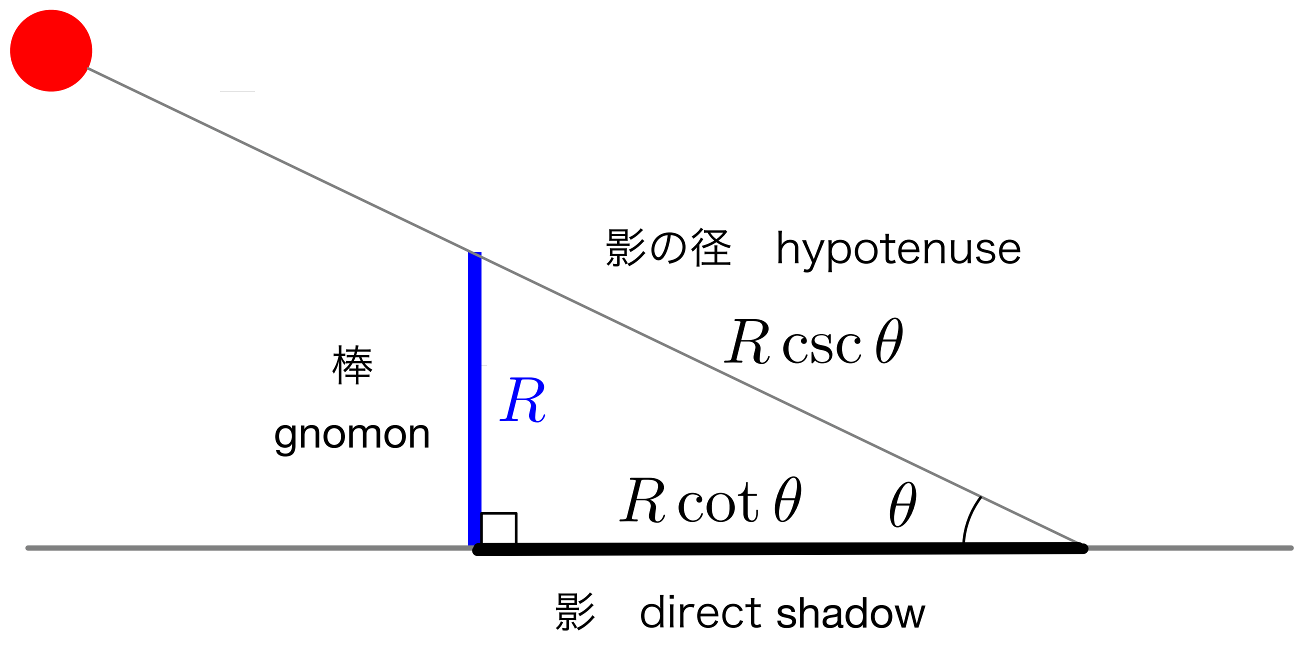
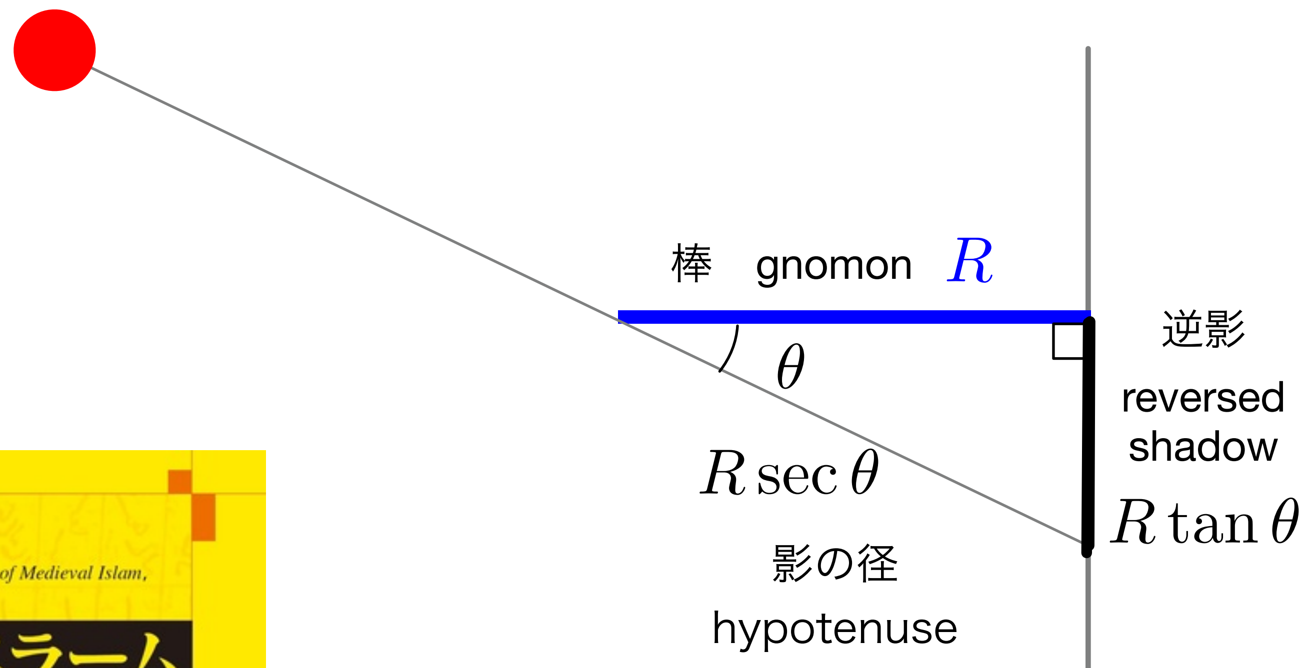



**図 3.4:** バースカラ 2 世による 4 つの三角関数の定義

# イスラームで三角法が発展した　理由の1：日時計の影の長さ

## 影の長さ・影の径から tan, cot, sec, csc



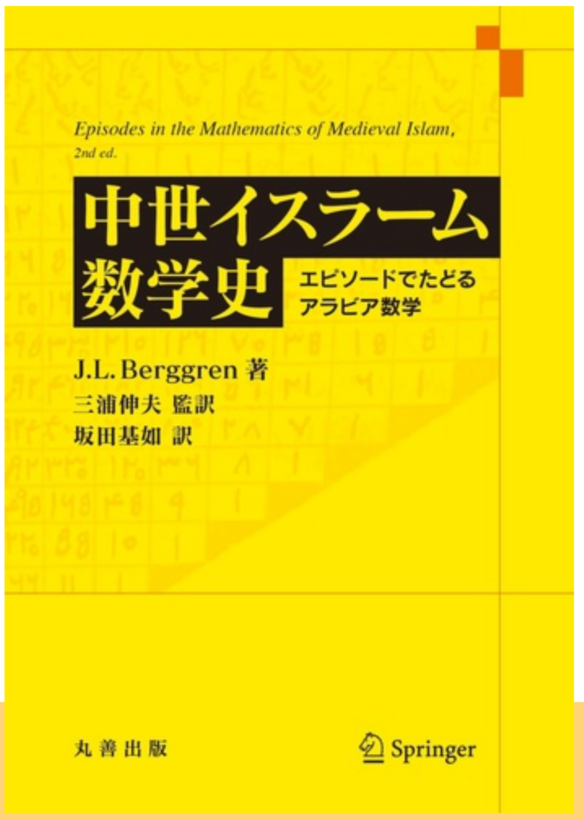
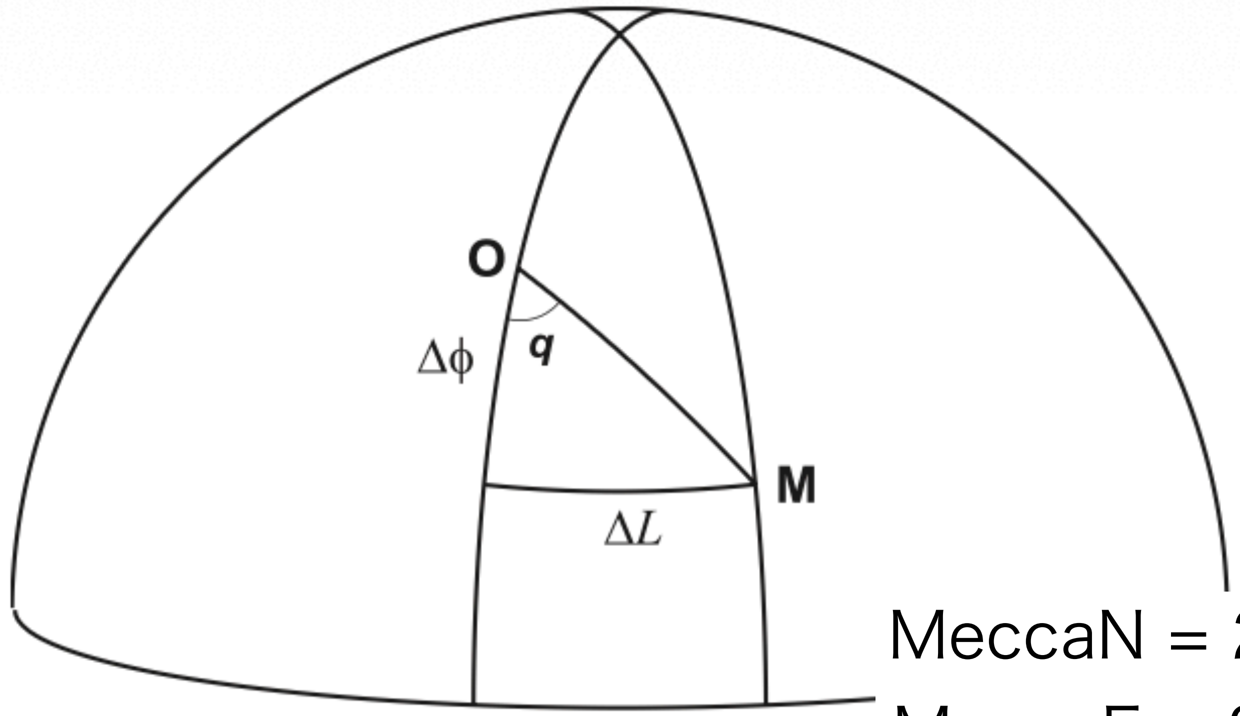




**表 B.3:** 三角法の発展に関係したイスラームの数学者．[15, 18] を参考に作成．大文字で始まる三角関数は半径を乗じた値（Sin $\theta$ は $60\sin\theta$ など）．

| 名前 | | 主な貢献・特徴 | 三角関数表 |
|---|---|---|---|
| アル＝フワーリズミー al-Khwārizmī | 780-850 | 代数学の体系化，地理学的座標の改訂．アルゴリズムの語源．日時計，観象儀（アストロラーベ）なども作成したとされる．(フワーリズミーは「ホラズム出身の人」の呼称) | Sin $\theta$ (1° ごと, 3 桁), $12\cot\theta$ (1° ごと，少数 1 桁) |
| ハバシュ・ハーシブ Ḥabash al-Ḥāsib | ? -864 頃 | 太陽・月の距離と大きさに関してアラビア語で初めて言及．弦ではなく正弦を使うインド数学を用いるが，インド数学にはない球面三角表や 60 進法を用いるプトレマイオス天文学を中心にする． | Sin $\theta$ (15′ ごと，4 桁)，Tan $\theta$(30′ ごと，小数 2 桁), Cot $\theta$, Vers $\theta$, Csc $\theta$ (1° ごと，3 桁) |
| アル・バッターニー Al-Battānī | 853–929 | 三角法・球面三角法の発展．私立天文台を設けて観測し，489 個の恒星表作成． | Sin $\theta$ (30′ ごと，3 桁)，$12\cot\theta$ (1° ごと，小数 1 桁) |
| アブル・ワファー・ブーズジャーニー Abū al-Wafā' al-Būzjānī | 940-998 | 三角関数の概念と計算法，円の分割，負数の研究，象限儀の考案．ギリシア科学文献の翻訳・注釈を行い，特にプトレマイオスの『アルマゲスト』の翻訳で名を残す．$R=1$ で三角関数定義．正弦に対する加法定理． | Sin $\theta$ (1′ ごと，3 桁) |
| クーシュヤール・イブン・ラッバーン Kūshyār ibn Labbān | 971–1029 | 『天体の距離と大きさに関する論文』 | Sin $\theta$ (1′ ごと，3 桁)，Tan $\theta$ (1° ごと，3 桁)，$7\cot\theta$, Vers $\theta$ (1° ごと，3 桁) |
| アル＝ビールーニー・アル＝フワーリズミー al-Bīrūnī al-Khwārizmī | 973-1048 | 数学，測地学，天文学に多くの業績．歴史書『過去の足跡』，地理書『インド誌』，精密科学書『占星術要約』，百科全書『マスウード宝典』，地球の計測．『天文表』に正矢，60 進法の採用 | Sin $\theta$ (10′ ごと，4 桁，表差 2 種)，Tan $\theta$ (1° ごと，5 桁，表差 2 種). |
| ナスィールッディーン・トゥースィー Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī | 1201-1274 | 神学者，哲学者，数学者，天文学者．非ユークリッド幾何学の基礎，三角法の独立．正弦定理．(トゥースィーは「トゥース生まれの人」の呼称) | Sin $\theta$, Vers $\theta$, Tan $\theta$ (1′ ごと，3 桁) |
| ウルグ・ベク Uluġ Beg | 1394–1449 | サマルカンドに天文台を設立，1,018 の恒星表作成． | Sin $\theta$, Tan $\theta$ (1′ ごと，5 桁) |

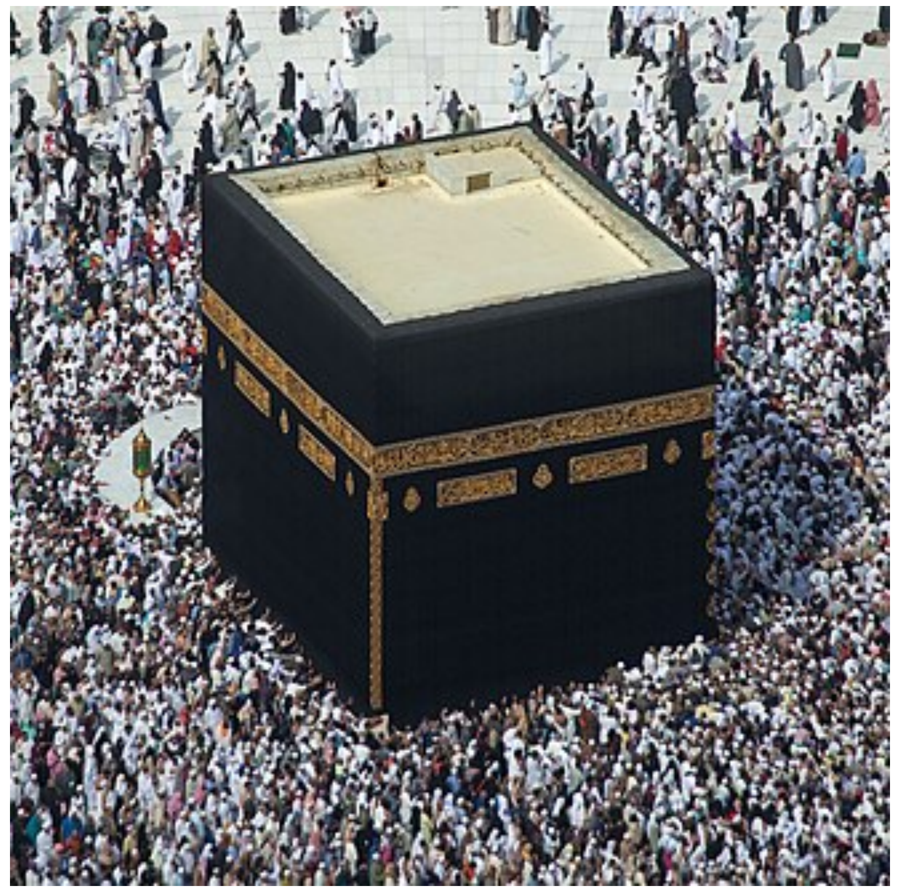
# イスラームで三角法が発展した　理由の2：Qibla（キブラ）
# ＝メッカにあるカアバ神殿の方角

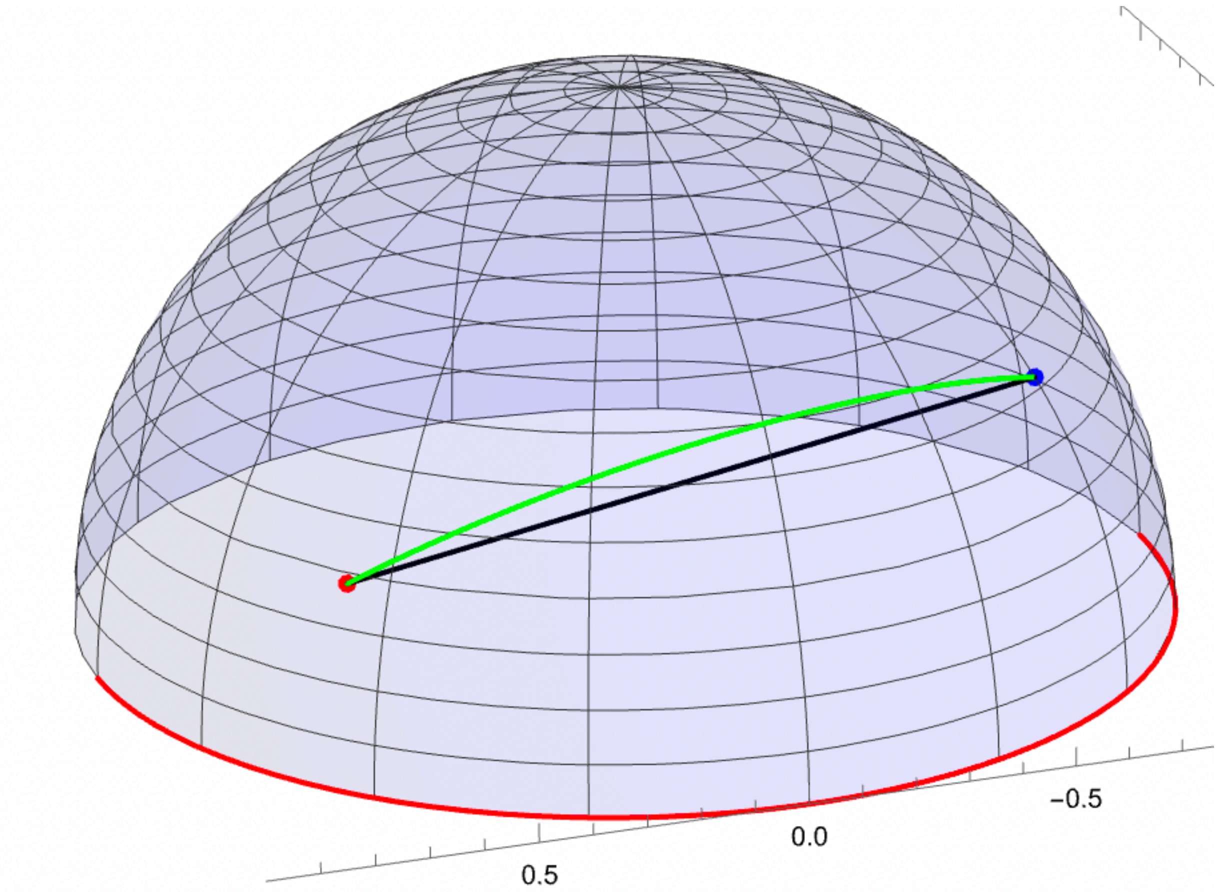
緯度差, 経度差を既知として, どちらを向けばよいか？





MeccaN = 21.4225 Degree;
MeccaE = 39.8236 Degree;





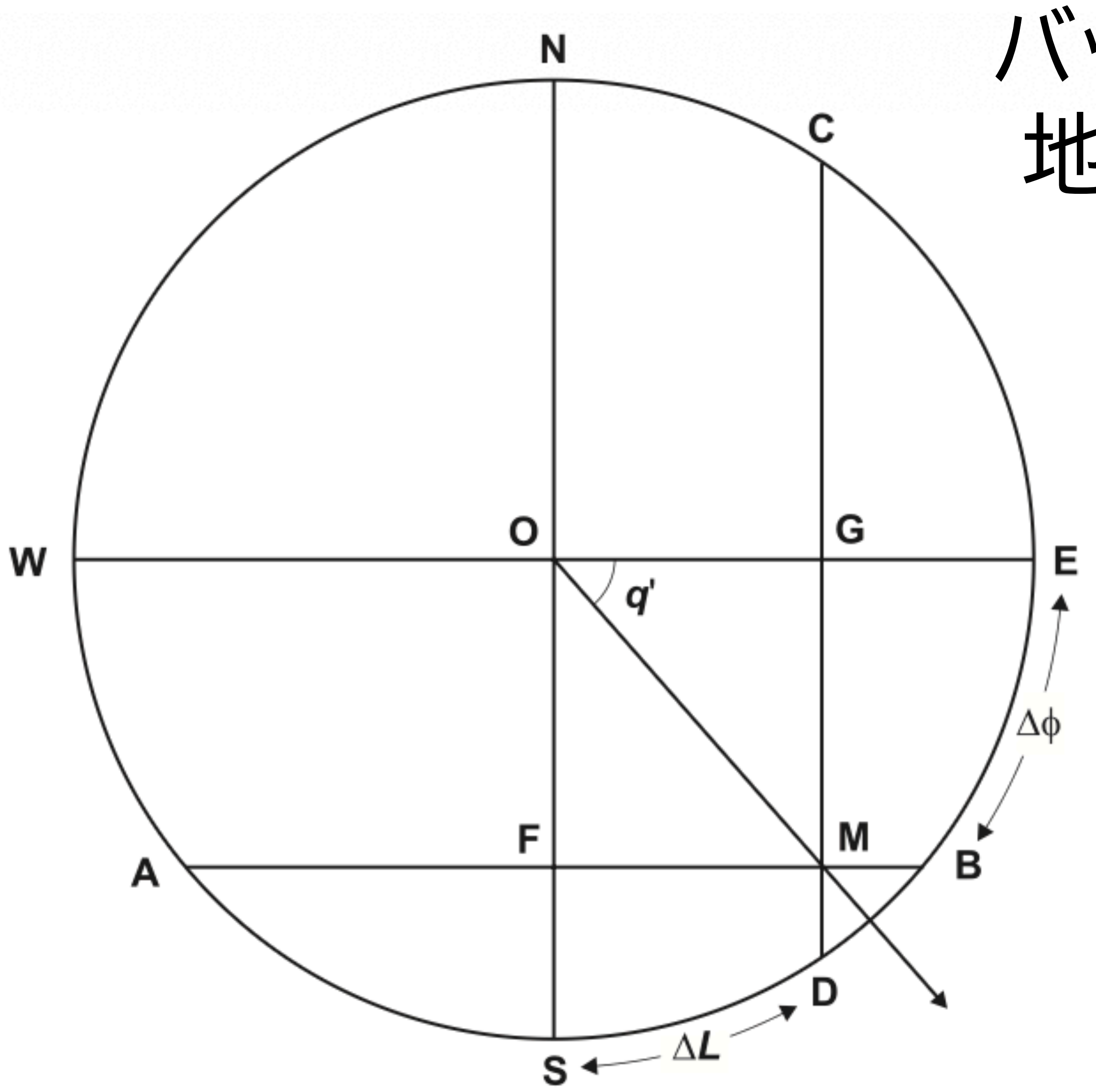




**Figure 4.33**
Al-Battānī's approximate solution to the *qibla*

バッターニー(850-909)
地表面での方向を考える

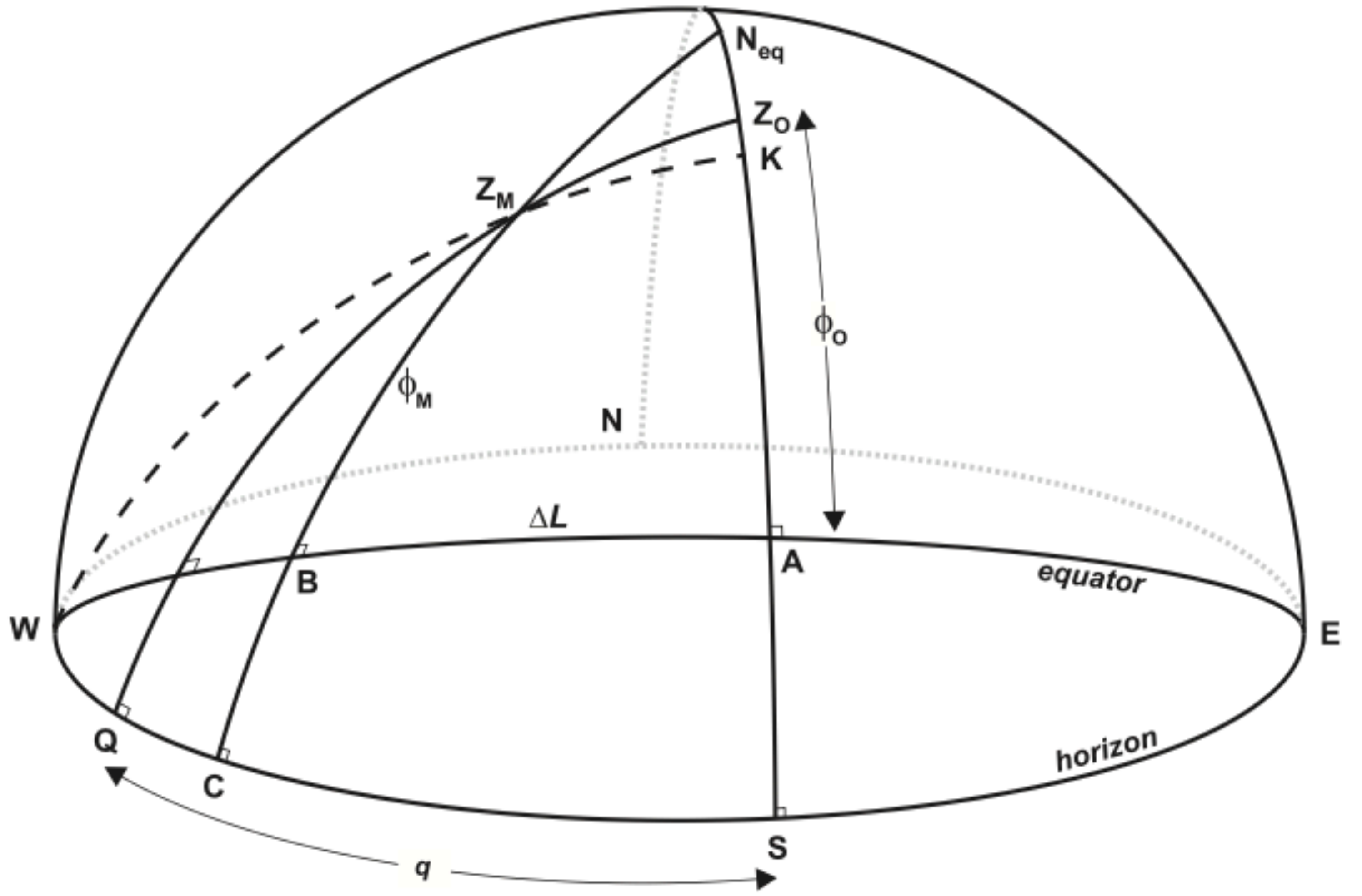



**Figure 4.34**
Al-Nayrīzī's *qibla* solution, and the method of the *zījes*

ナイリージー(875-940)
天頂方向の違いを考える

Brummelen『The Math. of the Heavens and the Earth』(Princeton, 2009)

# 12c ルネサンス　イスラム文化がヨーロッパに伝わる

ヒッパルコス(BC190頃-BC120頃)
プトレマイオス(83頃-168頃)『アルマゲスト』(2c)

ヴァラーハミヒラ (505-587)
ブラフマグプタ (598-665)
バースカラ2世 (1114-1185)

ハバシュ ( ? -864頃)
アル=フワーリズミー (780-850)
アル・バッターニー (853-929)
アブル・ワファー (940-998)
アル=ビールーニー (973--1048)
トゥースィー (1201-1274)

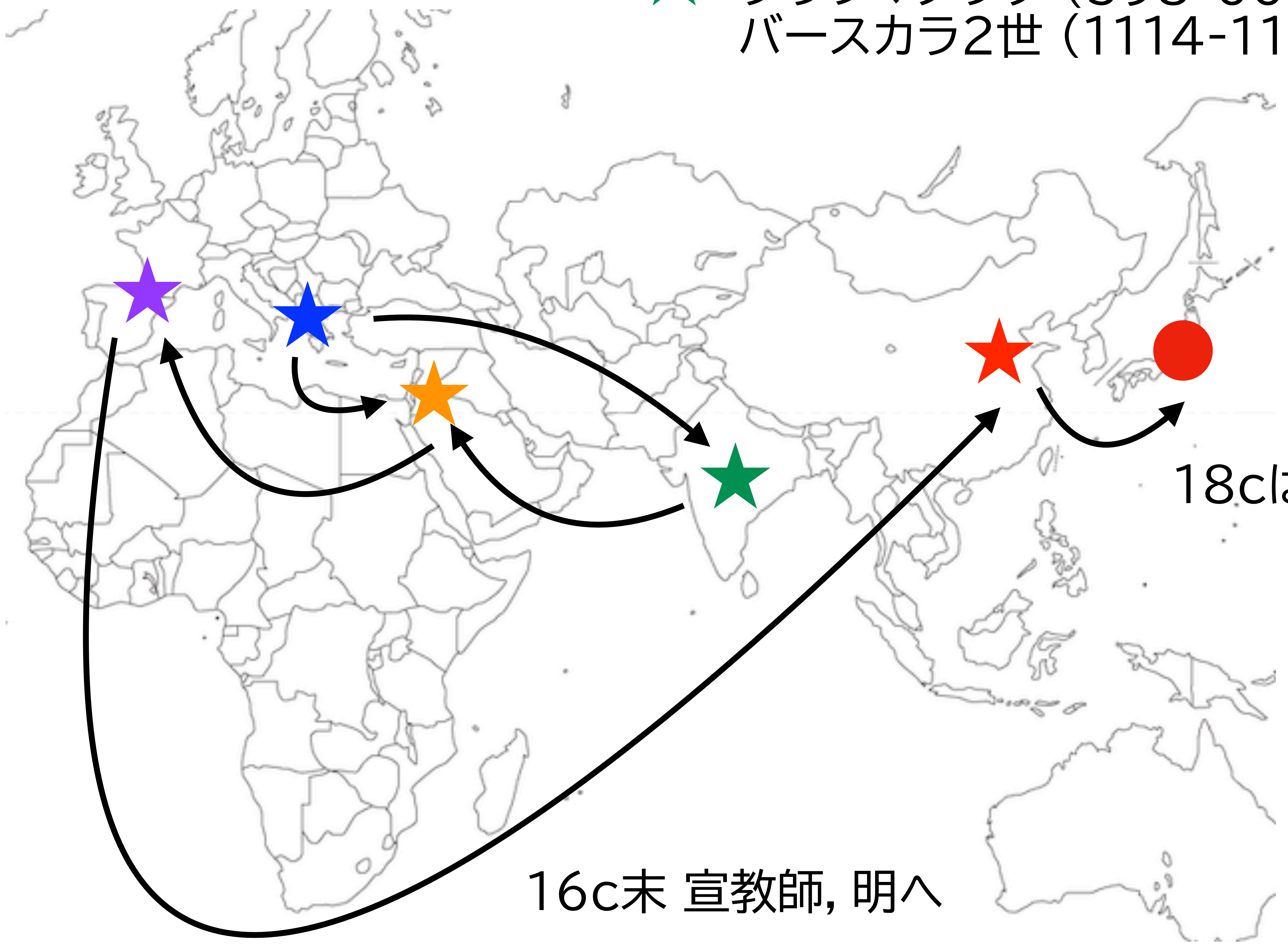
レギオモンタヌス (1436-1476)
レティクス (1514-1574)
ピティスクス (1561-1613)

# 16c末 イエズス会宣教師　明へ　　ヨーロッパ科学を伝える

ヒッパルコス（BC190頃-BC120頃）
プトレマイオス（83頃-168頃）『アルマゲスト』（2c）

ヴァラーハミヒラ（505-587）
ブラフマグプタ（598-665）
バースカラ2世（1114-1185）

ハバシュ（？ -864頃）
アル＝フワーリズミー（780-850）
アル・バッターニー（853-929）
アブル・ワファー（940-998）
アル＝ビールーニー（973--1048）
トゥースィー（1201-1274）




レギオモンタヌス（1436-1476）
レティクス（1514-1574）
ピティスクス（1561-1613）

アダム・シャール
徐光啓『崇禎暦書』（1634）
梅文鼎『暦算全書』（1723）

中根元圭『八線表算法解義』(1727頃)
建部賢弘『算暦雑考』(1722?)

# 八線表(三角関数表)に関する和算の文献

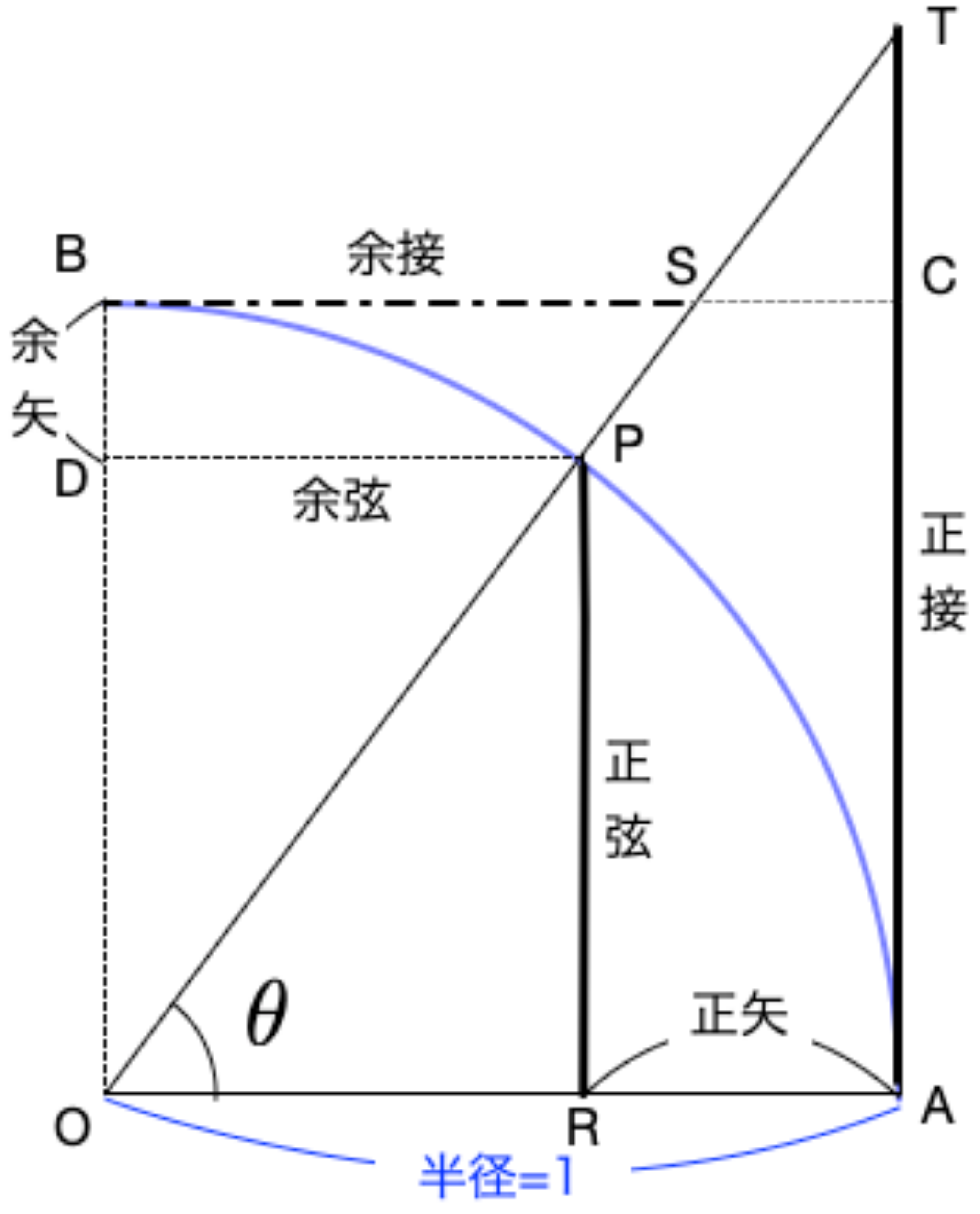
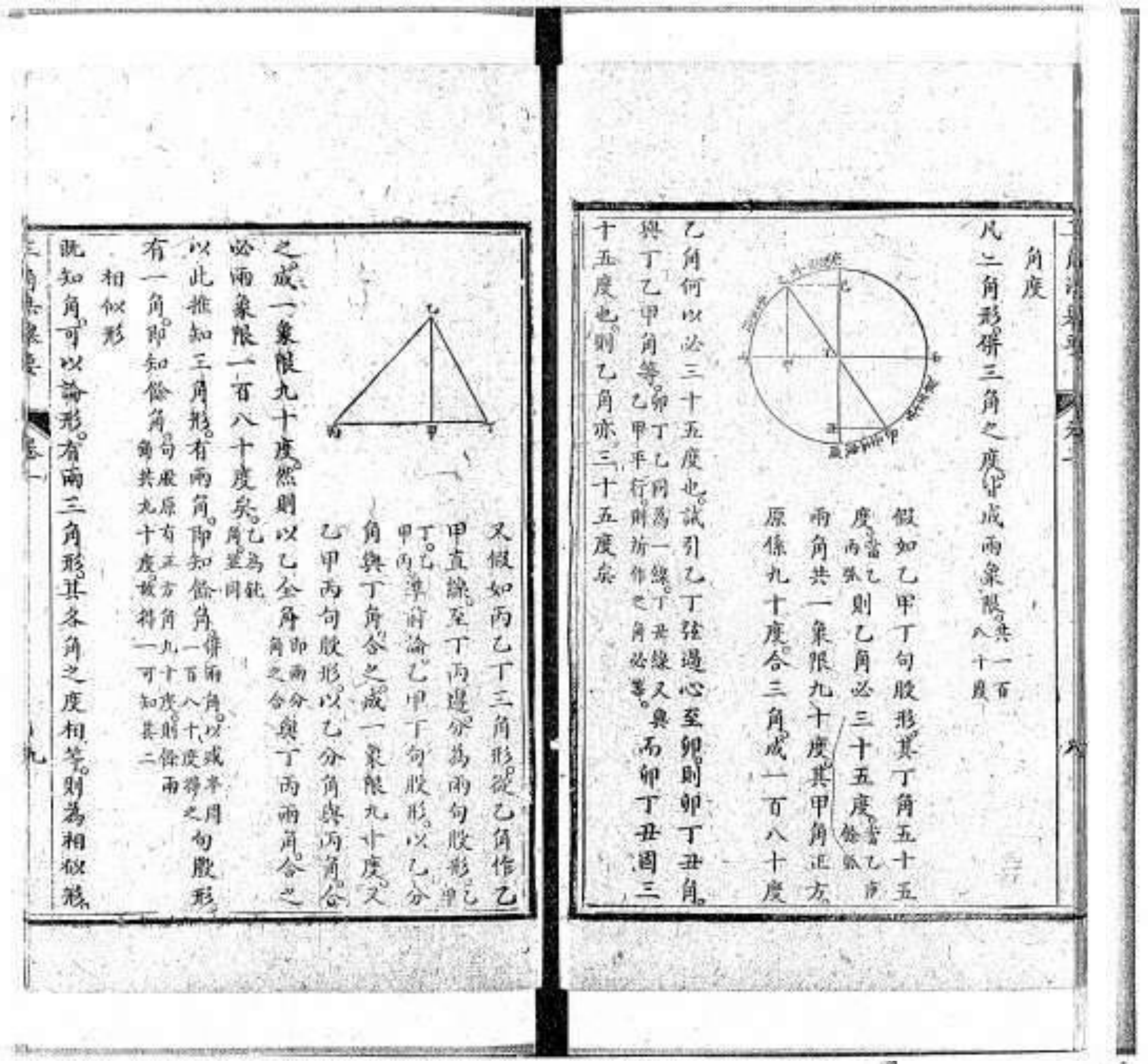


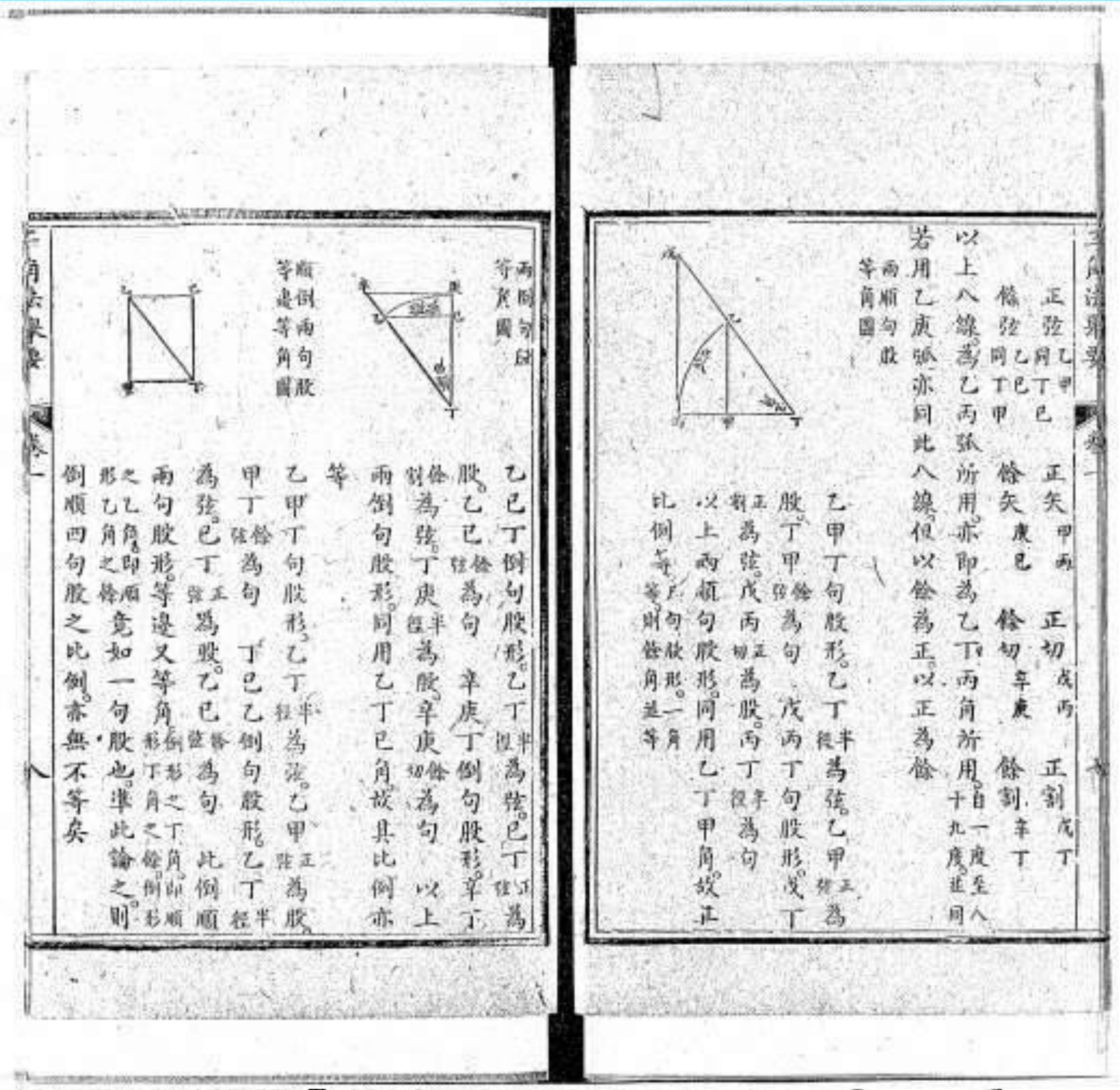

**表 1:** 和算における三角関数表（数学史事典 [1]「数表：和算」の項,『和算史年表』[2] から作成）

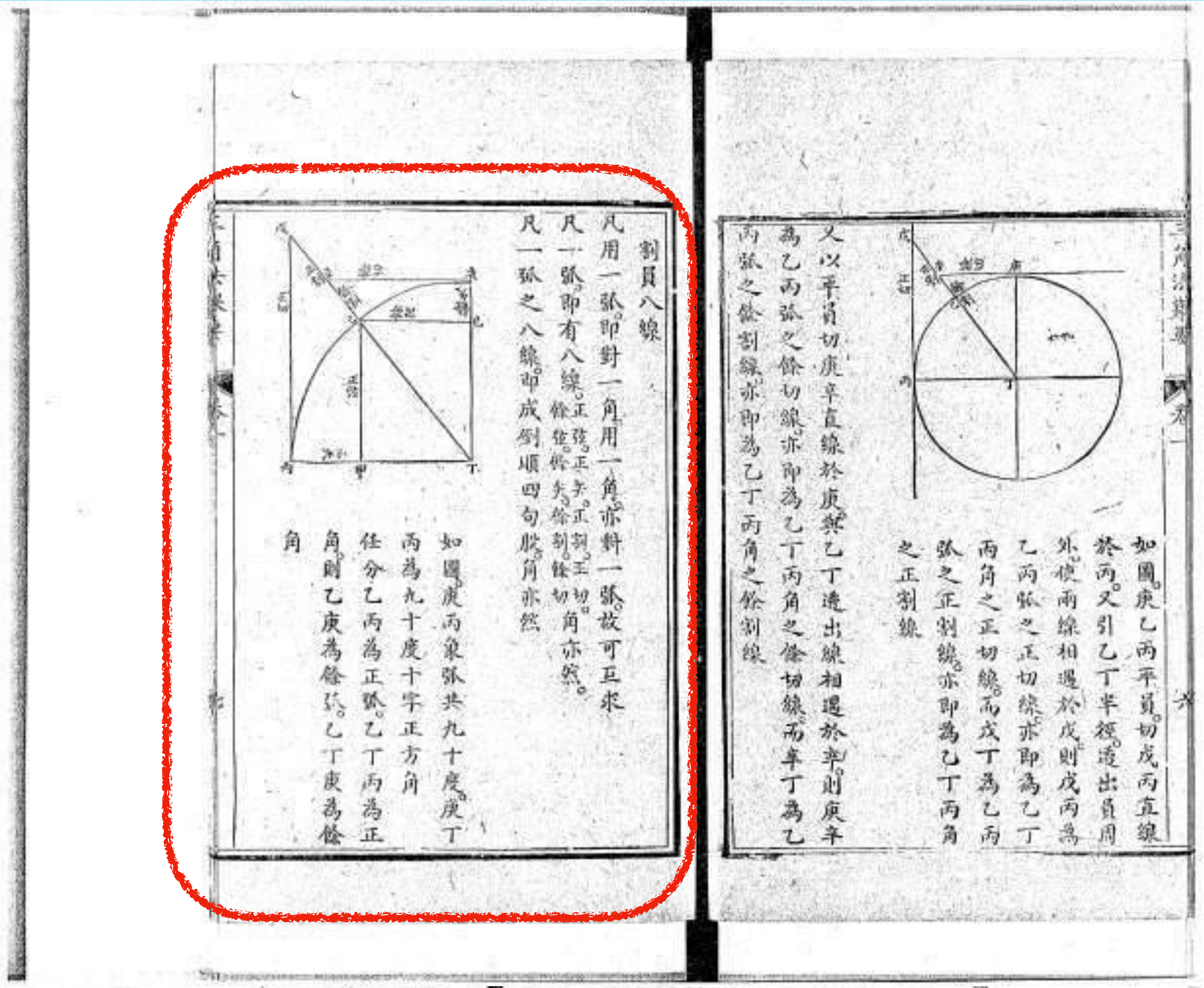
| 中国，オランダ | 日本 | |
|---|---|---|
| 梅文鼎『暦算全書』(1723)<br>西洋の天文数学書，八線表は含まず<br>徐光啓『崇禎暦書』(1634)<br>西洋の天文学書，八線表あり | ⇒1726 年輸入される 中根元圭が訓点を付け，建部賢弘が序文を書き 1733 年に吉宗に<br>⇒ 1727 年輸入される 割円八線表が渡来<br>中根元圭『八線表算法解義』(1727 頃) | |
| | 戸板保佑『関算四伝書前伝』(-1780) 183，184<br>建部賢弘『算暦雑考』(年代不明)　日本初の三角関数表<br>松永良弼(よしすけ)『割円十分標』(1736)<br>安倍泰邦『(宝暦) 暦法新書』(1760s) | 1 度=60 分<br>半背/矢/半弦<br>1 度=100 分<br>1 度=60 分 |
| 『暦象考成』1 度=60 分，1 分=60 秒<br>八線表は含まず | | |
| | 石黒信由『八線表製法捷術』(1823) | |
| 戴進賢『暦象考成続編』(1742)<br>八線表は含まず | ⇒ 山路徳風，安倍泰栄『(寛政) 暦法新書』(1838) | 1 度=60 分 |
| | 渋川景佑，足立信行『新法暦書続編』(1844)<br>福田理軒『測量集成』(1855)<br>森七蔵正門『割円表』(1857) | 1 度=60 分<br>1 度=100 分，10 分ごと正弦，正接 |
| 『数理精薀(せいうん)』(1723)<br>対数表もあり | 70 年ほど後に安島直円(あじまなおのぶ)が対数表 | |
| Pibo Steenstra, *Grondbeginsels der Meetkunst*, Amsterdam, 1803 | ⇒ 輸入され，蘭学者・吉雄俊蔵 (1787-1847) が所蔵した [5].<br>『暦算全書』と同じ三角関数定義図がある. | |

# 梅文鼎『暦算全書』(1723)

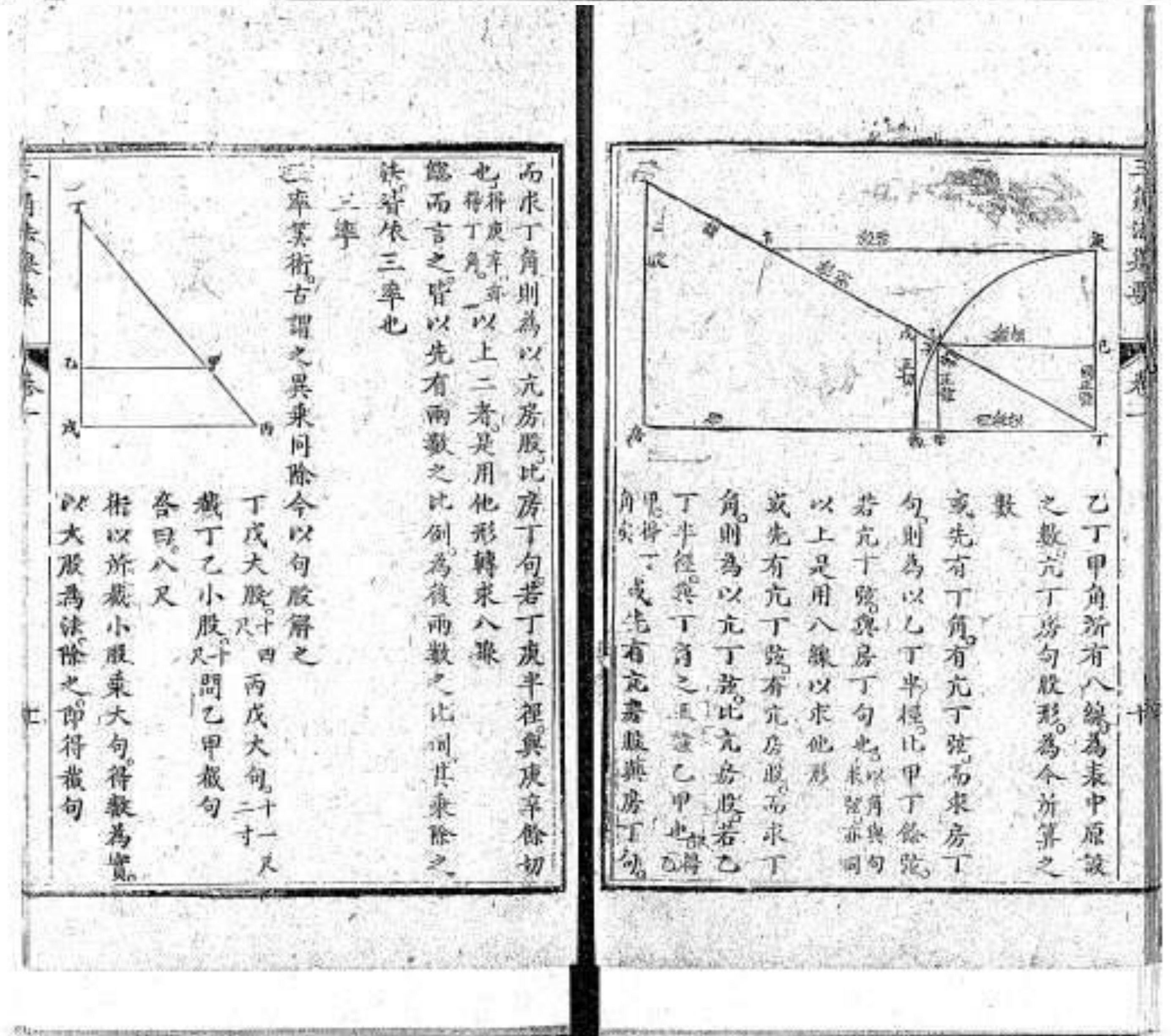
https://kokusho.nijl.ac.jp/biblio/100238563/1?ln=ja

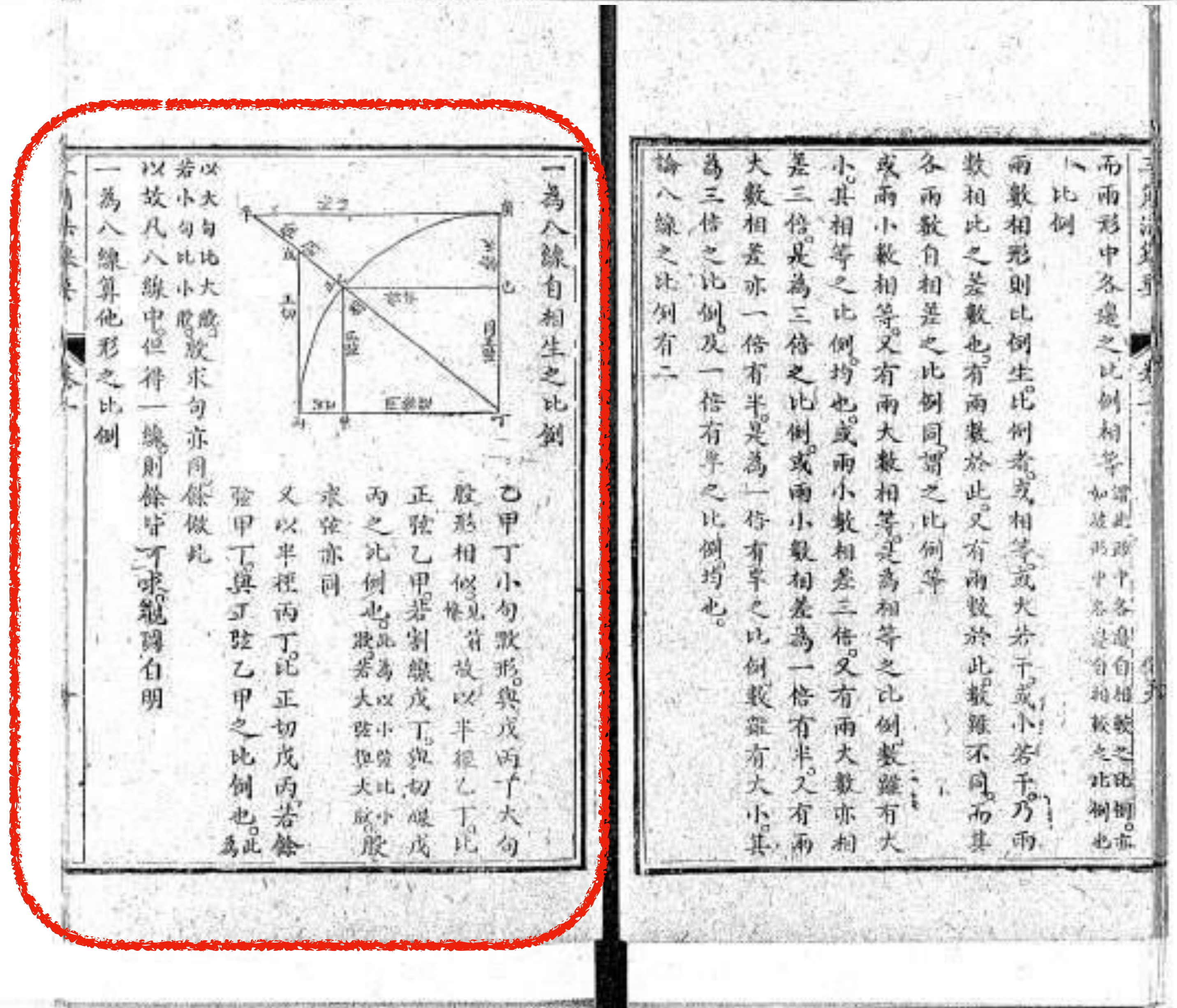






中国，清代初期の学者梅文鼎(1633-1721)が1723年に著した，暦学（天文学）と数学に関する著作をまとめた75巻の書．





梅文鼎の肖像

李迪 (編著)，大竹茂雄，陸 人瑞(共訳)『中国の数学通史』（森北出版，2002）より

# 八線表がなかった. . . .

# 「御用本」として緊急取り寄せ

1723年版　　1724年版

| | 雍正元年版総目 | 雍正二年版総目 |
|---|---|---|
| | 法原 | 法原 |
| 1 | 平三角擧要五巻即三角法擧要 | 平三角擧要五巻 |
| 2 | 勾股闡微四巻 | 勾股闡微四巻首巻楊著 |
| 3 | 弧三角擧要五巻 | 弧三角擧要五巻 |
| 4 | 環中黍尺六巻 | 環中黍尺五巻 |
| 5 | 塹堵測量二巻 | 塹堵測量二巻 |
| 6 | 方圓冪積一巻 | 方圓冪積一巻 |
| 7 | 幾何補編五巻 | 幾何補編五巻 |
| 8 | 解割圓之根一巻 | 解八線之根楊著 |
| | 法数 | 法数 |
| 9 | 割圓八線之表一巻　続出 | 割圓八線之表二巻 |
| | 暦學 | 暦学 |
| 10 | 暦學疑問三巻 | 暦學疑問三巻 |
| 11 | 暦學疑問補二巻 | 暦學疑問補二巻 |
| 12 | 交會管見一巻 | 交會管見一巻 |
| 13 | 交食蒙求三巻　日食　月食 | 交食蒙求三巻　日食　月食 |
| 14 | 揆日候星紀要一巻 | 揆日候星紀要一巻 |
| 15 | 歳周地度合巧一巻 | 歳周地度合巧一巻 |
| 16 | 冬至巧一巻 | 春秋以来冬至巧一巻 |
| 17 | 諸方日軌高度表一巻 | 諸方節気加時日軌高度表一巻 |
| 18 | 五星紀要一巻 | 五星要略一巻 |
| 19 | 火星本法一巻 | 火星本法一巻 |
| 20 | 七政細草補註一巻 | 七政細草補註一巻 |
| 21 | 二銘補註一巻 | 仰儀簡儀二銘補註一巻 |
| 22 | 暦學駢枝四巻 | 暦學駢枝四巻 |
| 23 | 平立定三差解一巻 | 授時平立定三差解一巻 |
| 24 | 暦學答問一巻 | 暦學答問一巻 |
| | 算學 | 算學 |
| 25 | 古算演略一巻 | 古算演略一巻 |
| 26 | 筆算五巻 | 筆算五巻 |
| 27 | 籌算七巻 | 籌算七巻 |
| 28 | 度算釋例二巻 | 度算釋例二巻 |
| 29 | 方程論六巻 | 方程論六巻 |
| 30 | 少廣拾遺一巻 | 少廣拾遺一巻 |
| | 跋 | ―― |

表 3　兼済堂纂刻梅勿庵先生暦算全書の總目の比較

小林龍彦，科学史研究41 (2002) p26.

ど注目されてこなかった。以下に、『舶載書目』の該当箇所を引用する。

御用　全［享保一二未］三十七番船

一、割円八線之表　一套　二本

目録　上巻切初度至四十五度之度

下巻切四十［ママ］度至八十九度之度

宣城梅文鼎定九父著

安渓李光墺康卿・［李］光里儀卿　同校

一、八線表　一套　一本

礼部尚書兼翰林院学士詹事府加一級臣徐光啓奉

旨督修　会士　鄧玉函　譔

同会　鄭弘猷・龍華民・羅雅谷・湯若望・焦応旭　同訂

宋可乗・魏邦綸・掌乗・祝□元・張寀臣　受法

陳応登・［陳］于階　較梓

一［ママ］暦書法数部　割円八線表用法

列表法二条　表中用線相求法九条　表外用法八条(70)

第四章　徳川吉宗の数理科学書収集と長崎聖堂（平岡）

表 1　八線表の舶載・受入記録の食い違い

| 日時 | 『舶載書目』 | 『幕府書物方日記』 |
|---|---|---|
| 享保12年（1727）4月25日 | | (A)「割円八線之表」写本1冊到着、建部賢弘に貸し出し。附属の「刻本之手本」とともに同年10月8日納庫 |
| 同年10月14日 | (1)「割円八線之表」2冊舶載 | |
| | (2)「八線表」1冊舶載 | |
| 同年10月26日 | | (B)「割円八線之表」2冊到着、田沼主殿預けとされる。享保18年5月16日納庫 |
| 享保13年（1728）3月17日 | | (C)「割円勾股八線表」刊本1冊納庫 |
| | | (参考)「割円八線互求法」写本1冊 |


平岡隆二「徳川吉宗の数理科学書収集と長崎聖堂」
（佐藤賢一・梅田千尋・平岡隆二　編『幕府天文方の研究』思文閣出版，2026 所収）

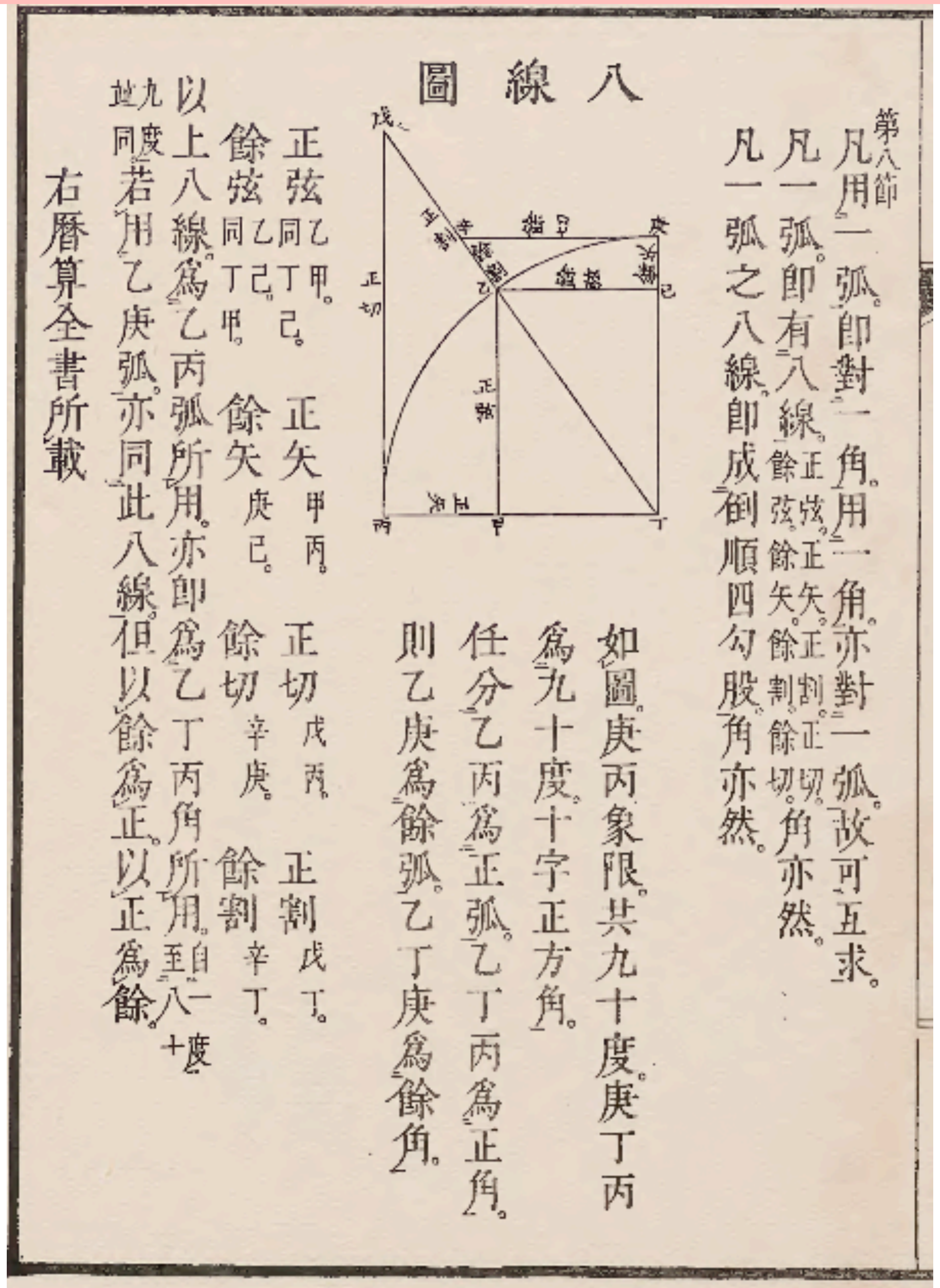
# 徐光啓『崇禎曆書』（1634）　暦引図編より

https://www.digital.archives.go.jp/file/1076421.html
https://kokusho.nijl.ac.jp/biblio/100240353/1?ln=ja

中国，明代末（1631-1634年）に徐光啓(1562--1633)・李子藻らがイエズス会宣教師アダム・シャール(Johann Adam Schall von Bell, 湯若望，1591--1666)らの協力のもと，西洋暦法に基づく135巻からなる暦法書．清代における新暦編纂の重要な参考書となった．

徐光啓の肖像

李迪 (編著)，大竹茂雄，陸 人瑞(共訳)『中国の数学通史』（森北出版，2002）より



第八節
凡用一弧。即對一角。用一角。亦對一弧。故可互求。
凡一弧。即有八線。正弦。餘弦。正矢。餘矢。正割。餘割。正切。餘切。角亦然。
凡一弧之八線。即成倒順四勾股。角亦然。

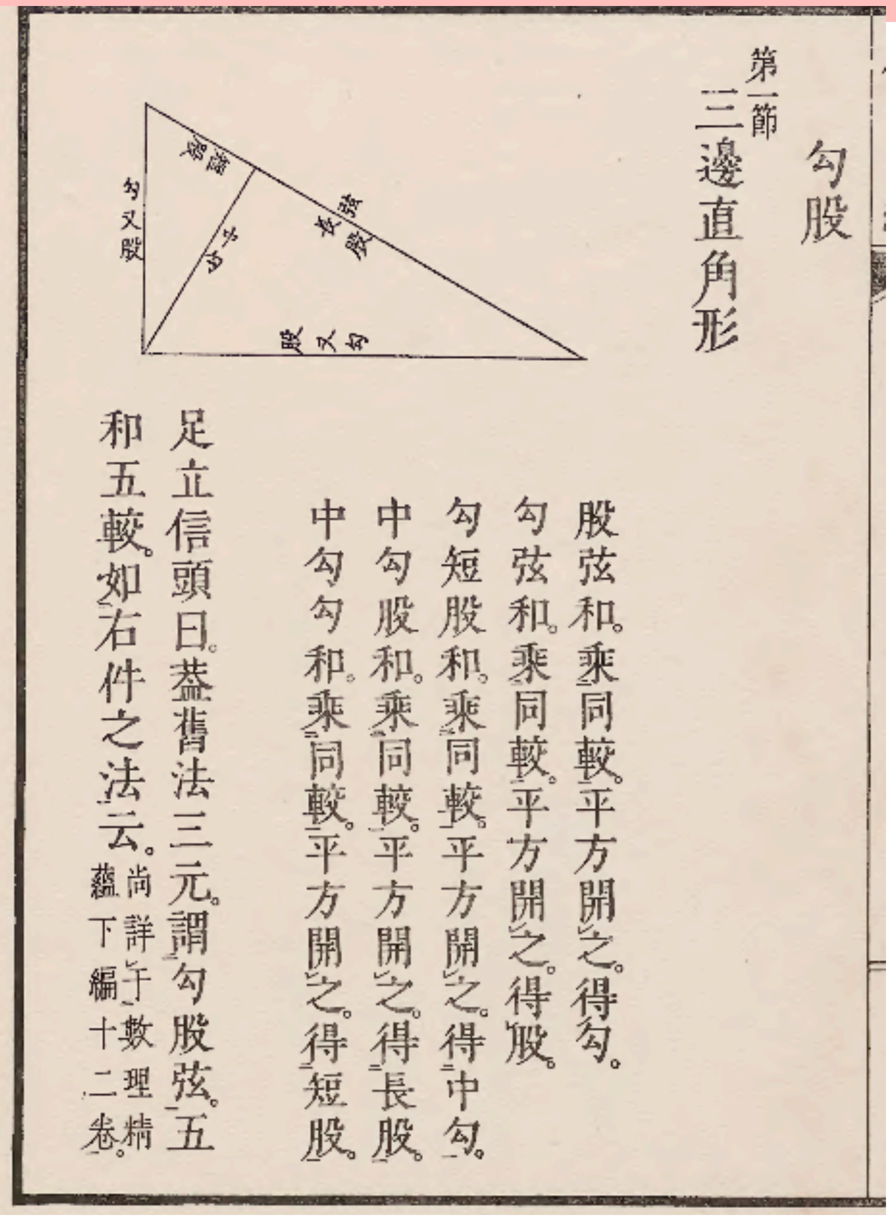
八線圖



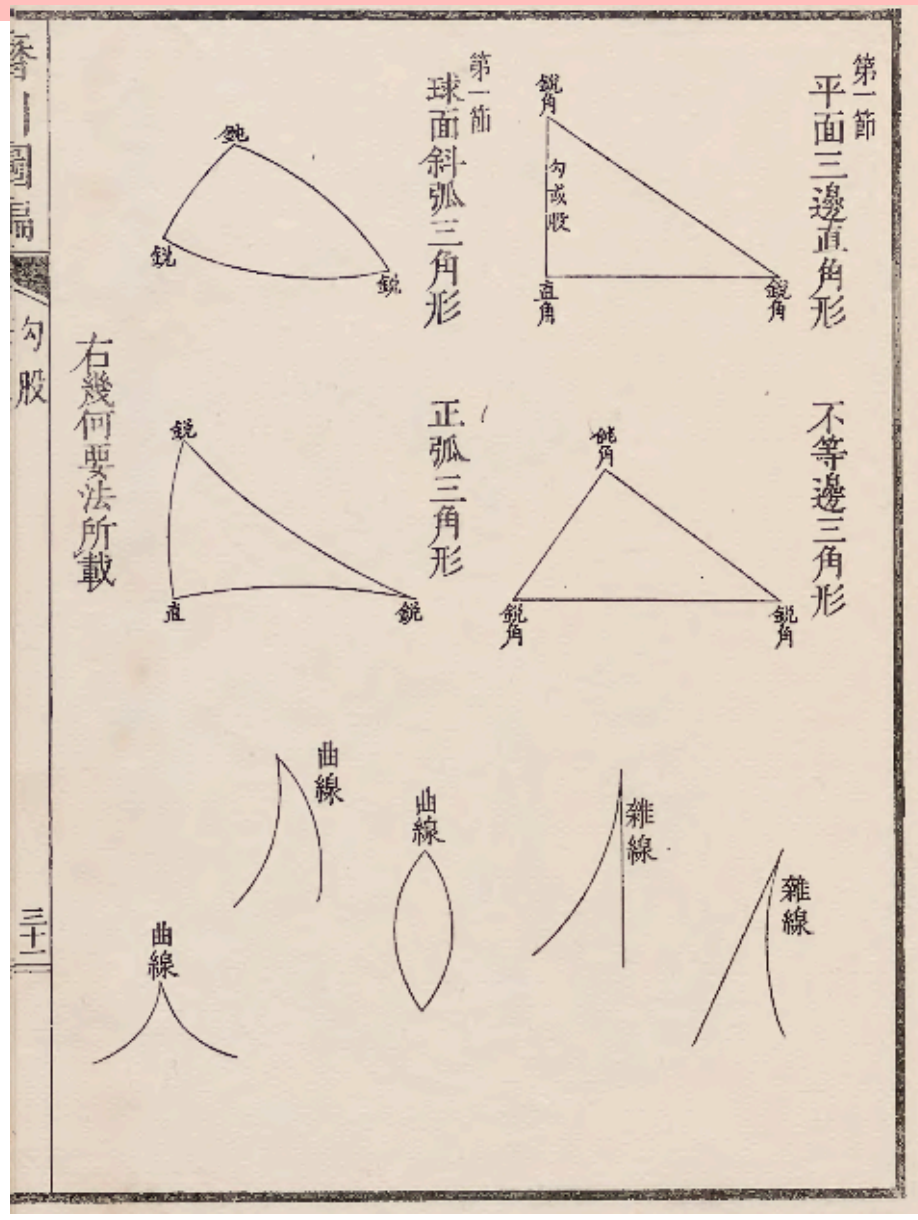
如圖。庚丙象限。共九十度。庚丁丙爲九十度。十字正方角。
任分乙丙爲正弧。乙丁丙爲正角。
則乙庚爲餘弧。乙丁庚爲餘角。

正弦乙甲。同乙丁己。
餘弦同乙己。同丁甲。
正矢甲丙。
餘矢庚己。
正切戊丙。
餘切辛庚。
正割戊丁。
餘割辛丁。
以上八線。爲乙丙弧所用。亦即爲乙丁丙角所用。自一至八十九度同。
若用乙庚弧。亦同此八線。但以餘爲正。以正爲餘。

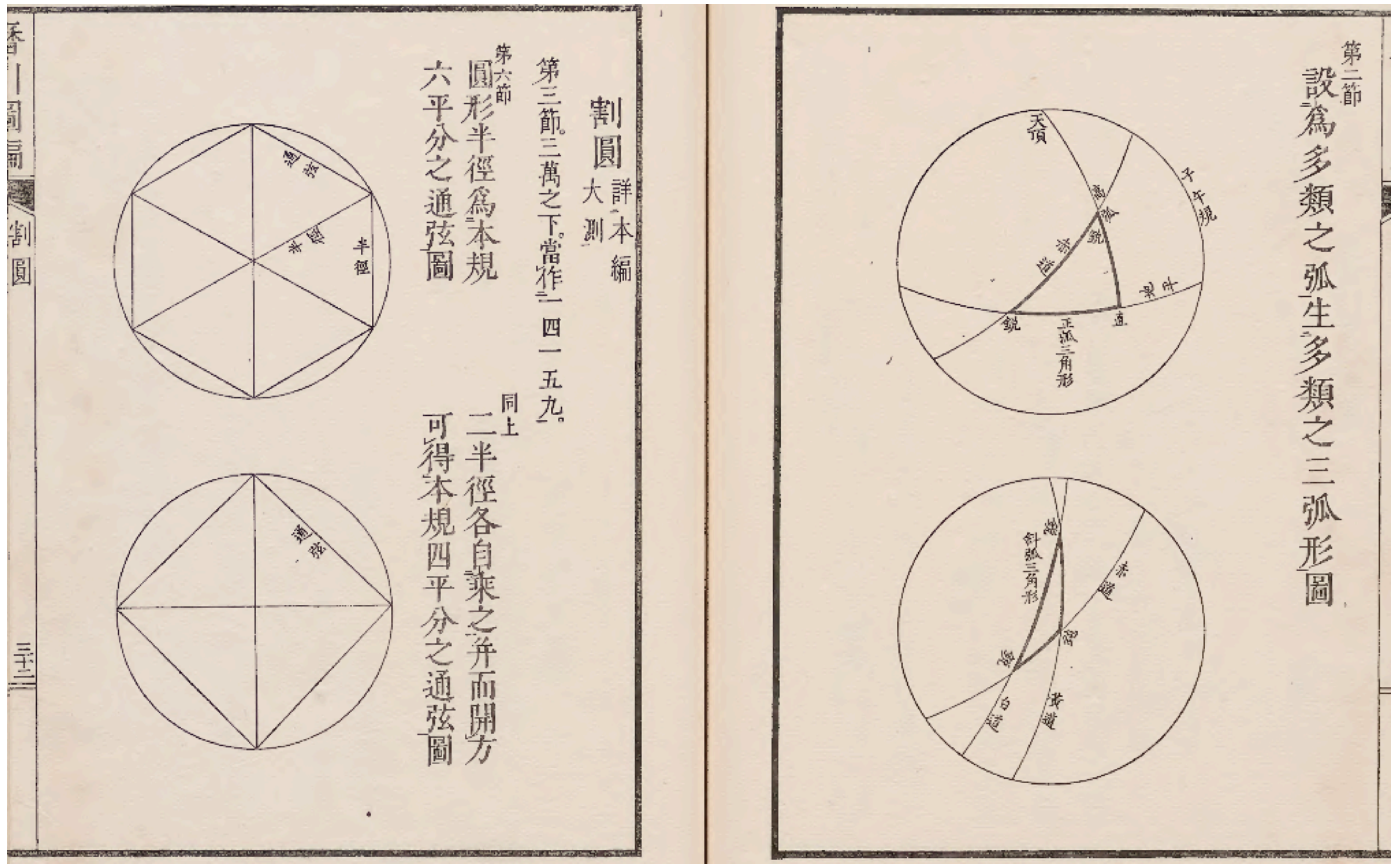
右曆算全書所載









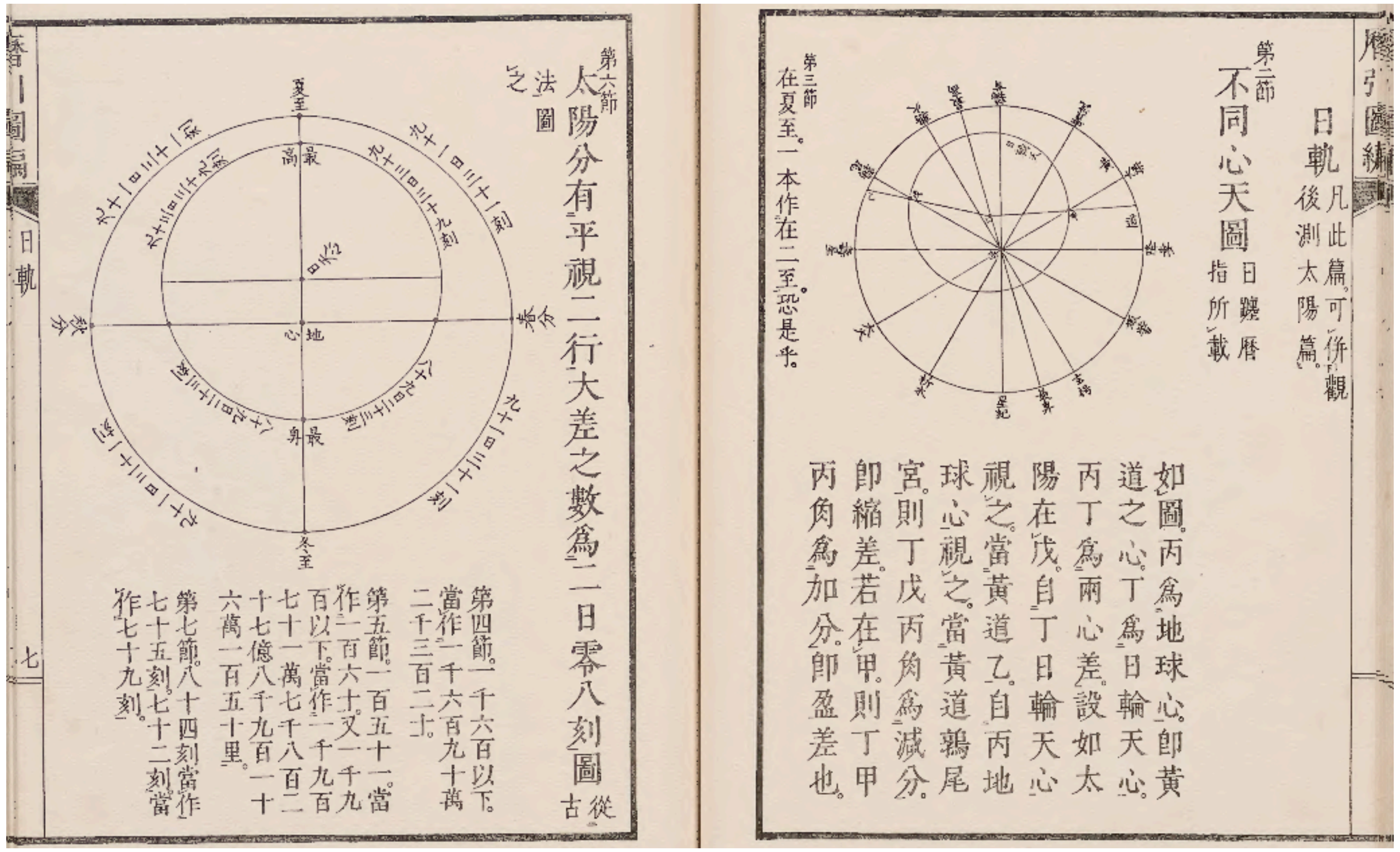


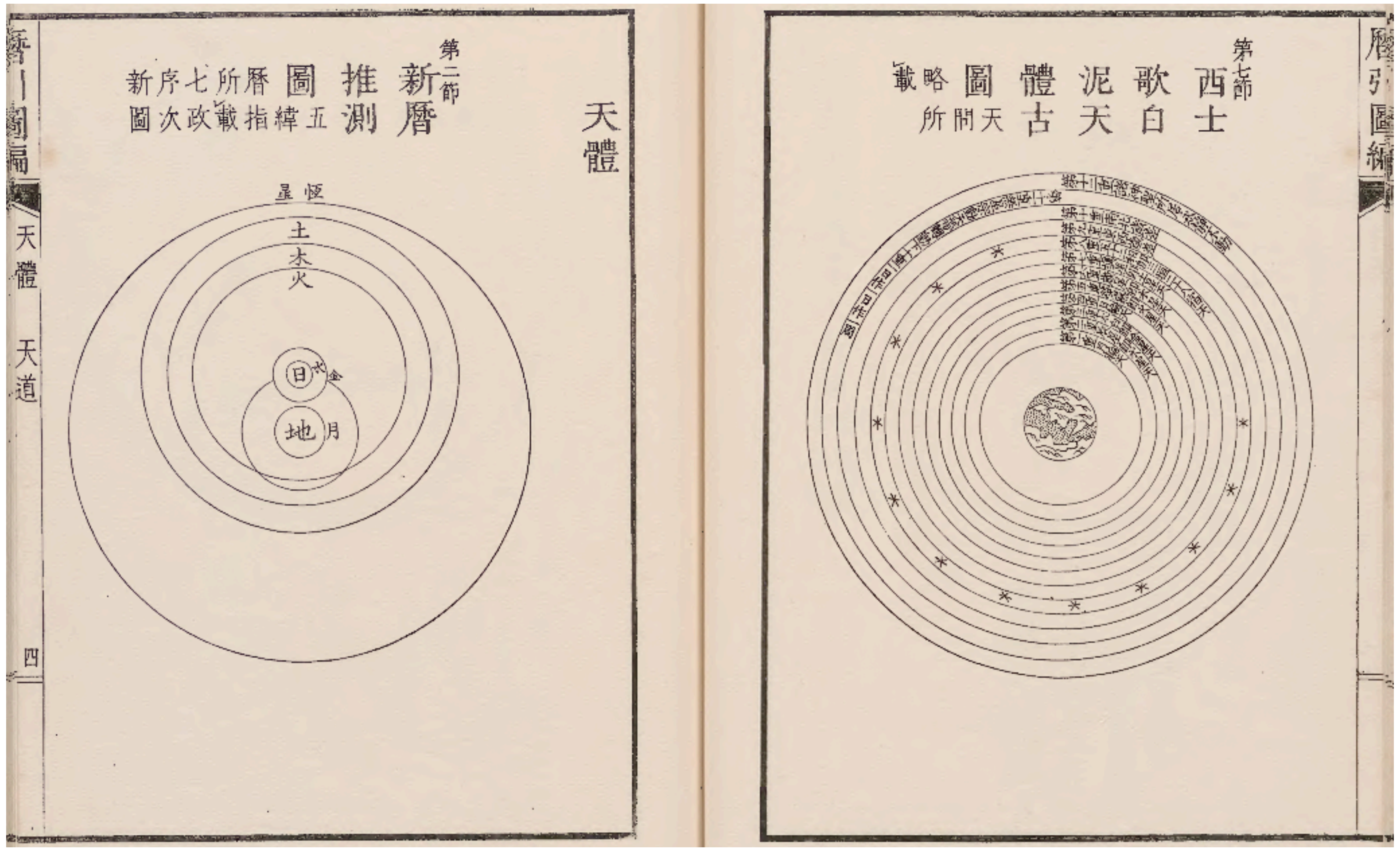
# 徐光啓『崇禎暦書』(1634)　暦引図編より

https://www.digital.archives.go.jp/file/1076421.html
https://kokusho.nijl.ac.jp/biblio/100240353/1?ln=ja

中国，明代末（1631-1634年）に徐光啓(1562--1633)・李子藻らがイエズス会宣教師アダム・シャール(Johann Adam Schall von Bell, 湯若望，1591--1666)らの協力のもと，西洋暦法に基づく135巻からなる暦法書．清代における新暦編纂の重要な参考書となった．

ケプラー(1609)
惑星の楕円運動の法則




チコ・ブラーエ
太陽系モデル

# コペルニクス『天体の回転について』(1543)

## 地動説 (heliocentric theory)

コペルニクス(16c)

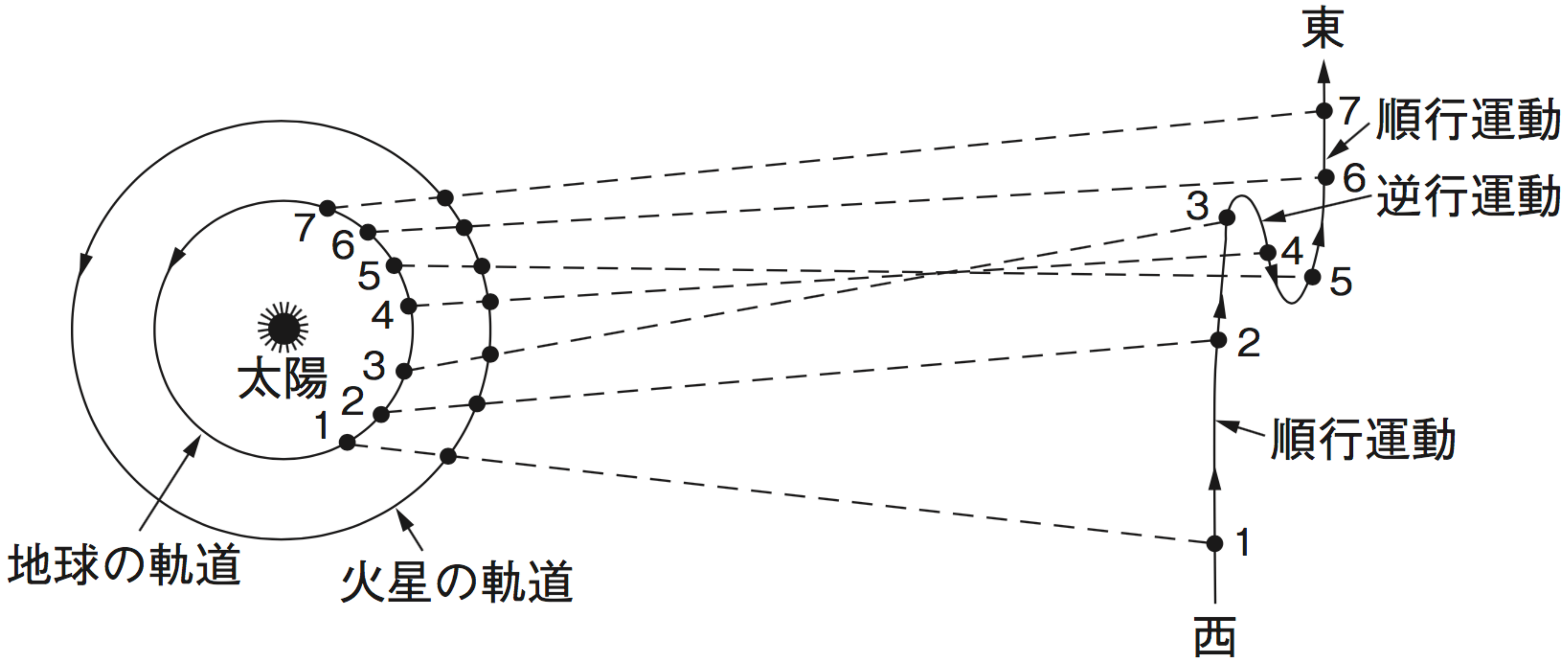



図 2.5　地動説では，火星が逆行することが自然に説明できる．

NICOLAI COPERNICI TORINENSIS DE REVOLVTIONIbus orbium cœlestium, Libri VI.

IN QVIBVS STELLARVM ET FIXARVM ET ERRATICARVM MOTVS, EX VETEribus atq; recentibus obseruationibus, restituit hic autor. Præterea tabulas expeditas luculentasq; addidit, ex quibus eosdem motus ad quoduis tempus Mathematum studiosus facillime calculare poterit.

ITEM, DE LIBRIS REVOLVTIONVM NICOLAI Copernici Narratio prima, per M. Georgium Ioachimum Rheticum ad D. Ioan. Schonerum scripta.

Cum Gratia & Priuilegio Cæs. Maiest.

BASILEAE, EX OFFICINA HENRICPETRINA.

NICOLAI COPERNICI

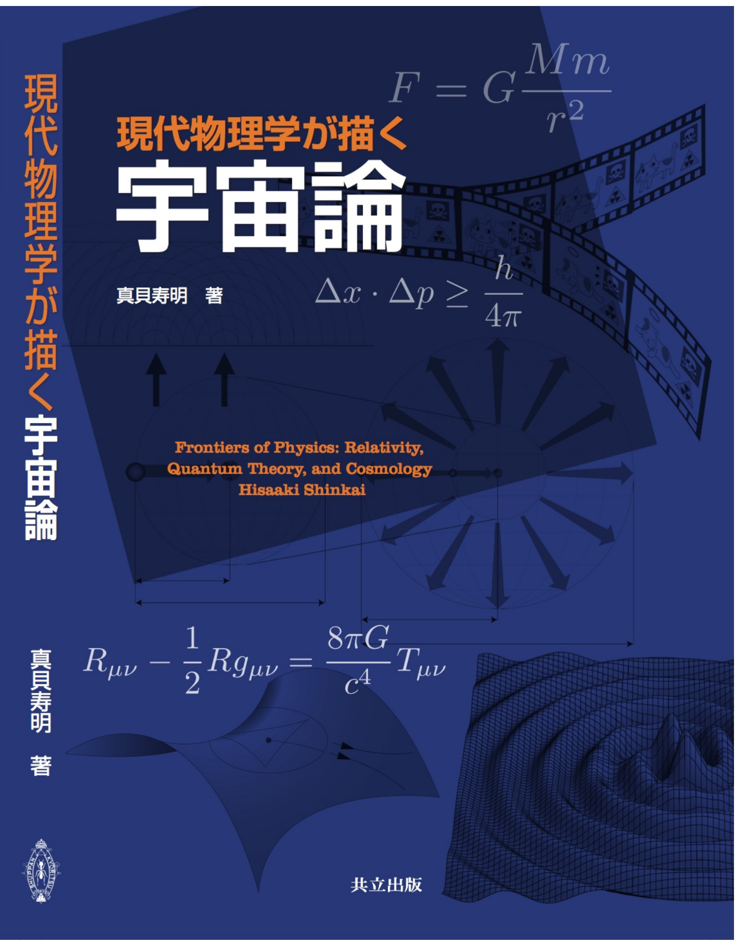
net, in quo terram cum orbe lunari tanquam epicyclo contineri diximus. Quinto loco Venus nono mense reducitur. Sextum deniq; locum Mercurius tenet, octuaginta dierum spacio circũ currens. In medio uero omnium residet Sol. Quis enim in hoc

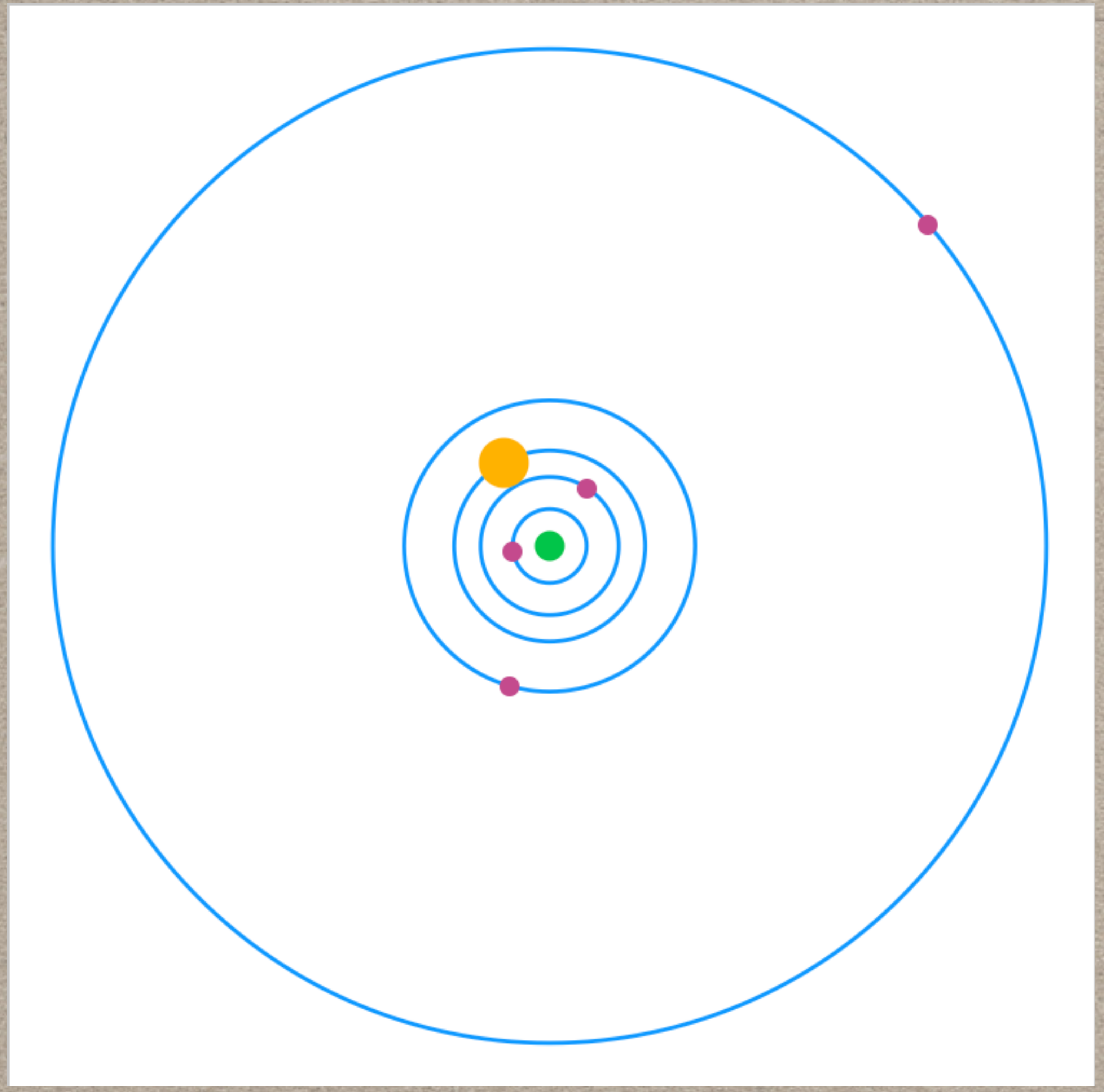


pulcherimo templo lampadem hanc in alio uel meliori loco poneret, quàm unde totum simul possit illuminare? Siquidem non inepte quidam lucernam mundi, alij mentem, alij rectorem uocant. Trimegistus uisibilem Deum, Sophoclis Electra intuentẽ omnia. Ita profecto tanquam in solio regali Sol residens circum agentem gubernat Astrorum familiam. Tellus quoq; minime fraudatur lunari ministerio, sed ut Aristoteles de animalibus ait, maximã Luna cũ terra cognationẽ habet. Concipit interea à Sole terra, & impregnatur annuo partu. Inuenimus igitur sub hac

『この仮説は真実でなくても構わない．
観測に一致する計算結果が得られるという
その一点で十分なのだ．』

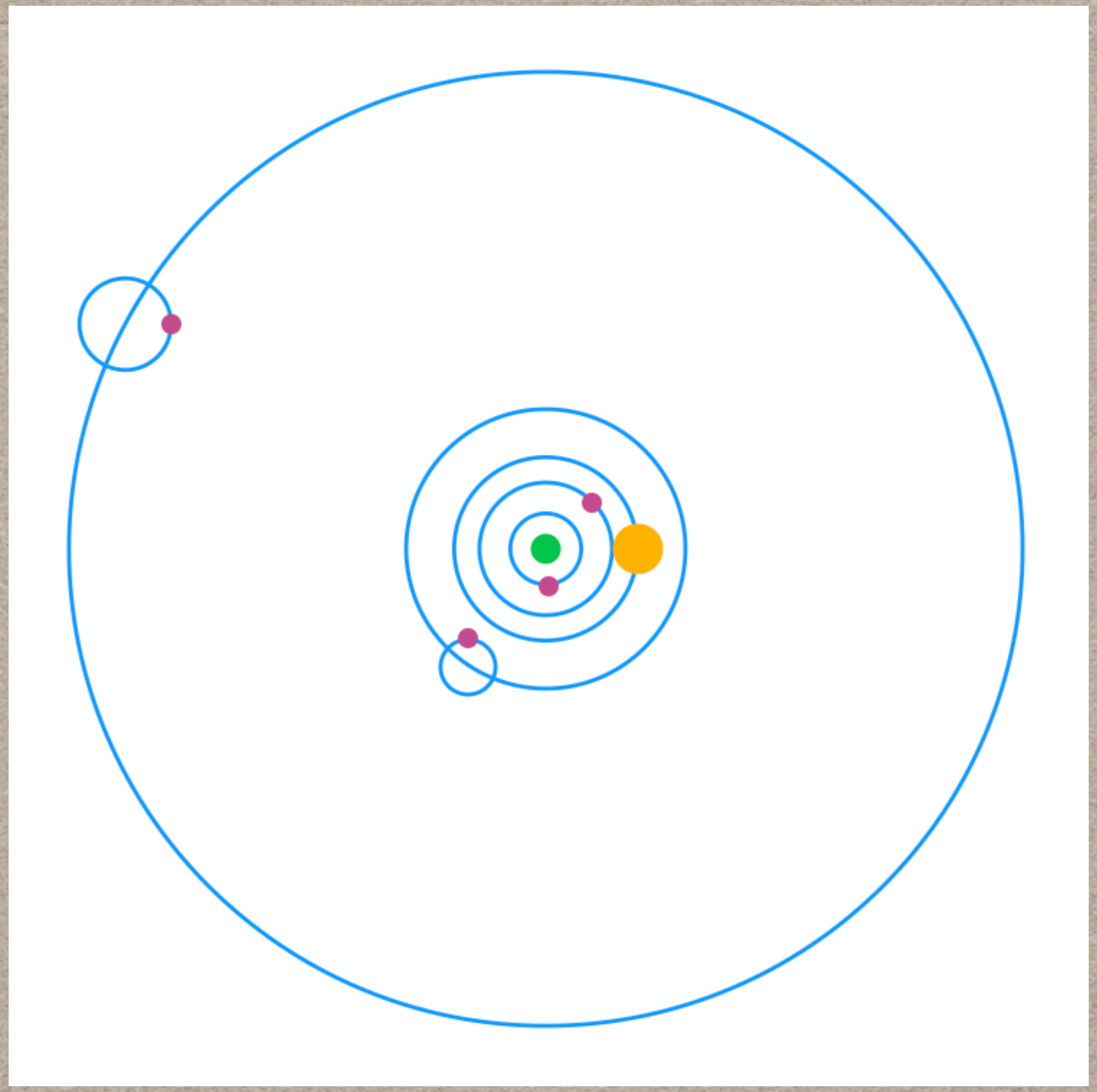
この序文は友人が勝手に書いたそうだ．





天動説

地球中心説

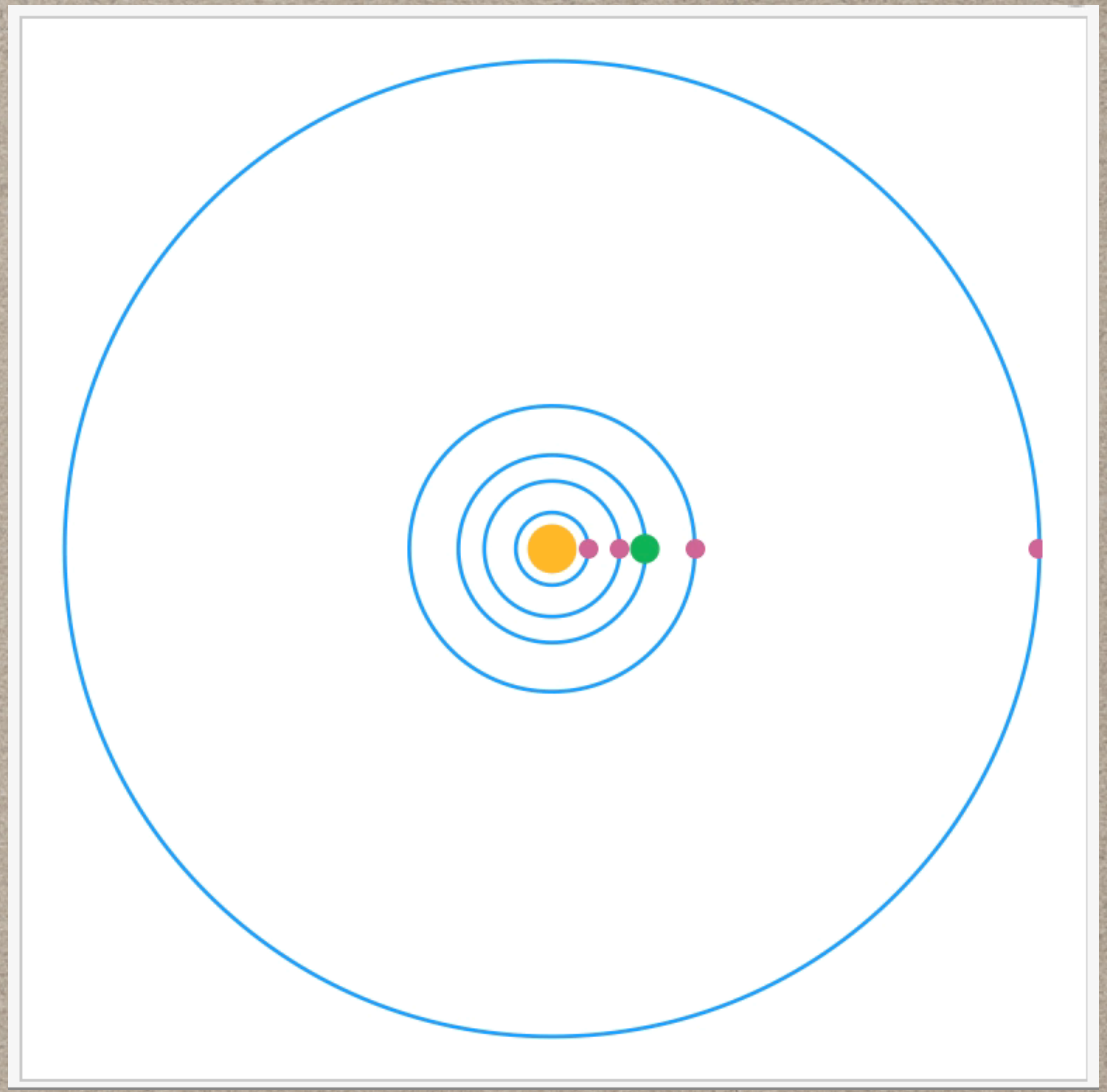


天動説＋周天円

地球中心説

Claudius Ptolemaeus

克劳狄斯 托勒密



地動説

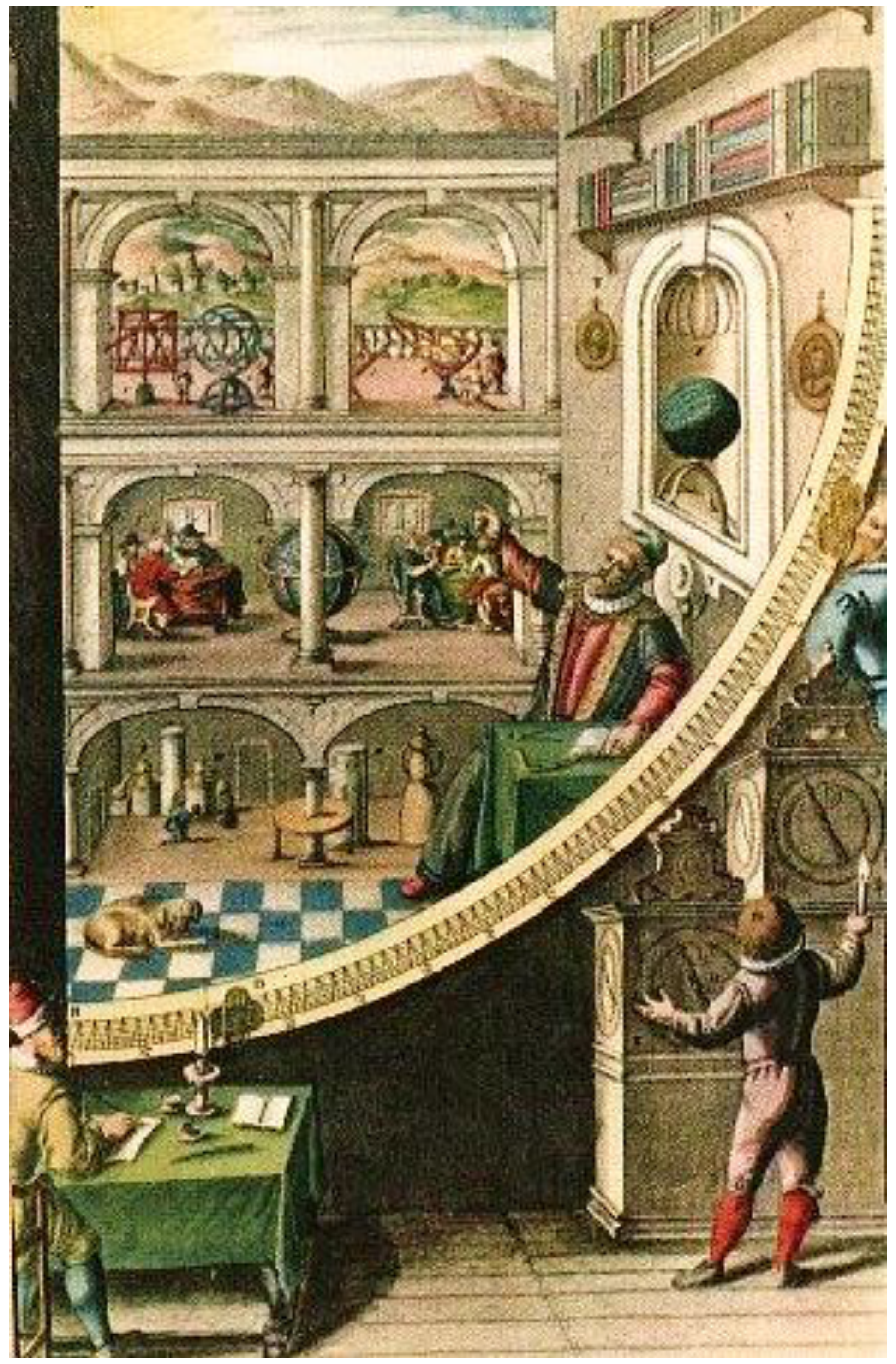
太陽中心説

Nicolaus Copernicus

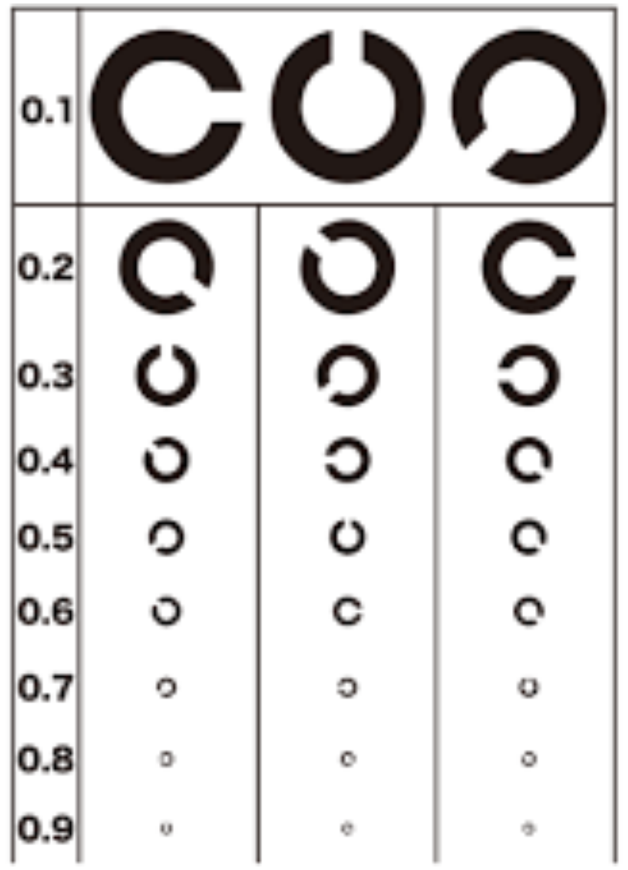
尼古拉 哥白尼

# ティコ・ブラーエは地動説を信じなかった

Tycho Brahe
(1546-1601)

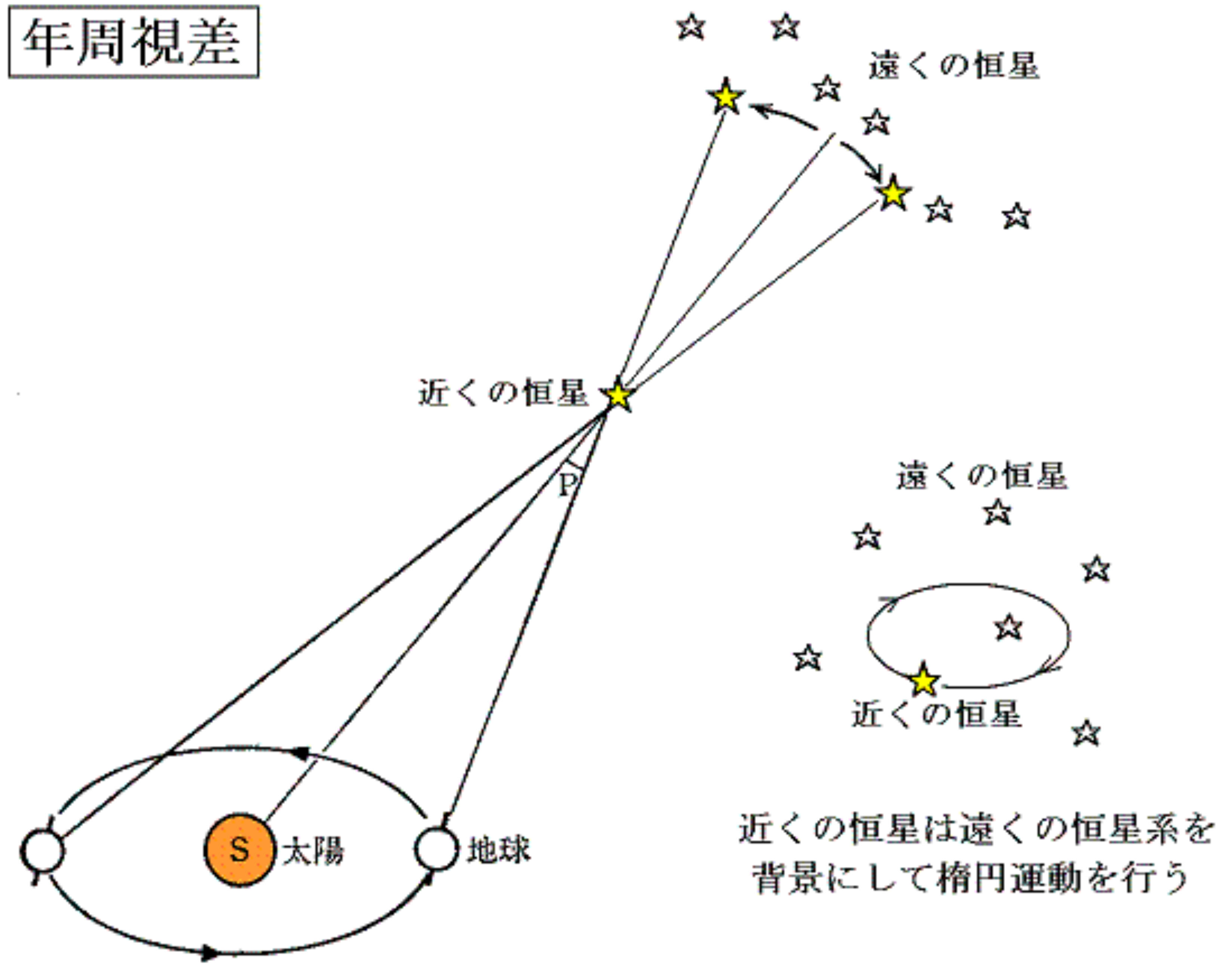


当時は肉眼観測，2分角（1度の 1/30）までの観測能力




5m離れて，視角1分を視認できる
= 7.272mmの輪の1.454mmの欠損
= 視力 1.0

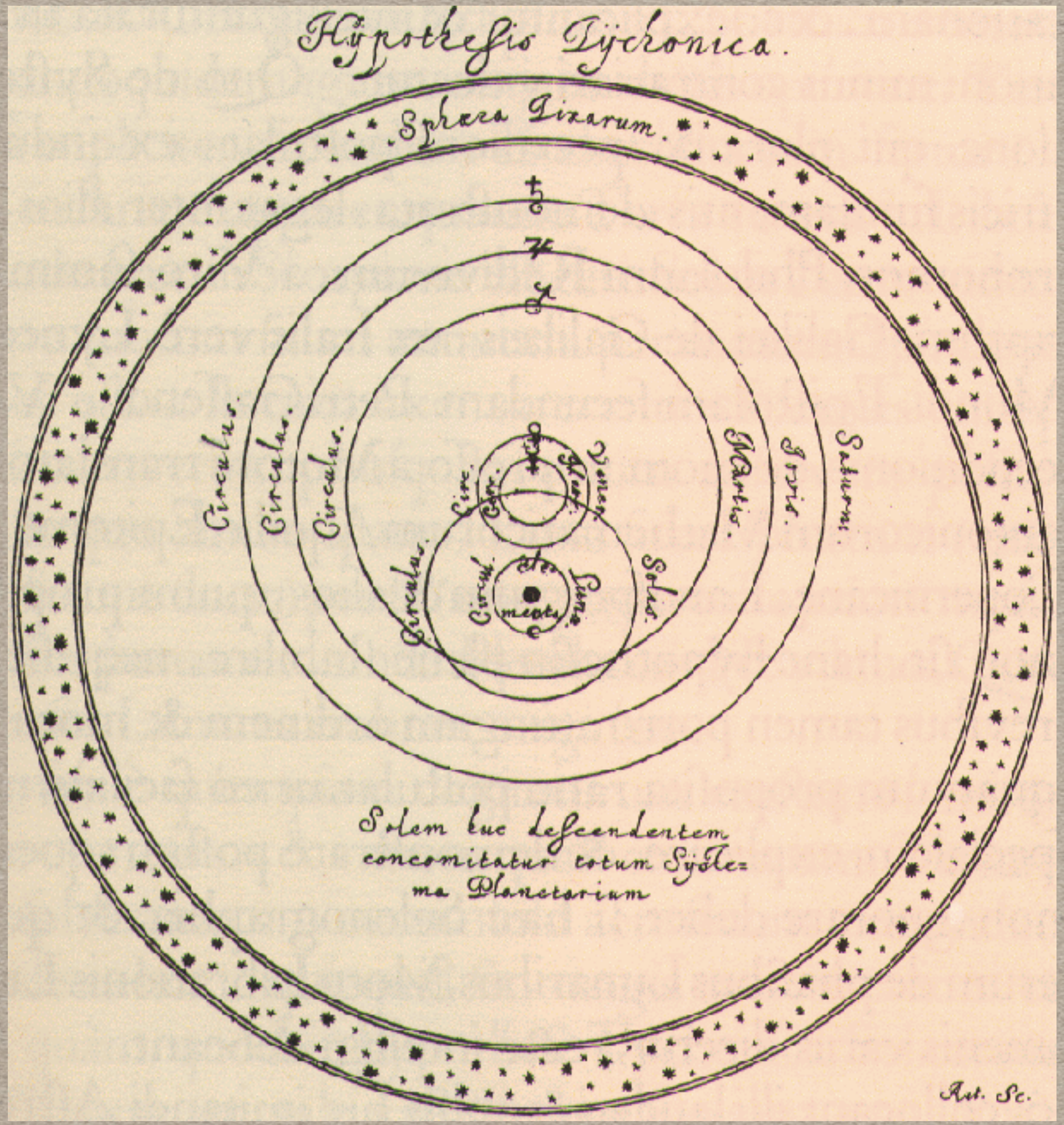
5m離れて，視角2分を視認できる
= 視力 0.5

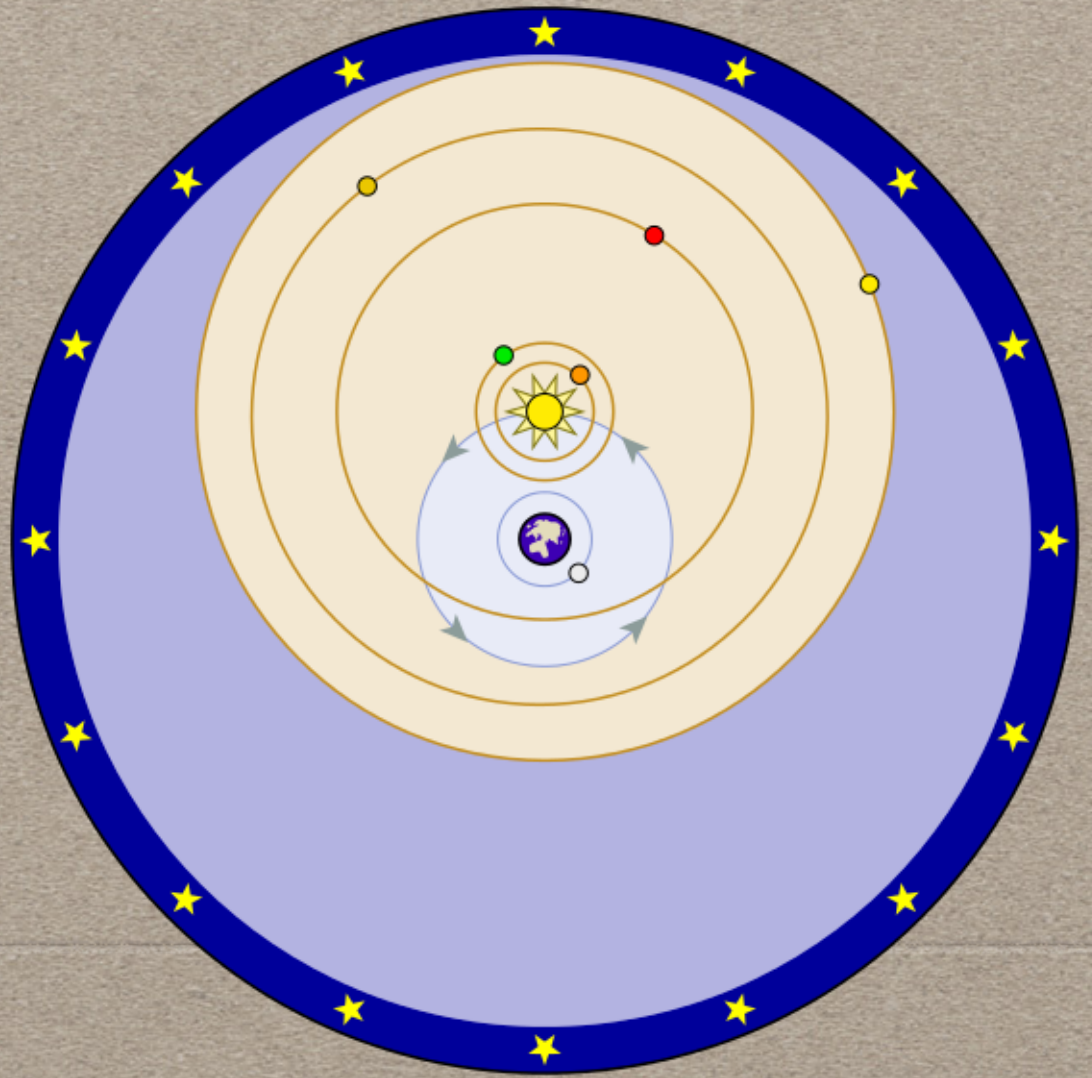


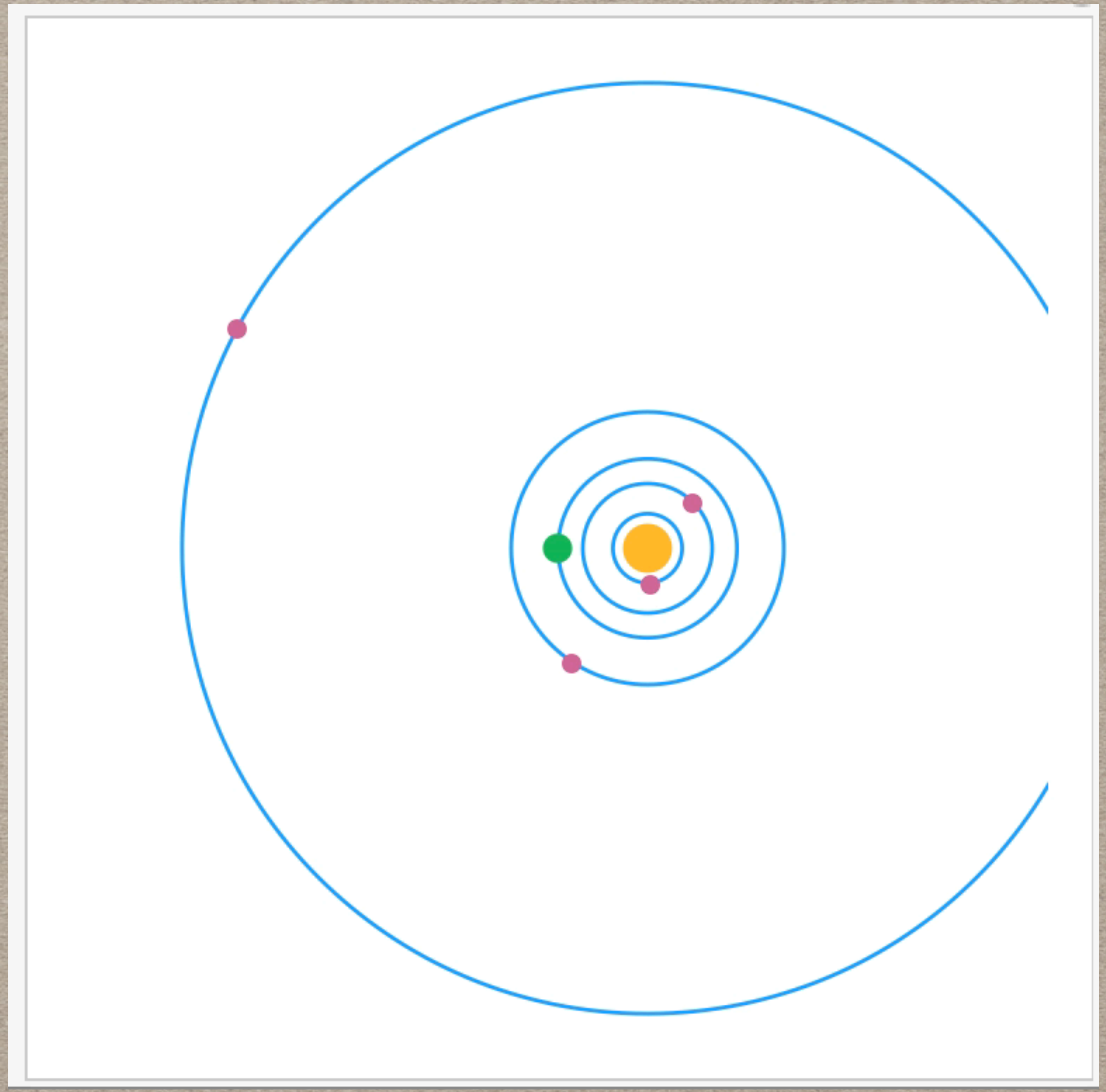

## **年周視差**が確認できなかったから

もっとも近いケンタウルス座alpha
でも年周視差0.76秒角

# 1583 Tychonian planetary model





チコ・ブラーエの説

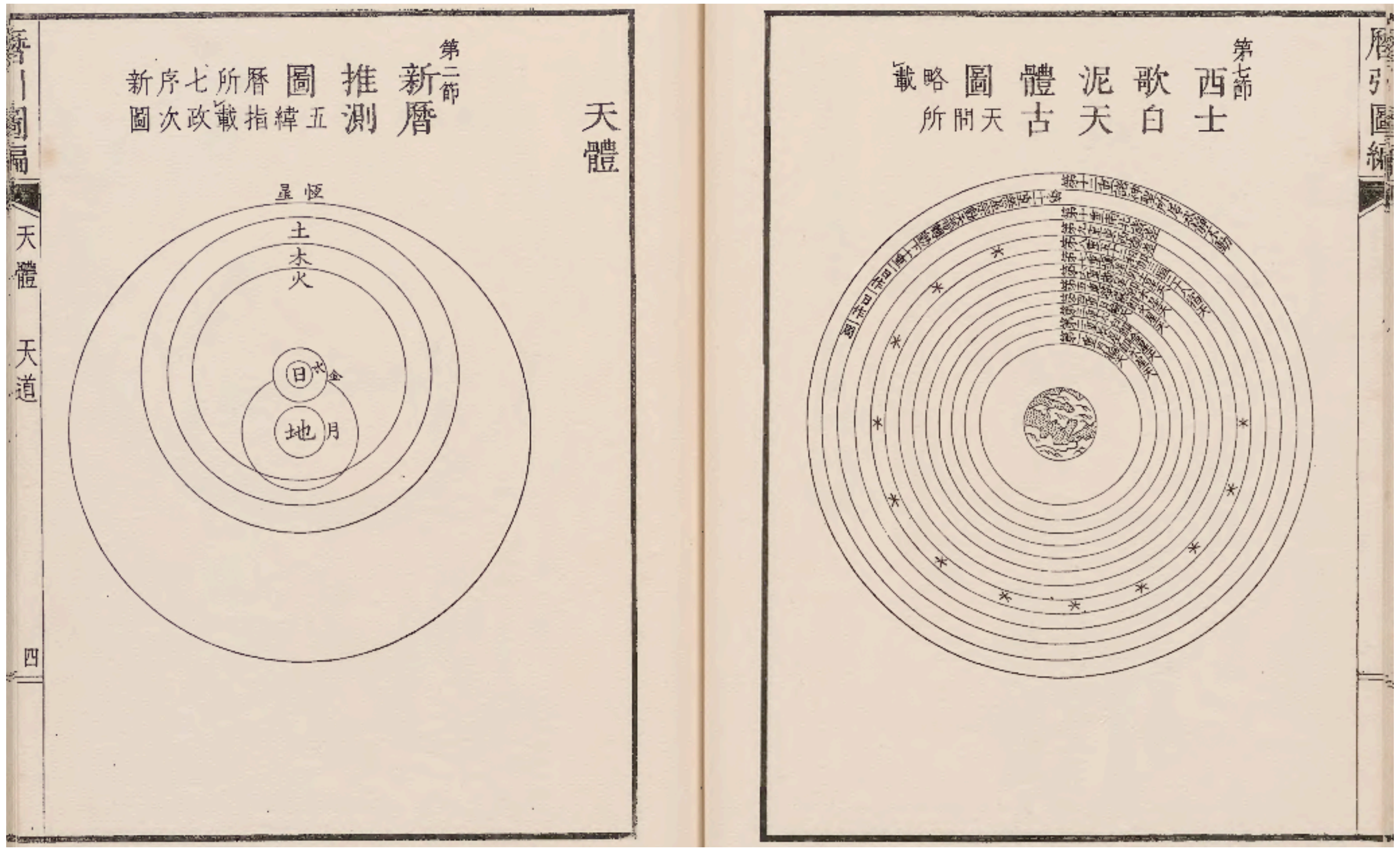
Tycho Brahe

第谷 布拉赫

# 徐光啓『崇禎曆書』(1634)　暦引図編より

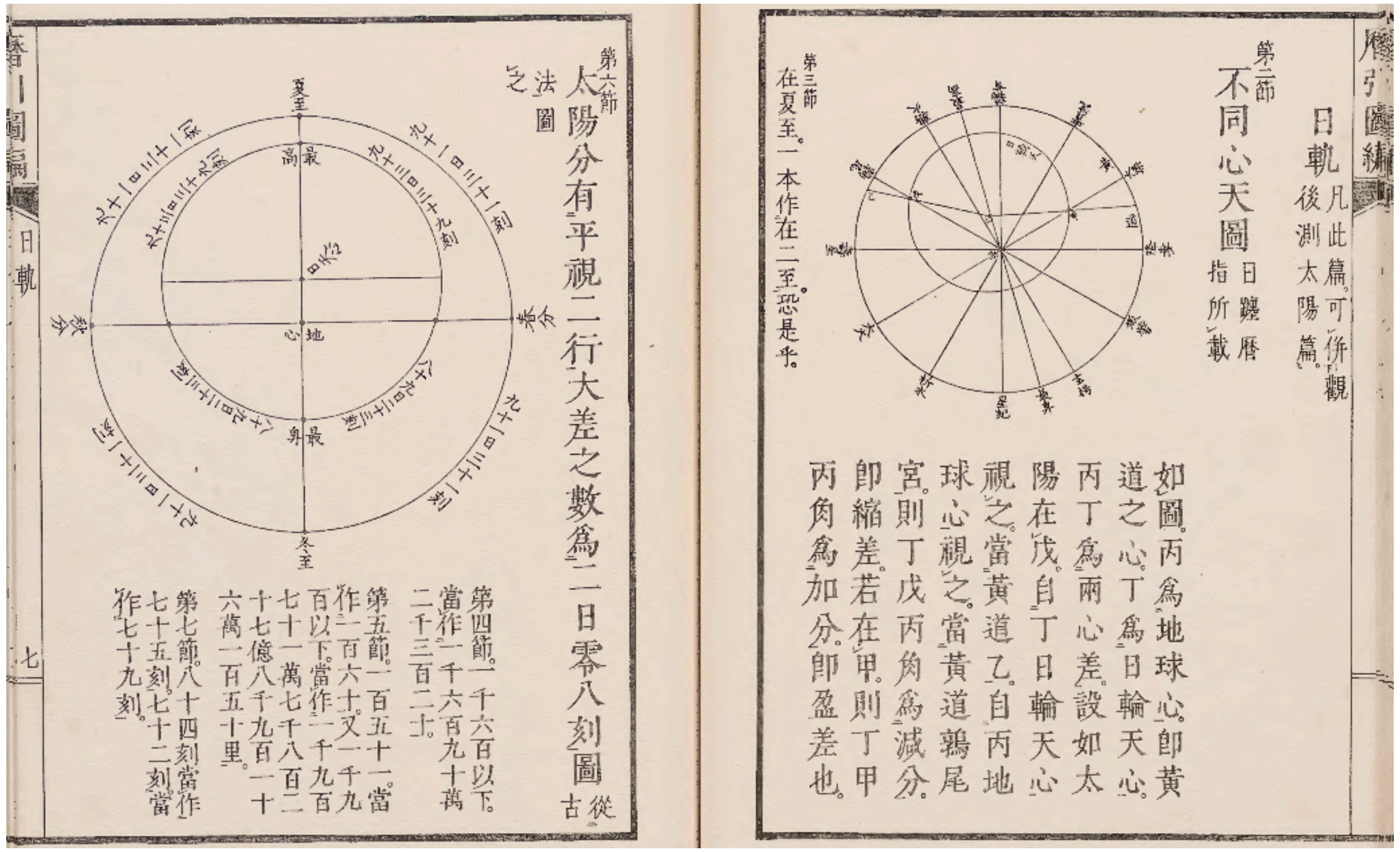
https://www.digital.archives.go.jp/file/1076421.html
https://kokusho.nijl.ac.jp/biblio/100240353/1?ln=ja

中国，明代末（1631-1634年）に徐光啓(1562--1633)・李子藻らがイエズス会宣教師アダム・シャール(Johann Adam Schall von Bell, 湯若望，1591--1666)らの協力のもと，西洋暦法に基づく135巻からなる暦法書．清代における新暦編纂の重要な参考書となった．



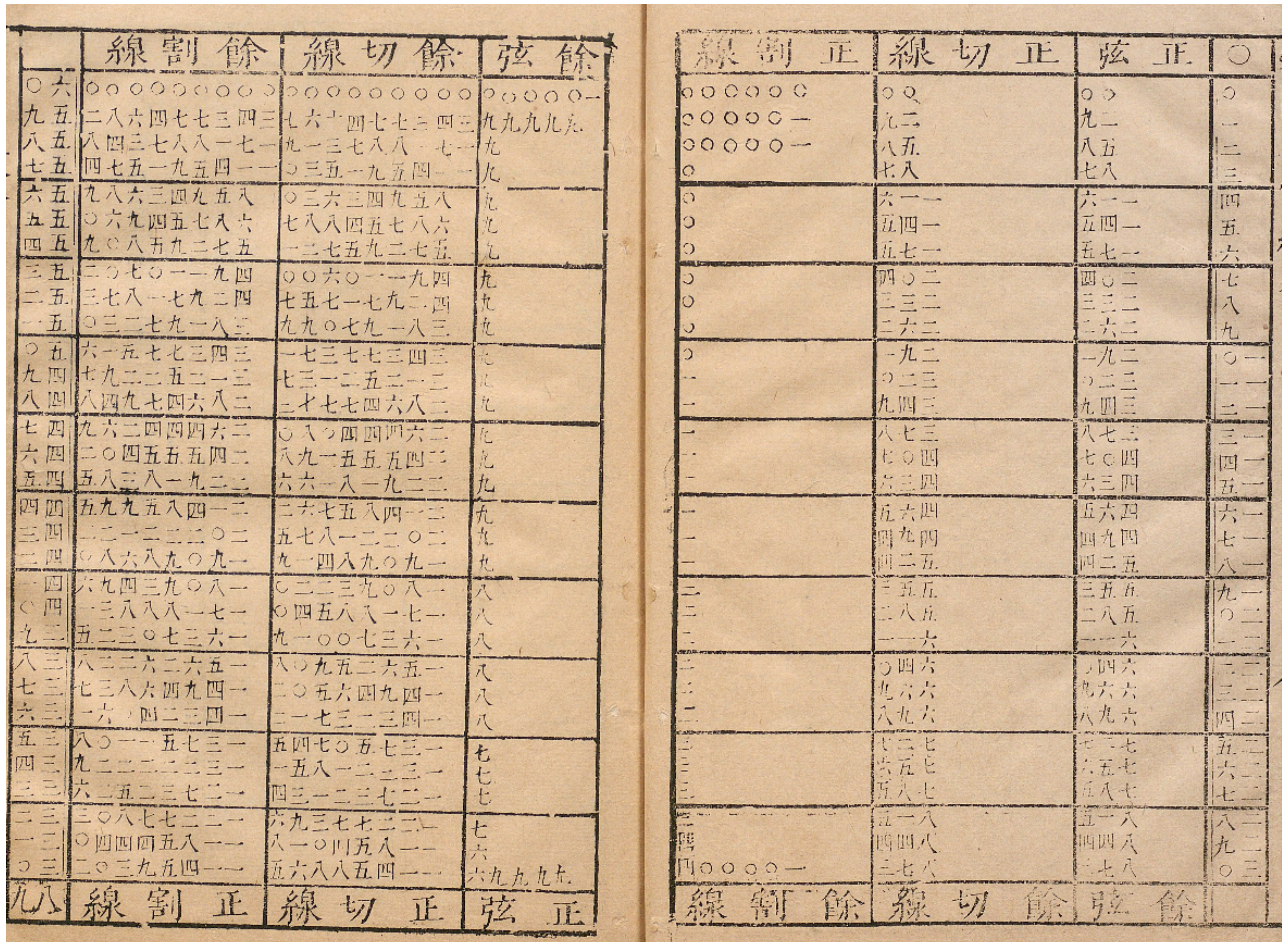

チコ・ブラーエ
太陽系モデル

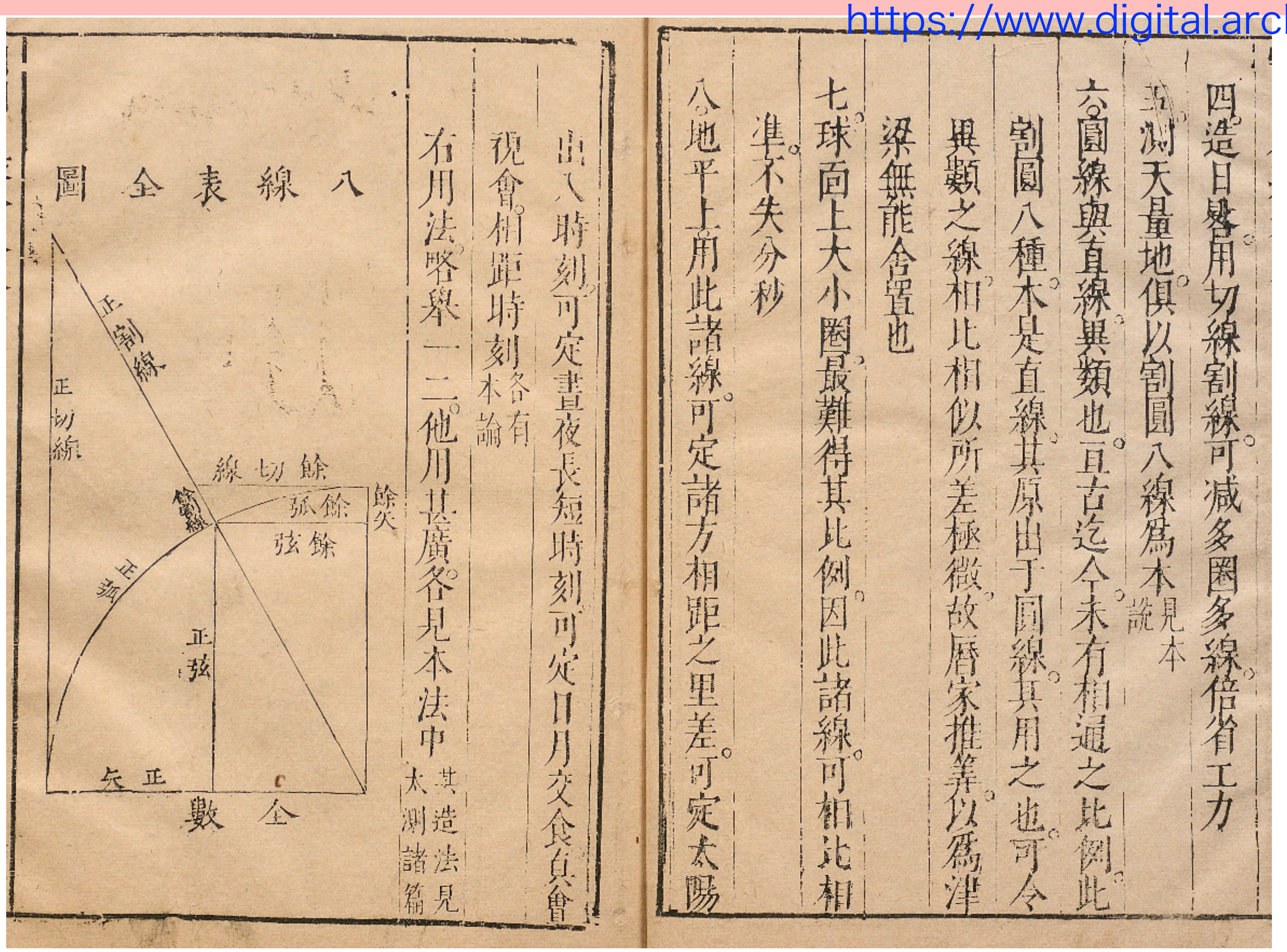
ケプラー(1609)
惑星の楕円運動の法則

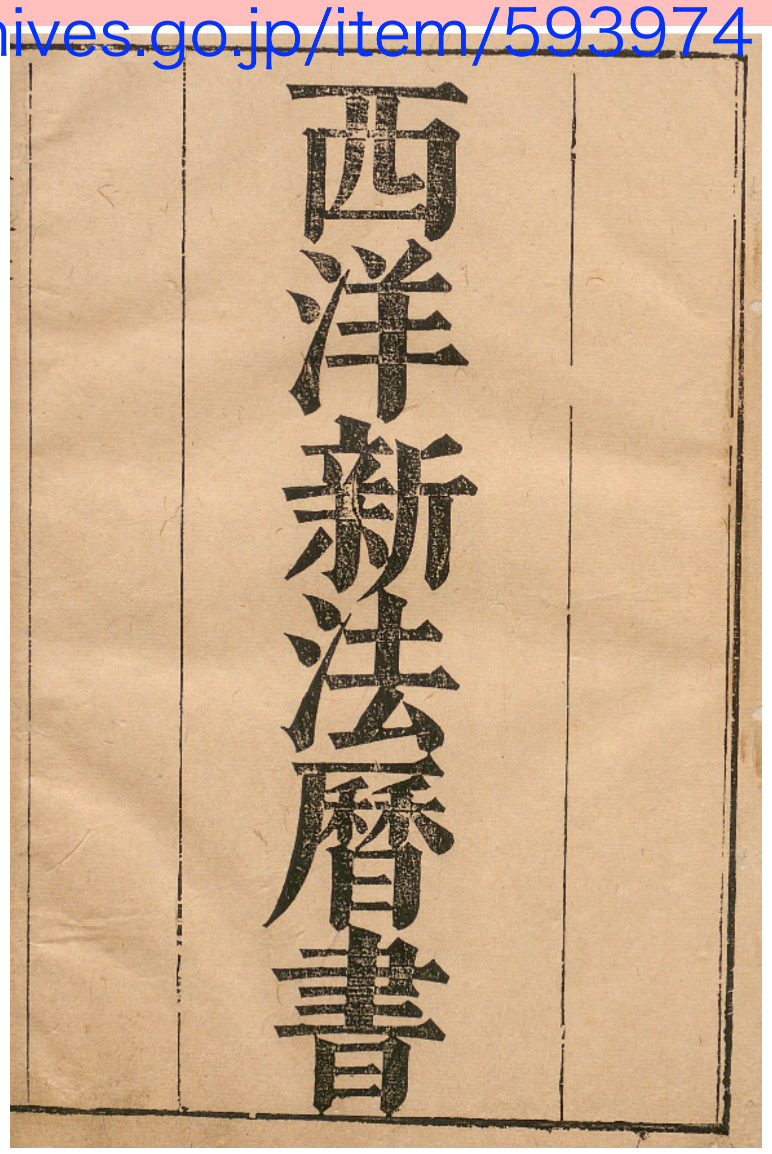


# 徐光啓『崇禎暦書』(1634)　八線表巻上, 巻下

国立公文書館 https://www.digital.archives.go.jp/file/1084335
https://www.digital.archives.go.jp/item/593651
https://www.digital.archives.go.jp/item/593974



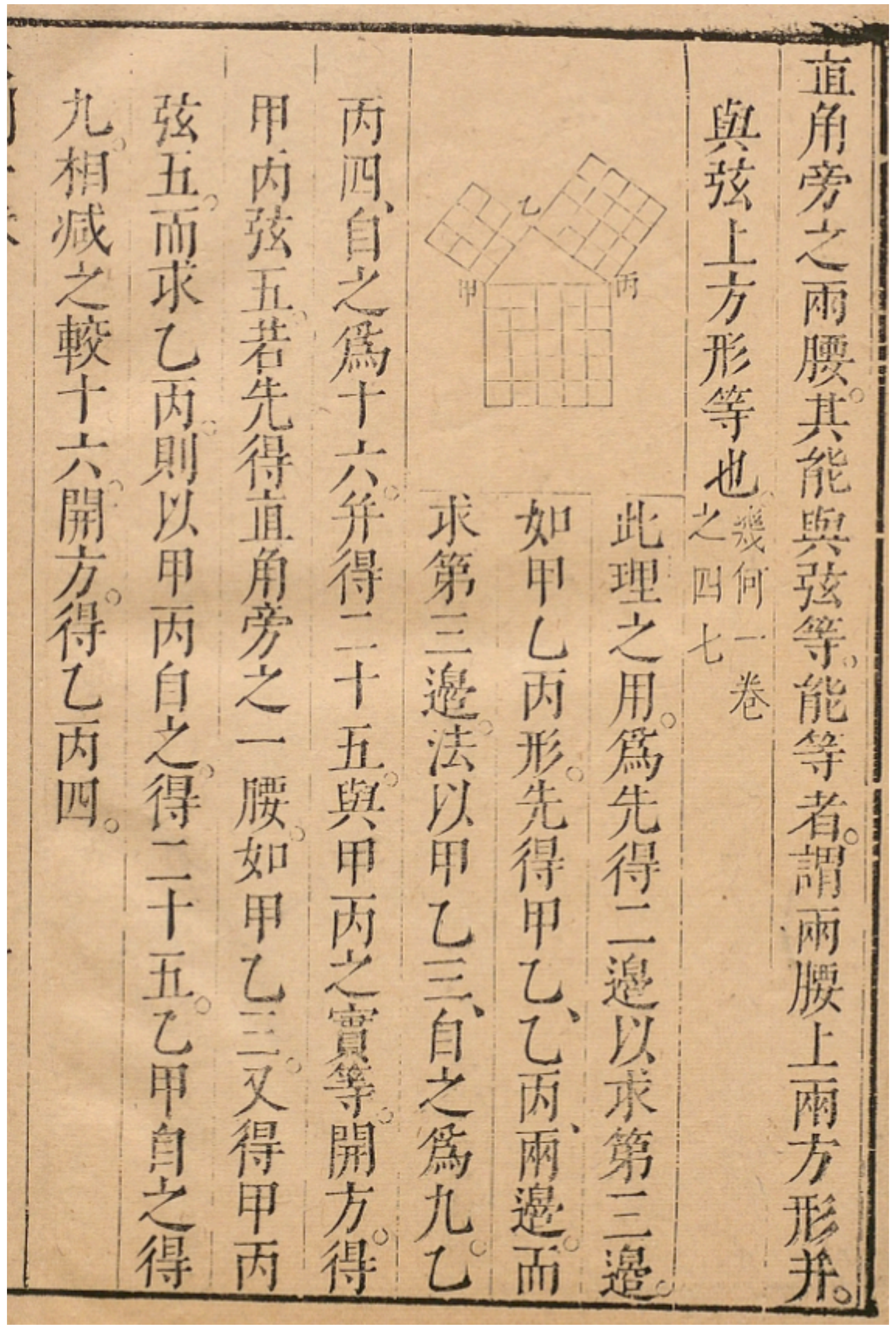



| | 余割 | 余切 | 余弦 | 正割 | 正切 | 正弦 | 0度 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 89;60 | | | | | | | 0;0 |
| 89;59 | | | | | | | 0;1 |
| 89;58 | | | | | | | 0;2 |
| 89;31 | | | | | | | 0;29 |
| 89;30 | | | | | | | 0;30 |
| 89度 | 正割 | 正切 | 正弦 | 余割 | 余切 | 余弦 | |

| | 1/ sin theta | 1/ tan theta | cos theta | 1/ cos theta | tan theta | sin theta | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 90 | #DIV/0! | #DIV/0! | 1.00000000 | 1.00000000 | 0.00000000 | 0.00000000 | 0 |
| 85 | 11.47371325 | 11.43005230 | 0.99619470 | 1.00381984 | 0.08748866 | 0.08715574 | 5 |
| 80 | 5.75877048 | 5.67128182 | 0.98480775 | 1.01542661 | 0.17632698 | 0.17364818 | 10 |
| 75 | 3.86370331 | 3.73205081 | 0.96592583 | 1.03527618 | 0.26794919 | 0.25881905 | 15 |
| 70 | 2.92380440 | 2.74747742 | 0.93969262 | 1.06417777 | 0.36397023 | 0.34202014 | 20 |
| 65 | 2.36620158 | 2.14450692 | 0.90630779 | 1.10337792 | 0.46630766 | 0.42261826 | 25 |
| 60 | 2.00000000 | 1.73205081 | 0.86602540 | 1.15470054 | 0.57735027 | 0.50000000 | 30 |
| 55 | 1.74344680 | 1.42814801 | 0.81915204 | 1.22077459 | 0.70020754 | 0.57357644 | 35 |
| 50 | 1.55572383 | 1.19175359 | 0.76604444 | 1.30540729 | 0.83909963 | 0.64278761 | 40 |
| 45 | 1.41421356 | 1.00000000 | 0.70710678 | 1.41421356 | 1.00000000 | 0.70710678 | 45 |
| | 1/ cos theta | tan theta | sin theta | 1/ sin theta | 1/ tan theta | cos theta | |

国立公文書館 https://www.digital.archives.go.jp/file/1084335
https://www.digital.archives.go.jp/item/593655



直角旁之兩腰。其能與弦等。能等者。謂兩腰上兩方形并。與弦上方形等也　幾何一卷之四七
此理之用。爲先得二邊以求第三邊。如甲乙丙形。先得甲乙、乙丙兩邊而求第三邊。法以甲乙三自之爲九。乙丙四自之爲十六。并得二十五。與甲丙之實等。開方得甲丙弦五。若先得直角旁之一腰。如甲乙三。又得甲丙弦五。而求乙丙。則以甲丙自之得二十五。乙甲自之得九。相減之較十六。開方得乙丙四。

大測　一巻

直角旁之両腰。其能與弦等．能等者。謂両腰上両方形并.

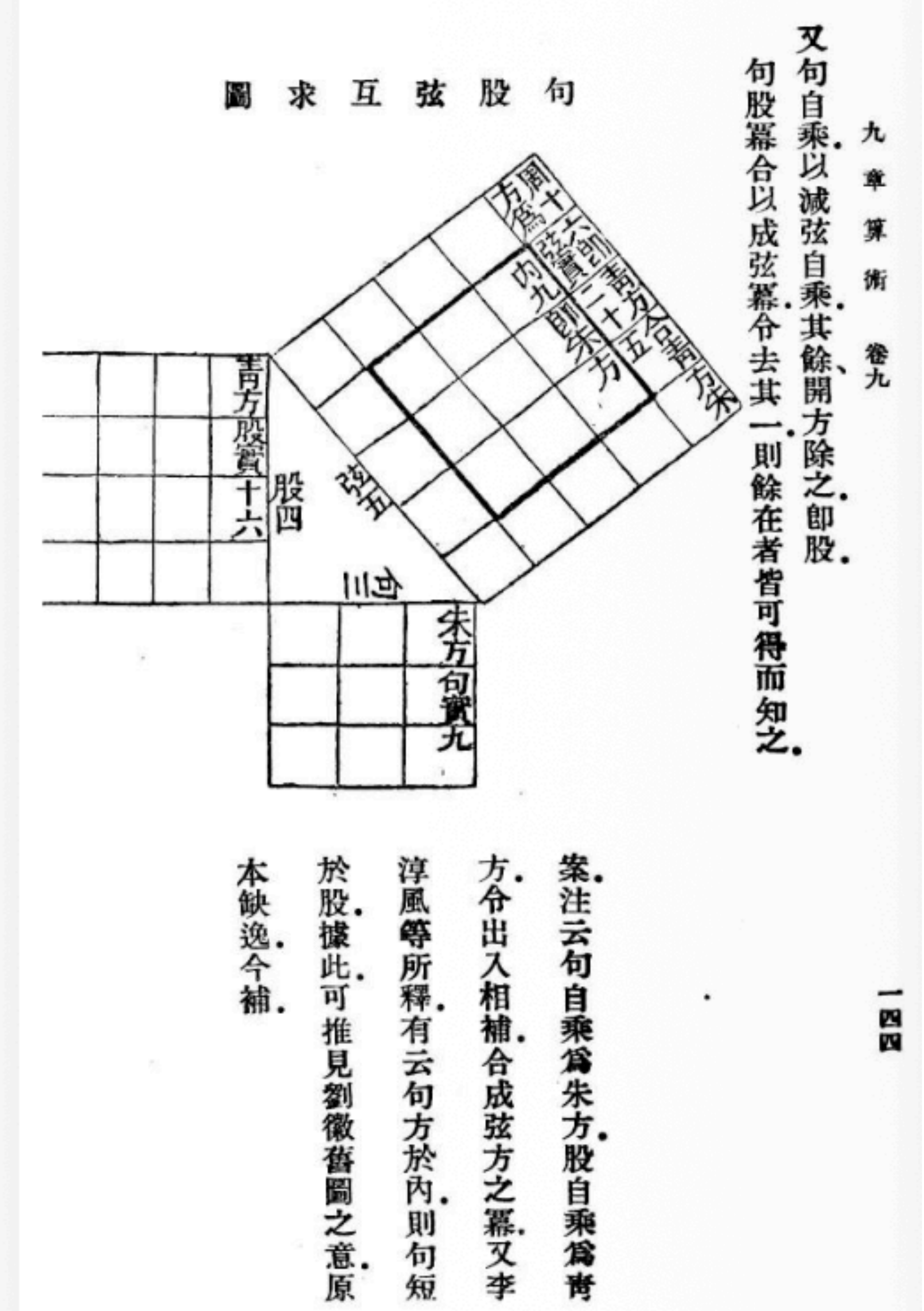
與弦上方形等也（幾何一巻之四七）

此理之用。爲先得二邊以求第三邊。如甲乙丙形。先得甲乙，乙丙，両邊。而求第三邊。法以甲乙三，自之爲九．乙丙四，自之爲十六．并得二十五．與甲丙之實等。開方。得甲内弦五若先得直角旁之一腰．如甲乙三又得甲丙弦五而求乙丙則以甲丙自之．得二十五．乙甲自之得九相減之較十六．開方得乙丙四.

直角の傍（かたわ）らの両腰。其の能は弦に等し。能の等しきは、両腰の上の両方形を并（あわ）すれば、弦の上の方形と等しきを謂うなり。（幾何一巻の四十七）

此の理の用は、先に二辺を得て以て第三辺を求むるを為す。甲乙丙の形の如きは、先に甲乙、乙丙の両辺を得て、而して第三辺を求む。法は、甲乙の三を以て、之を自して九と為し、乙丙の四を、之を自して十六と為し、并せて二十五を得。甲丙の実と等し。開方すれば、甲丙の弦の五を得。若し、先に直角の傍の一腰、如し甲乙の三の如き、又た甲丙の弦の五を得て、乙丙を求めば、則ち甲丙を以て之を自し、二十五を得、乙甲を之に自して九を得。相減（あいきゃく）するの較（こう）は十六なり。開方すれば、乙丙の四を得。

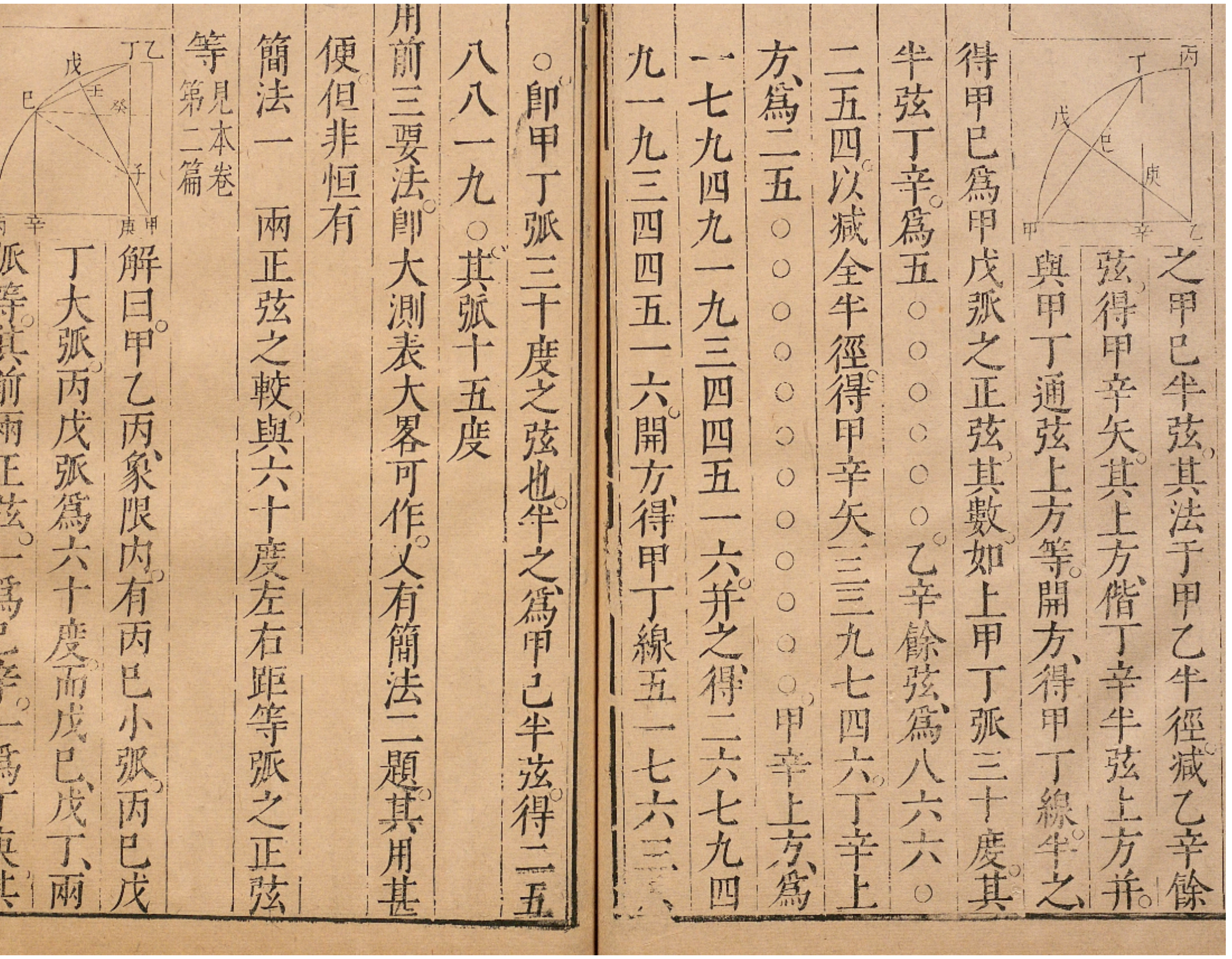

勾股弦（こうこげん）の定理／ピタゴラスの定理

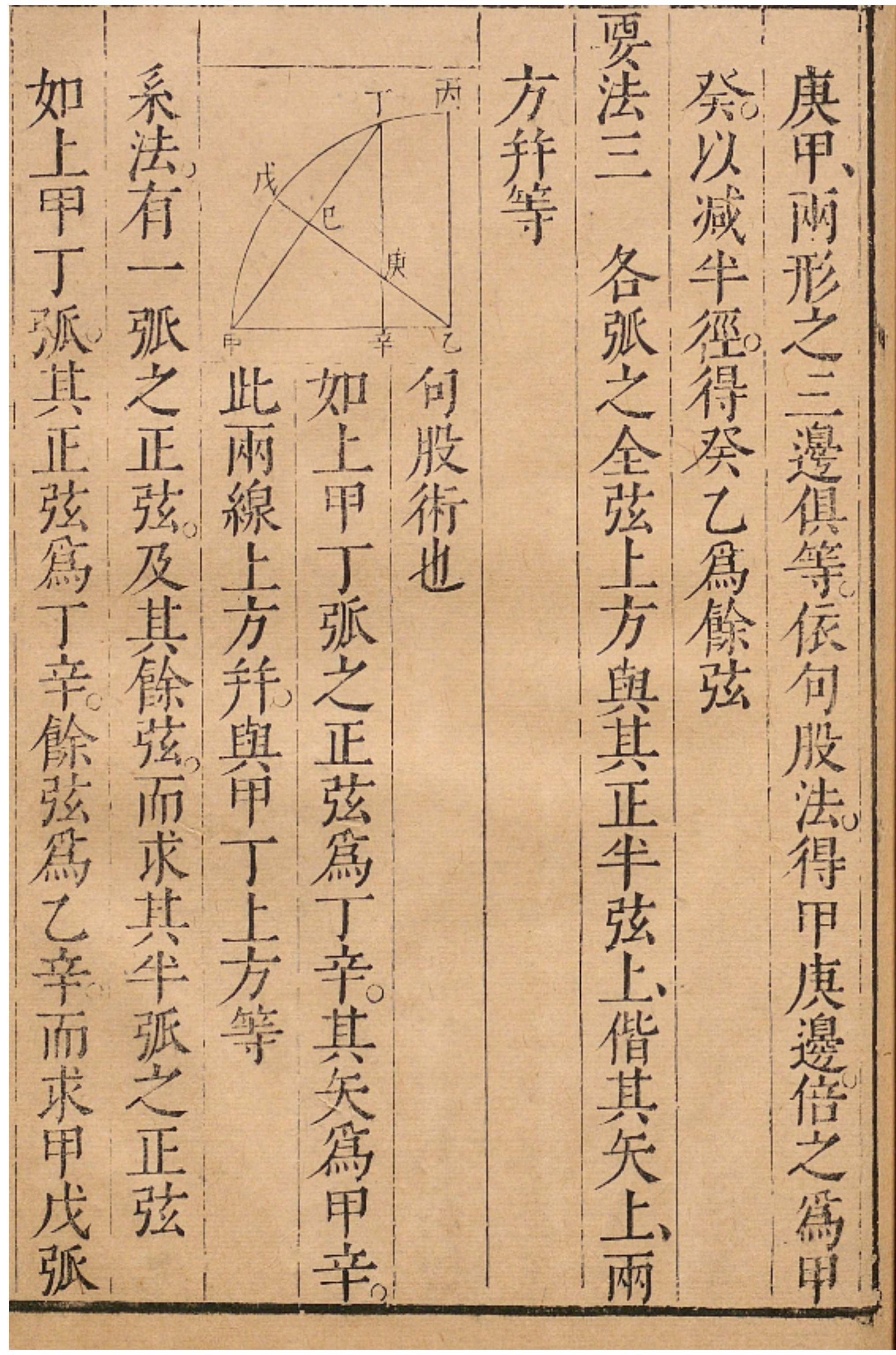

九章算術　卷九
又句自乘．以減弦自乘．其餘、開方除之．卽股．
句股冪合以成弦冪．令去其一．則餘在者皆可得而知之．
句股弦互求圖
案．注云句自乘爲朱方．股自乘爲青方．令出入相補．合成弦方之冪．又李淳風等所釋．有云句方於內．則句短於股．據此．可推見劉徽舊圖之意．原本缺逸．今補．
一四四

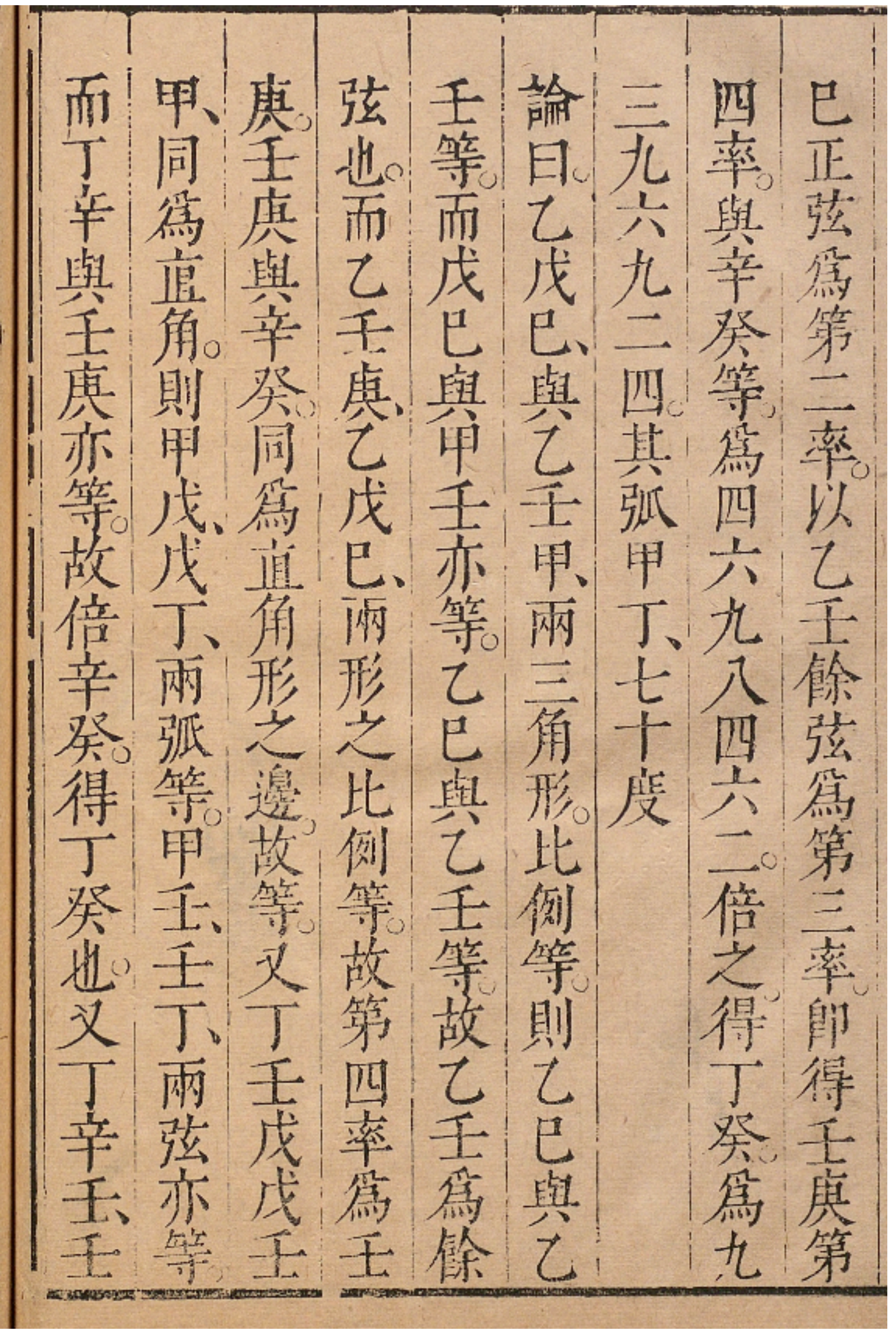
紀元前200年　九章算術
(wikimedia)

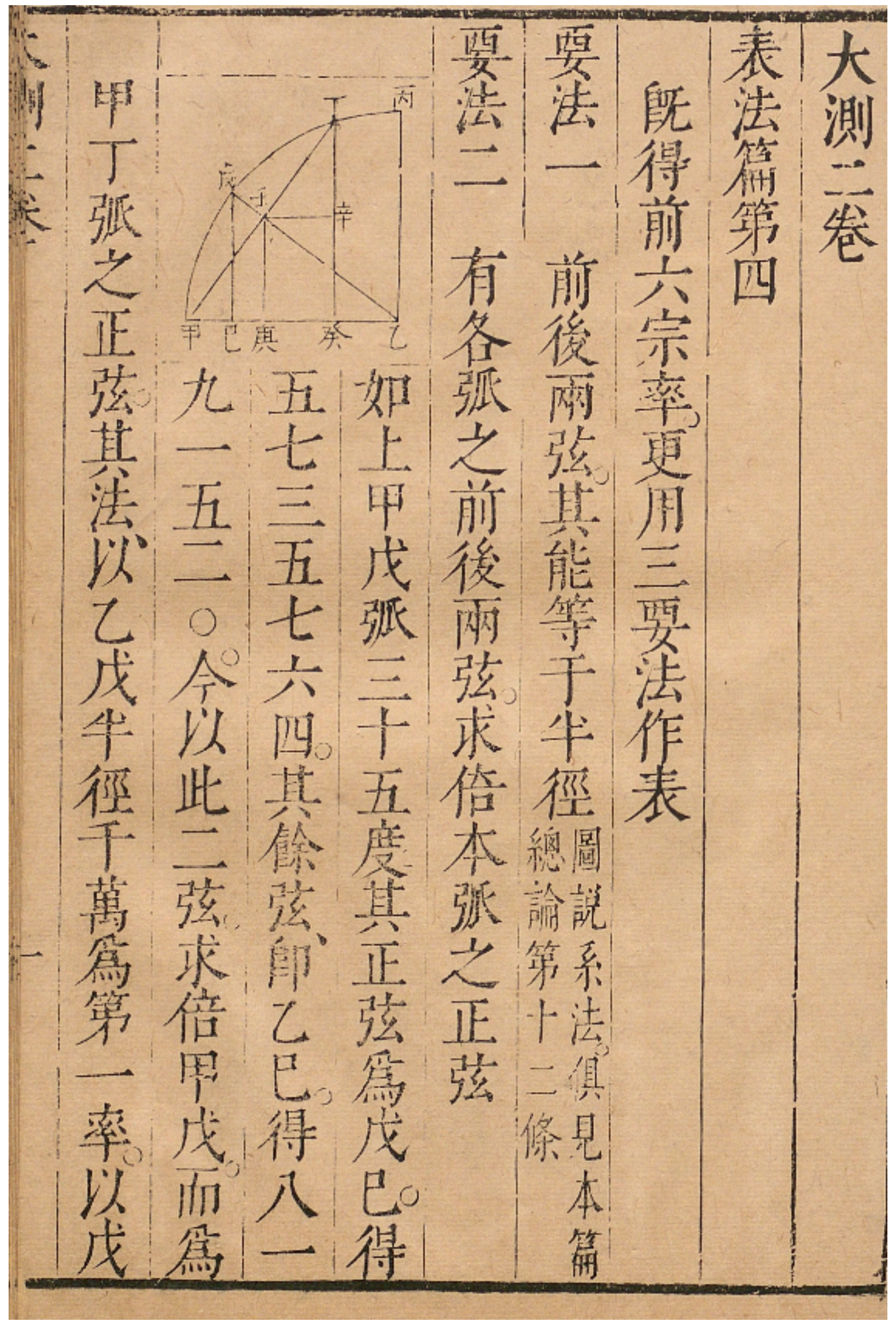
# 徐光啓『崇禎曆書』（1634）　大測　二巻

国立公文書館　https://www.digital.archives.go.jp/file/1084335
https://www.digital.archives.go.jp/item/593655








大測二卷
表法篇第四
既得前六宗率更用三要法作表
要法一　前後兩弦其能等于半徑　圖說總論第十二條系法俱見本篇
要法二　有各弧之前後兩弦求倍本弧之正弦
如上甲戊弧三十五度其正弦爲戊己得
五七三五七六四其餘弦卽乙己得八一
九一五二○今以此二弦求倍甲戊而爲
甲丁弧之正弦其法以乙戊半徑千萬爲第一率以戊

要法3

（原文）有各弧之前後両弦求倍本弧之正弦
（書き下し）各弧の全弦の上方は、其の正半弦の上と、其の矢の上とに偕（とも）にあり。両方并（あわ）すれば等し。

$$(2\sin\theta)^2 = (\sin 2\theta)^2 + (1-\cos 2\theta)^2. \qquad (9)$$

これは，半角の公式と等価である．

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \qquad (10)$$

要法2

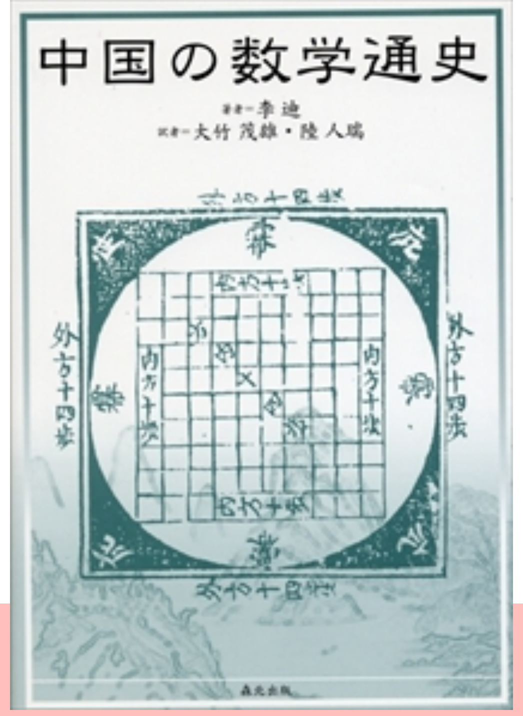
（原文）有各弧之前後両弦求倍本弧之正弦
（書き下し）各弧の前後の両弦有りて、本弧を倍する正弦を求む
ある角（弧）の正弦と余弦が分かっているときに，その 2 倍の角（倍本弧）の正弦は，

$$\sin 2\theta = (2\sin\theta)\cos\theta. \qquad \text{(倍角の公式)} \quad (8)$$

要法1

（原文）前後両弦其能等于半径
（書き下し）前後の両弦，其の能（のう）は半径に等し．
円において、ある弧の正弦と余弦（前後両弦）を二乗して足したものは，半径の二乗（単位円なら 1）に等しい．すなわち，

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad (7)$$



# 徐光啓『崇禎曆書』（1634）　大測　二巻

国立公文書館 https://www.digital.archives.go.jp/file/1084335
https://www.digital.archives.go.jp/item/593655

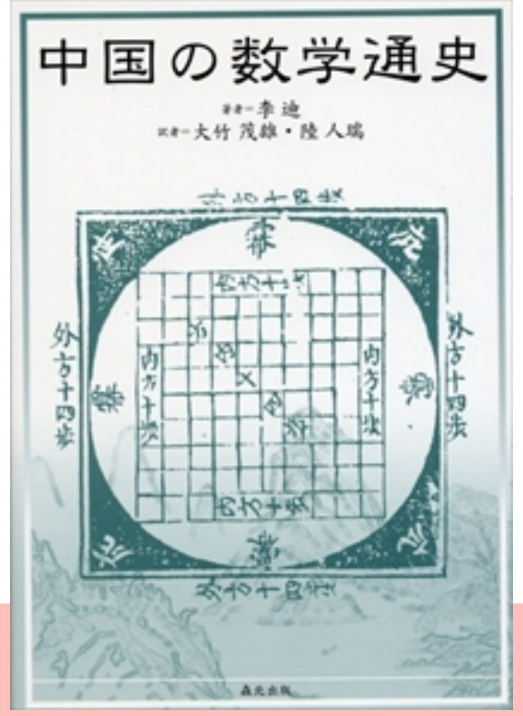

用前三要法卽大測表大畧可作又有簡法二題其用甚便但非恒有
簡法一　兩正弦之較與六十度左右距等弧之正弦等 見本卷第二篇
解曰甲乙丙象限内有丙巳小弧丙巳戊丁大弧丙戊弧爲六十度而戊巳戊丁兩弧等其前兩正弦一爲巳辛一爲丁庚其較丁癸題言丁癸較與巳壬壬丁兩正弦各等
論曰試作一巳子線則丁巳子成三邊等角形何也此形中有子丁壬壬巳子兩三角形此兩角形等又何也子壬同腰而丁壬壬巳兩腰等則丁壬巳壬兩直角亦等而丁子子巳兩底亦等子丁巳丁兩角亦等又丙戊弧既六十度其餘戊乙弧必三十度而乙甲戊角爲三十度角甲乙庚丁既平行甲戊線截二線于子卽内外角等而丁子戊角亦三十度戊子巳角亦三十度是丁子巳爲六十度角也丁與全巳全子三角既等兩直角一之三十二則共爲一百八十度于中減全子角六十度則丁巳兩全角百二十度而此兩角既等卽各得六十度則此形之三角三邊俱等大丁巳巳子兩線等則巳癸垂線所分之丁癸子癸兩直角亦等而巳癸同腰則丁癸與癸子必等丁癸爲丁子之半丁壬爲丁巳之半全線等則所分必等是丁癸與丁壬等與壬巳亦等
系題兩弧各有其正半弦兩半弦至弧之𪓐在六十度之左右而距度𪓐等則前兩正半弦之較卽後兩半弦

簡法１

（原文）両正弦之較。與六十度左右距等弧之正弦等

（書き下し）両正弦の較（こう）は、六十度の左右に距（さ）等しき弧の正弦に等し。

$$\sin(60^\circ + A) - \sin(60^\circ - A) = \sin A \qquad (11)$$



# 徐光啓『崇禎曆書』（1634）　大測　二巻

国立公文書館 https://www.digital.archives.go.jp/file/1084335
https://www.digital.archives.go.jp/item/593655


簡法２

（書き下し）不等なる両弧の各正弦有り。又、其の各余弦有り。而（しか）して両弦相い加え、相い減ずる弧の各正弦を求む。其の法に二有り。一に相い加うる、一に相い減ずるなり。
相い加うるは、前弧の正弦を以て後弧の余弦を乗じ、後弧の正弦を以て前弧の余弦を乗ず。各々数を得、之を併せて実と為す。半径を以て法と為して、之を一にすれば、両弧相い加えて総弧と為るの正弦を得。
相い減ずるは、亦（また）前法の如く互いに乗じ、各々の数を得。相い減じ、余りを実と為す。半径を以て法と為せば、両弧相い減ずる弧の正弦と為る。

（原文）有両弧不等之各正弦。又有其各餘弦。而求両弦相加、相減弧之各正弦。其法有二。一相加。一相減。相加者。以前弧之正弦。乗後弧之餘弦。以後弧之正弦。乗前弧之餘弦。各得数。并之為實。以半径為法。而一。得両弧相加為總弧之正弦。相減者。亦如前法互乗、得各數。相減、餘為實。以半径為法。為両弧相減弧之正弦

これは加法定理を説明している．

$$\sin(A \pm B) = \sin A\ \cos B \pm \cos A\ \sin B$$

# 宣教師がヨーロッパから持ってきた本は？

## Christoph Clavius

グレゴリオ暦をつくった
宣教師　M.Ricci の教師


表 1.3.1　漢訳書とクラヴィウス著作の利用

| クラヴィウスの著作 | 漢語著作の成立 | 漢語著作タイトル | 著者/翻訳者 |
|---|---|---|---|
| 『エウクレイデス原論 (Euclidis elementorum)』1574 年 | 1607 年 | 『幾何原本』 | マテオ・リッチ，徐光啓 |
| 『アストロラビウム (Astrolabium)』1593 年 | 1607 年 | 『渾蓋通憲図説』 | マテオ・リッチ，李之藻 |
| 『実用幾何 (Geometrica practica)』1604 年 | 1608 年 | 『測量法義』 | マテオ・リッチ，徐光啓 |
| 『サクロボスコ天球論註解 (In sphaeram Ioannis de Sacro Bosco commentarius)』1570 年 | 1608 年 | 『乾坤体義』 | マテオ・リッチ，李之藻 |
| 『実用算術要綱 (Epitome arithmeticae practicae)』1583 年 | 1614 年 | 『同文算指』 | マテオ・リッチ，李之藻 |
| 『サクロボスコ天球論註解 (In sphaeram Ioannis de Sacro Bosco commentarius)』1570 年 | 1614 年 | 『圜容較義』 | マテオ・リッチ，李之藻 |
| 『実用幾何 (Geometria practica)』1604 年 | 1631 年 | 『測量全義』 | ジャコモ・ロー |

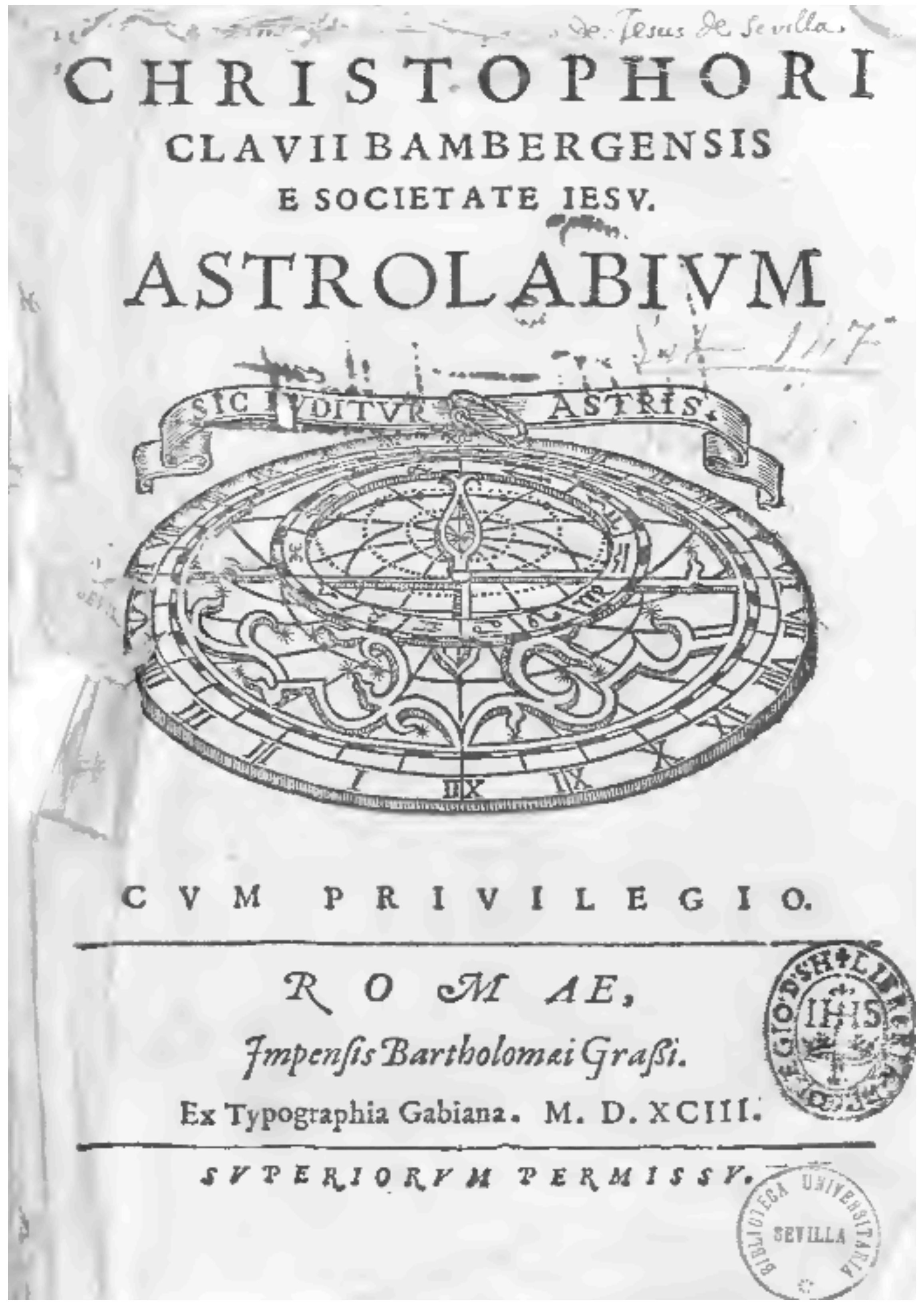

## B. Pitiscus

表 B.2: ルネサンスのヨーロッパでの三角法の発展.

| 名前生没年 | 代表著書と数学的な貢献 | 三角関数表 |
|---|---|---|
| レギオモンタヌス 1436-1476 (Regiomontanus; Johannes Müller) | 『すべての三角形について (De Triangulis Omnimodis)』(1464, 刊行は 1533 年) 三角法を天文学から独立した分野にした．正弦を用いた．正弦定理，球面余弦定理を示した． | 半径 60000 の sin |
| コペルニクス 1473-1543 (Nicolaus Copernicus) | 『天球の回転について (De revolutionibus orbium coelestium)』(1543) 球面三角法を詳述して，地動説を提案. | 半径 $10^5$，10 分角ごとの正弦表 |
| レティクス 1514-1574 (Georg Joachim Rheticus) | 『三角形理論のカノン（Canon doctrinætriangulorum）』(1551) 『三角法（Opus Palatinum de triangulis）』(1596) 三角関数を「円の弦」ではなく「直角三角形の辺の比」として初めて定義. | 半径 $10^4$，10 秒角ごと. 6 種の三角関数 |
| ヴィエト　1540-1603 (François Viète) | 『数学的表（Canon mathematicus）』(1579) 和積の公式，$n$ 倍角公式 | 半径 $10^5$，1 分角ごと. 6 種の三角関数 |
| ピティスクス 1561-1613 (Bartholomäus Pitiscus) | 『三角法（Trigonometria）』(1595) 『数学宝典 (Thesaurus Mathematicus)』(1613) Trigonometry という用語を創案．和積の公式（prosthaphaeresis, プロスタパエレシス）を用いて表計算．レティクスの遺稿を整理・修正し普及させた. | 半径 $10^{15}$，10 秒角ごと，sin, tan, sec |
| ステヴィン 1548-1620 (Simon Stevin) | 『三角法 (De Driehouckhandel)』(1605) 十進小数の記法を考案し，三角関数の値を小数で扱う．測量への応用を詳述. | sin, tan, sec |

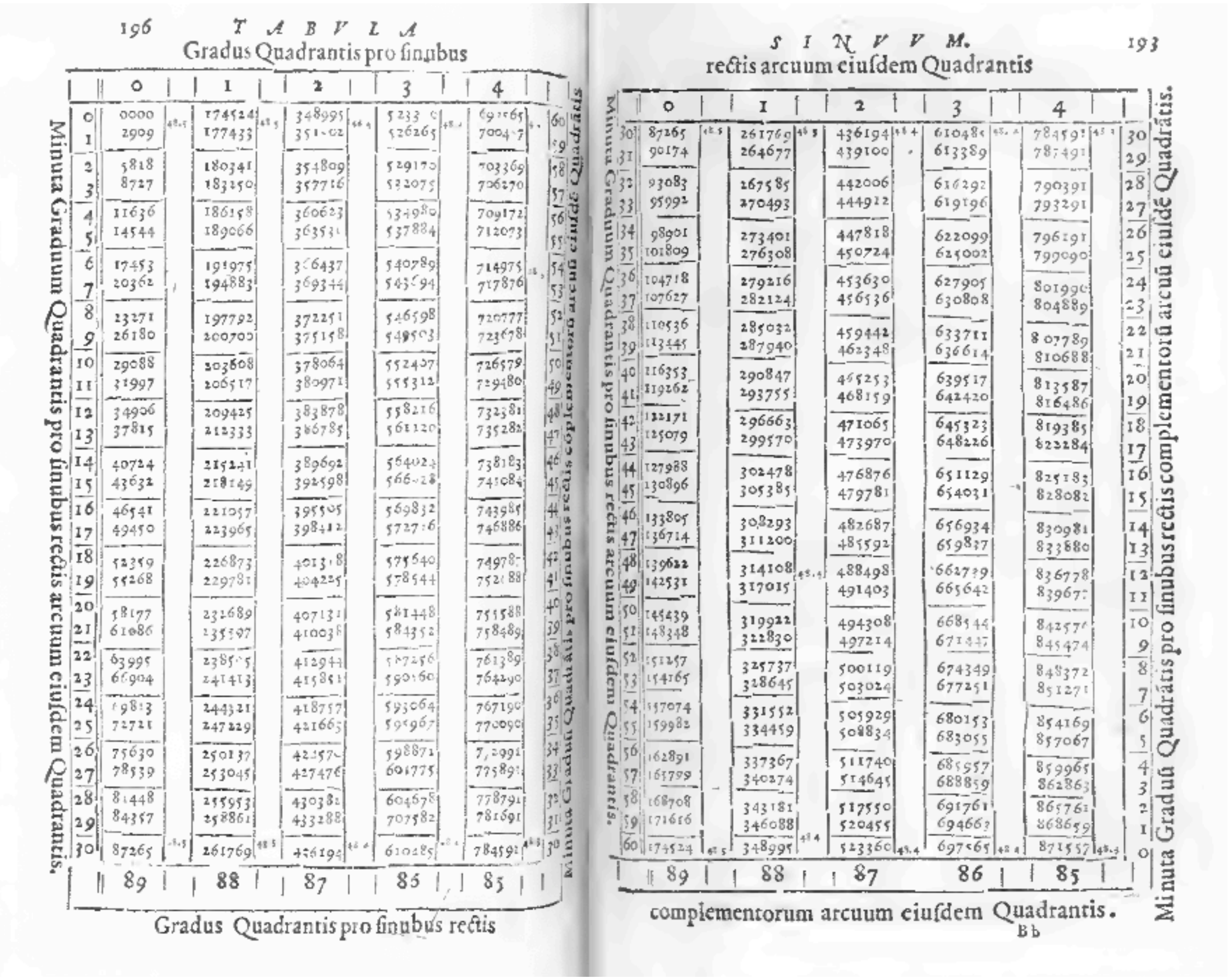
# Christoph Clavius, Astrolabium (1593)

https://archive.org/details/ARes43405





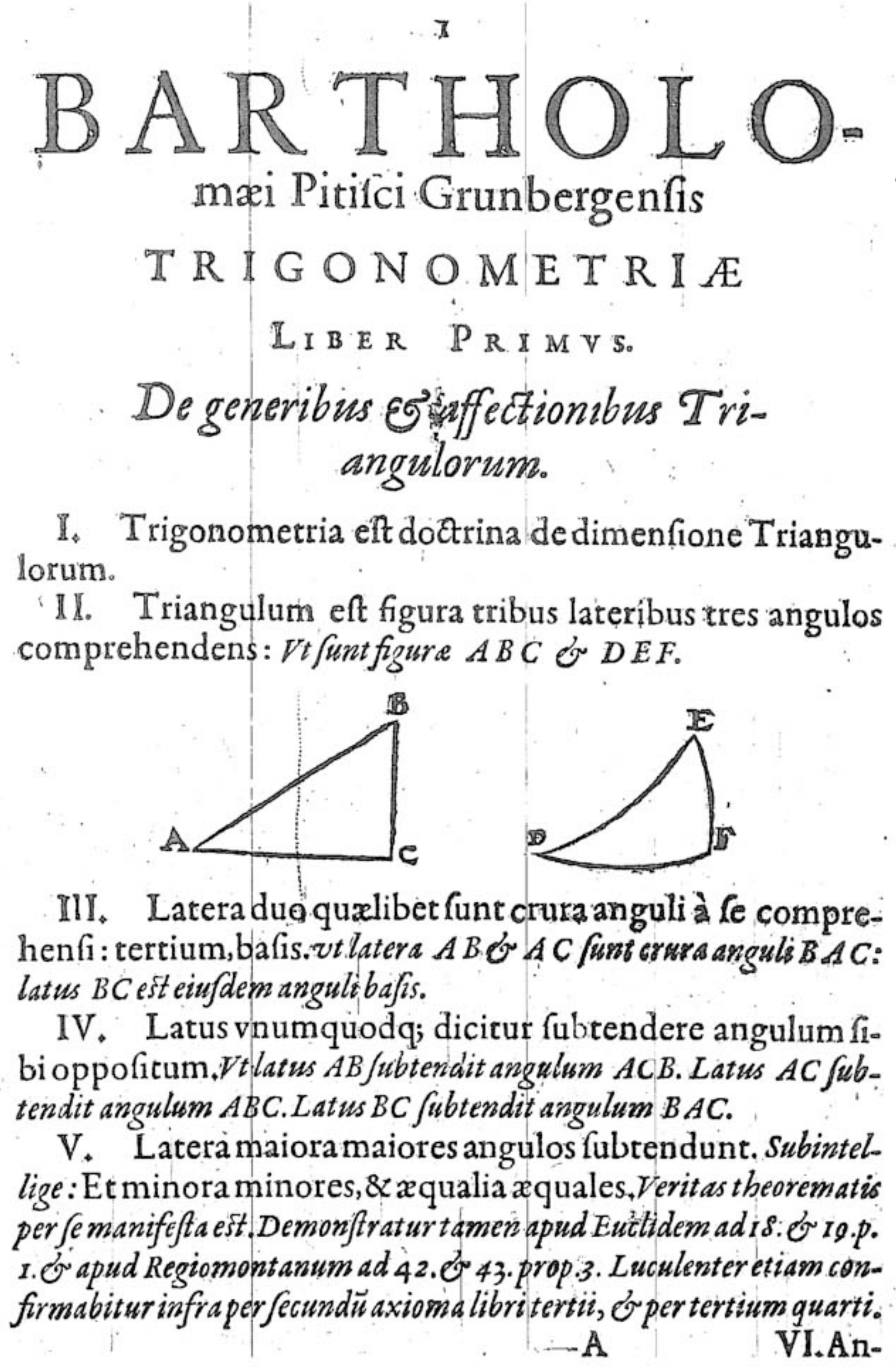
アストロラーベの構造，幾何学的な設計原理，および使用法（時刻の測定、星の位置計算、測量など）を詳細に解説した書.




7桁の正弦表

# ピティスクス『三角法』1612

Pitiscus（1561-1613）　『Trigonometriae sive De dimensione triangulorum』

1

BARTHOLO-
mæi Pitiſci Grunbergenſis
TRIGONOMETRIÆ
LIBER PRIMVS.

*De generibus & affectionibus Triangulorum.*

I. Trigonometria eſt doctrina de dimenſione Triangulorum.

II. Triangulum eſt figura tribus lateribus tres angulos comprehendens: *Vt ſunt figuræ ABC & DEF.*

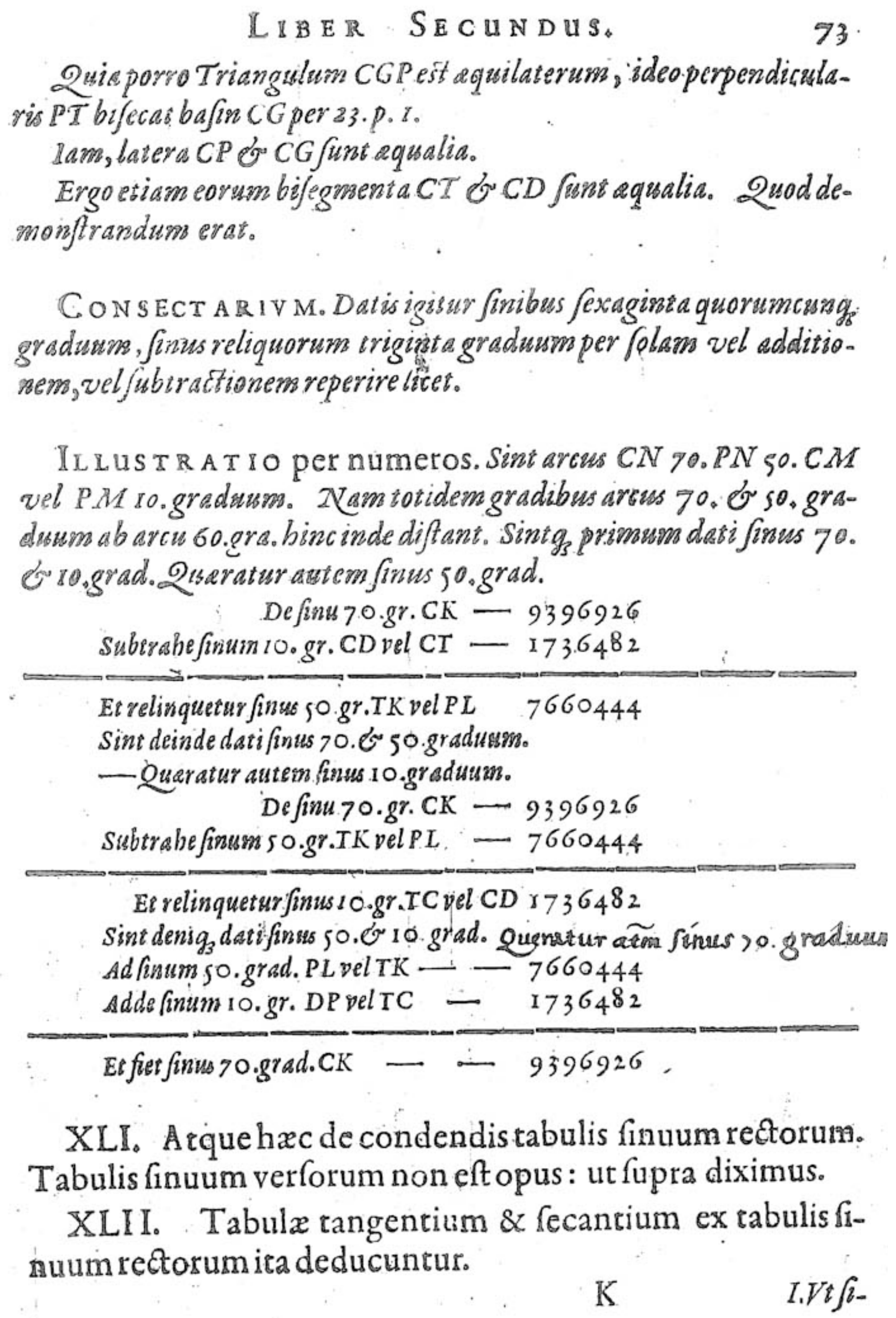


III. Latera duo quælibet ſunt crura anguli à ſe comprehenſi: tertium, baſis. *vt latera AB & AC ſunt crura anguli BAC: latus BC eſt eiuſdem anguli baſis.*

IV. Latus vnumquodq; dicitur ſubtendere angulum ſibi oppoſitum. *Vt latus AB ſubtendit angulum ACB. Latus AC ſubtendit angulum ABC. Latus BC ſubtendit angulum BAC.*

V. Latera maiora maiores angulos ſubtendunt. *Subintellige:* Et minora minores, & æqualia æquales. *Veritas theorematis per ſe manifeſta eſt. Demonſtratur tamen apud Euclidem ad 18. & 19. p. 1. & apud Regiomontanum ad 42. & 43. prop. 3. Luculenter etiam confirmabitur infra per ſecundũ axioma libri tertii, & per tertium quarti.*

A　　VI. An-



LIBER SECUNDUS.　73

*Quia porro Triangulum CGP eſt æquilaterum, ideo perpendicularis PT biſecat baſin CG per 23. p. 1.*

*Iam, latera CP & CG ſunt æqualia.*

*Ergo etiam eorum biſegmenta CT & CD ſunt æqualia. Quod demonſtrandum erat.*

CONSECTARIVM. *Datis igitur ſinibus ſexaginta quorumcunq; graduum, ſinus reliquorum triginta graduum per ſolam vel additionem, vel ſubtractionem reperire licet.*

ILLUSTRATIO per numeros. *Sint arcus CN 70. PN 50. CM vel PM 10. graduum. Nam totidem gradibus arcus 70. & 50. graduum ab arcu 60. gra. hinc inde diſtant. Sintq; primum dati ſinus 70. & 10. grad. Quæratur autem ſinus 50. grad.*

*De ſinu 70. gr. CK* — 9396926
*Subtrahe ſinum 10. gr. CD vel CT* — 1736482

*Et relinquetur ſinus 50 gr. TK vel PL* 7660444
*Sint deinde dati ſinus 70. & 50. graduum.*
—*Quæratur autem ſinus 10. graduum.*
*De ſinu 70. gr. CK* — 9396926
*Subtrahe ſinum 50. gr. TK vel PL* — 7660444

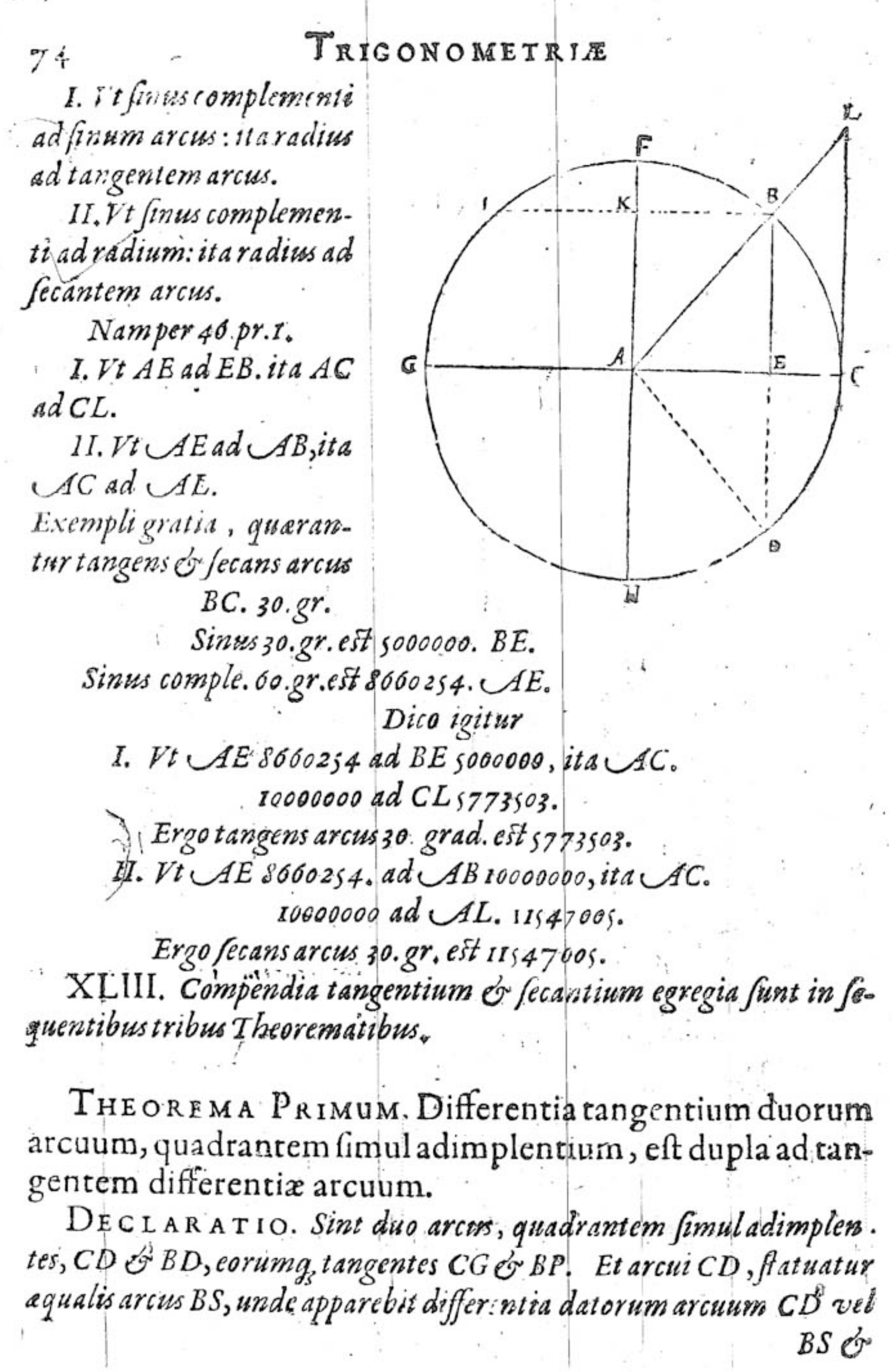
*Et relinquetur ſinus 10. gr. TC vel CD* 1736482
*Sint deniq; dati ſinus 50. & 10. grad. Quæratur autem ſinus 70. graduum*
*Ad ſinum 50. grad. PL vel TK* — — 7660444
*Adde ſinum 10. gr. DP vel TC* — 1736482

*Et fiet ſinus 70. grad. CK* — — 9396926

XLI. Atque hæc de condendis tabulis ſinuum rectorum. Tabulis ſinuum verſorum non eſt opus: ut ſupra diximus.

XLII. Tabulæ tangentium & ſecantium ex tabulis ſinuum rectorum ita deducuntur.

K　　*I. Vt ſi-*



74　TRIGONOMETRIÆ

*I. Vt ſinus complementi ad ſinum arcus: ita radius ad tangentem arcus.*

*II. Vt ſinus complementi ad radium: ita radius ad ſecantem arcus.*

*Nam per 46. pr. 1.*

*I. Vt AE ad EB. ita AC ad CL.*

*II. Vt AE ad AB, ita AC ad AL.*

*Exempli gratia, quærantur tangens & ſecans arcus BC. 30. gr.*



*Sinus 30. gr. eſt 5000000. BE.*
*Sinus comple. 60. gr. eſt 8660254. AE.*
*Dico igitur*
*I. Vt AE 8660254 ad BE 5000000, ita AC. 10000000 ad CL 5773503.*
*Ergo tangens arcus 30. grad. eſt 5773503.*
*II. Vt AE 8660254. ad AB 10000000, ita AC. 10000000 ad AL. 11547005.*
*Ergo ſecans arcus 30. gr. eſt 11547005.*

XLIII. *Compendia tangentium & ſecantium egregia ſunt in ſequentibus tribus Theorematibus.*

THEOREMA PRIMUM. Differentia tangentium duorum arcuum, quadrantem ſimul adimplentium, eſt dupla ad tangentem differentiæ arcuum.

DECLARATIO. *Sint duo arcus, quadrantem ſimul adimplentes, CD & BD, eorumq; tangentes CG & BP. Et arcui CD, ſtatuatur æqualis arcus BS, unde apparebit differentia datorum arcuum CD vel BS &*

# ピティスクス『三角法』1612

Pitiscus（1561-1613）　『Trigonometriae sive De dimensione triangulorum』

10秒角間隔で15桁の精度を持つ

O. Grad. O. Prim.

| Secunda | Sinus | 1'' | Targens | 1'' | Secans | 1'' |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 48 | 49 | 48 | 49 | 100000.00000.12 | 35 |
| 2 | 97 | 48 | 97 | 48 | 100000.00000.47 | 59 |
| 3 | 1.45 | 49 | 1.45 | 49 | 100000.00001.06 | 82 |
| 4 | 1.94 | 48 | 1.94 | 48 | 100000.00001.88 | 106 |
| 5 | 2.42 | 49 | 2.42 | 49 | 100000.00002.94 | 129 |
| 6 | 2.91 | 48 | 2.91 | 48 | 100000.00004.23 | 153 |
| 7 | 3.39 | 49 | 3.39 | 49 | 100000.00005.76 | 176 |
| 8 | 3.88 | 48 | 3.88 | 48 | 100000.00007.52 | 200 |
| 9 | 4.36 | 49 | 4.36 | 49 | 100000.00009.52 | 223 |
| 10 | 4.85 | 48 | 4.85 | 48 | 100000.00011.75 | 247 |
| 11 | 5.33 | 49 | 5.33 | 49 | 100000.00014.22 | 270 |
| 12 | 5.82 | 48 | 5.81 | 48 | 100000.00016.92 | 294 |
| 13 | 6.30 | 49 | 6.30 | 49 | 100000.00019.86 | 317 |
| 14 | 6.79 | 48 | 6.79 | 48 | 100000.00023.03 | 341 |
| 15 | 7.27 | 49 | 7.27 | 49 | 100000.00026.44 | 365 |
| 16 | 7.76 | 48 | 7.76 | 48 | 100000.00030.09 | 387 |
| 17 | 8.24 | 49 | 8.24 | 49 | 100000.00033.96 | 412 |
| 18 | 8.73 | 48 | 8.73 | 48 | 100000.00038.08 | 435 |
| 19 | 9.21 | 49 | 9.21 | 49 | 100000.00042.43 | 458 |
| 20 | 9.70 | 48 | 9.70 | 48 | 100000.00047.01 | 482 |
| 21 | 10.18 | 49 | 10.18 | 49 | 100000.00051.83 | 505 |
| 22 | 10.67 | 48 | 10.67 | 48 | 100000.00056.88 | 529 |
| 23 | 11.15 | 49 | 11.15 | 49 | 100000.00062.17 | 552 |
| 24 | 11.64 | 48 | 11.64 | 48 | 100000.00067.69 | 576 |
| 25 | 12.12 | 49 | 12.12 | 49 | 100000.00073.45 | 599 |
| 26 | 12.61 | 48 | 12.61 | 48 | 100000.00079.44 | 623 |
| 27 | 13.09 | 48 | 13.09 | 48 | 100000.00085.67 | 647 |
| 28 | 13.57 | 49 | 13.57 | 49 | 100000.00092.14 | 670 |
| 29 | 14.06 | 48 | 14.06 | 48 | 100000.00098.84 | 693 |
| 30 | 14.54 | 49 | 14.54 | 49 | 100000.00105.77 | 717 |

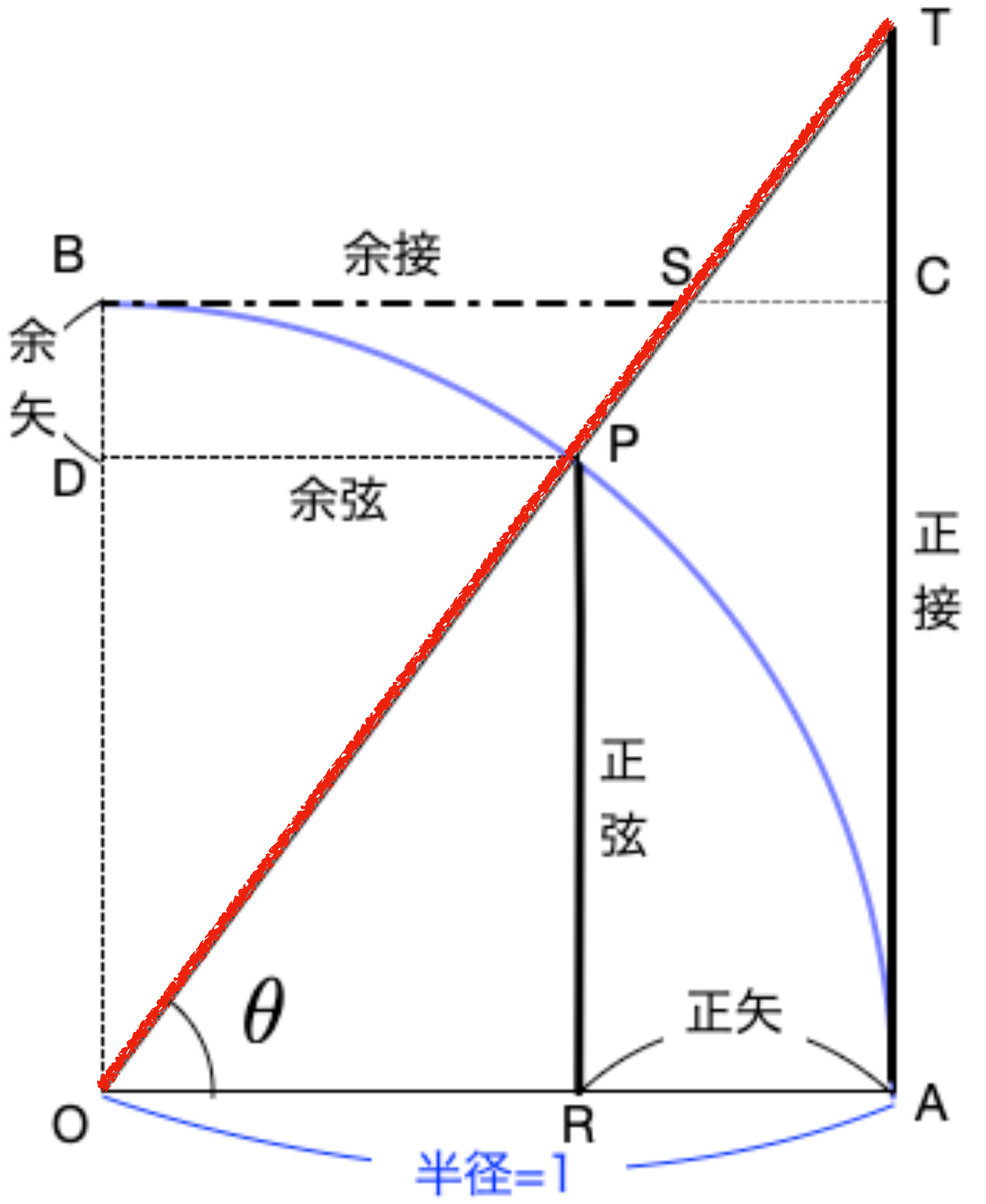
89. Grad. 59. prim.

| Secunda | Sinus | 1'' | Tangens | 1'' | Secans | 1'' |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 59 | 99999.99999.88 | | 20626480624. | Vt in secantibus | 20626480625. | |
| 58 | 99999.99999.53 | 35 | 10313240312. | | 10313240313. | 10313240312 |
| 57 | 99999.99998.94 | 59 | 6875493541. | | 6875493542. | 3437746770 |
| 56 | 99999.99998.12 | 82 | 5156620156. | | 5156620157. | 1788673385 |
| 55 | 99999.99997.06 | 106 | 4125296124. | | 4125296125. | 1031324031 |
| 54 | 99999.99995.77 | 129 | 3437746770. | | 3437746771. | 687549354 |
| 53 | 99999.99994.24 | 153 | 2946640088. | | 2946640090. | 491106681 |
| 52 | 99999.99992.48 | 176 | 2578310077. | | 2578310079. | 368330011 |
| 51 | 99999.99990.48 | 200 | 2291831179. | | 2291831181. | 286478898 |
| 50 | 99999.99988.25 | 223 | 2062648061. | | 2062648063. | 229183118 |
| 49 | 99999.99985.78 | 247 | 1875134600. | | 1875134603. | 187513460 |
| 48 | 99999.99983.08 | 270 | 1718873383. | | 1718873386. | 156261217 |
| 47 | 99999.99980.14 | 294 | 1586652354. | | 1586652357. | 132221029 |
| 46 | 99999.99976.97 | 317 | 1473320042. | | 1473320046. | 113332311 |
| 45 | 99999.99973.56 | 341 | 1375098706. | | 1375098710. | 9822[illegible]36 |
| 44 | 99999.99969.91 | 365 | 1289155036. | | 1289155040. | 85949670 |
| 43 | 99999.99966.04 | 387 | 1213322388. | | 1213322392. | 75832648 |
| 42 | 99999.99961.92 | 412 | 1145915587. | | 1145915592. | 67406800 |
| 41 | 99999.99957.57 | 435 | 1085604240. | | 1085604245. | 60311347 |
| 40 | 99999.99952.99 | 458 | 1031324028. | | 1031324033. | 54280212 |
| 39 | 99999.99948.17 | 482 | 982213360. | | 982213365. | 49110668 |
| 38 | 99999.99943.12 | 505 | 937567297. | | 937567303. | 44646062 |
| 37 | 99999.99937.83 | 529 | 896803503. | | 896803508. | 40763795 |
| 36 | 99999.99932.31 | 552 | 859436689. | | 859436695. | 37366813 |
| 35 | 99999.99926.55 | 576 | 825059221. | | 825059227. | 34377468 |
| 34 | 99999.99920.55 | 600 | 793326174. | | 793326180. | 31733047 |
| 33 | 99999.99914.33 | 622 | 763943722. | | 763943729. | 29382451 |
| 32 | 99999.99907.86 | 647 | 736660018. | | 736660025. | 27283704 |
| 31 | 99999.99901.16 | 670 | 711257948. | | 711257955. | 25402020 |
| 30 | 99999.99894.23 | 693 | 687549349. | | 687549357. | 23708598 |

A 2

theta = (0 + 0/60 + 30/3600) Degree;
sin = 0.00014544410535843506104
tan = 0.00014544410382007367148
sec = 1.0000000105769938358

theta = (89 + 59/60 + 30/3600) Degree;
sin = 0.99999998942300627605
tan = 6875.4934930885103259
sec = 6875.4935658105626205




天文学者は, sin
測量士は, tan
航海士は, sec

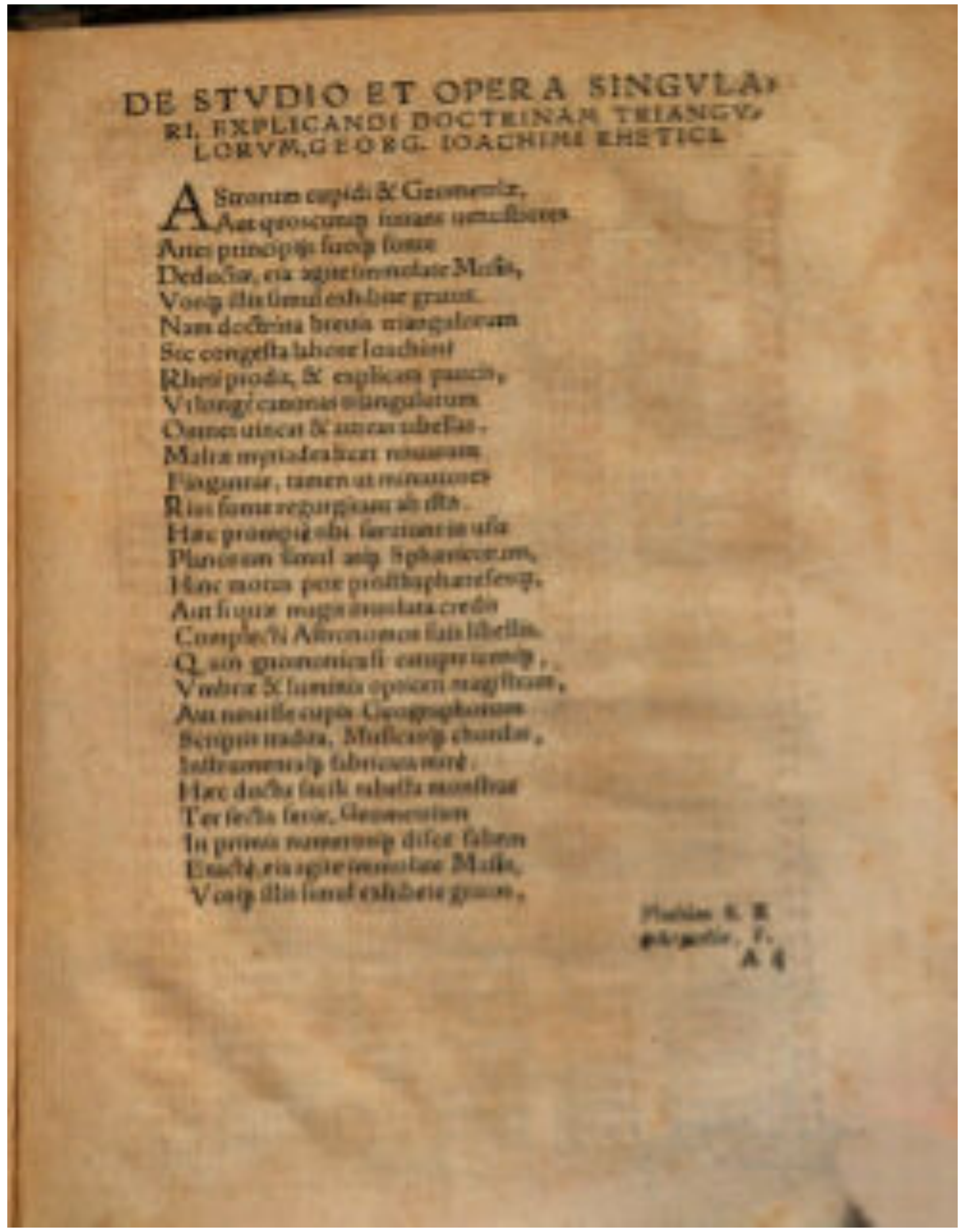
The third important point is the structure of trigonometric theory itself. Astronomers used mainly sines. On the other hand, surveyors used an equivalent to the tangent for their calculation, while for many navigators, whom I shall discuss later, the secant was an important function.[38] It was not until in the sixteenth century that these three functions, treated separately for a long time, were unified into the trigonometry, based upon a circle and a triangle inside of it, through the works of Rheticus, etc.. This unification provided a new systematic trigonometry with mathematical foundations, and all applications which had existed separately were subsequently discussed together under this new trigonometry.

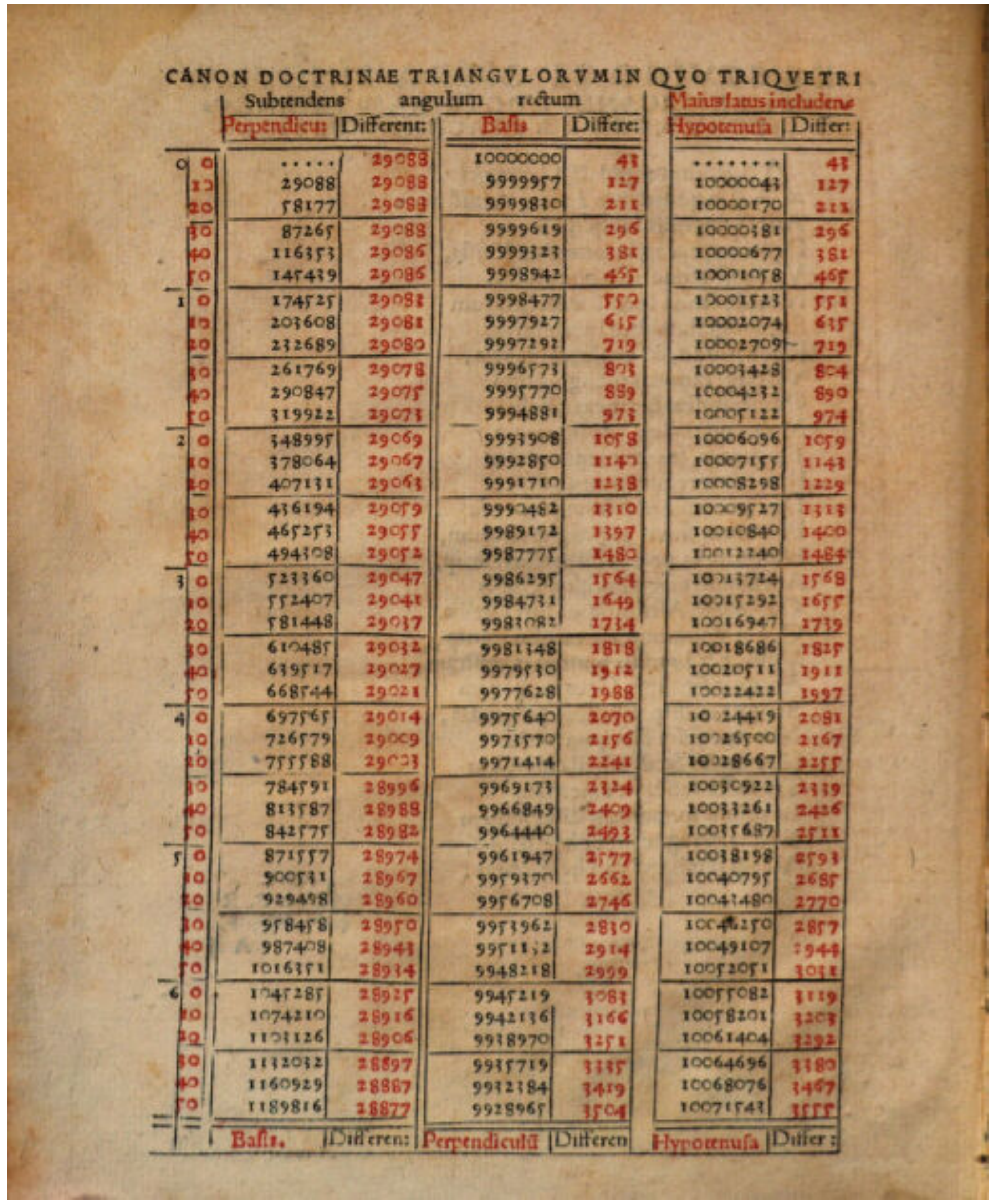
N. Miura, Historia Scientriarum 30 (1986) 63-

# レティクス『三角形理論のカノン』1551

## Rheticus『Canon doctrinætriangulorum』

10秒角間隔で8桁の精度を持つ
６種類の三角関数

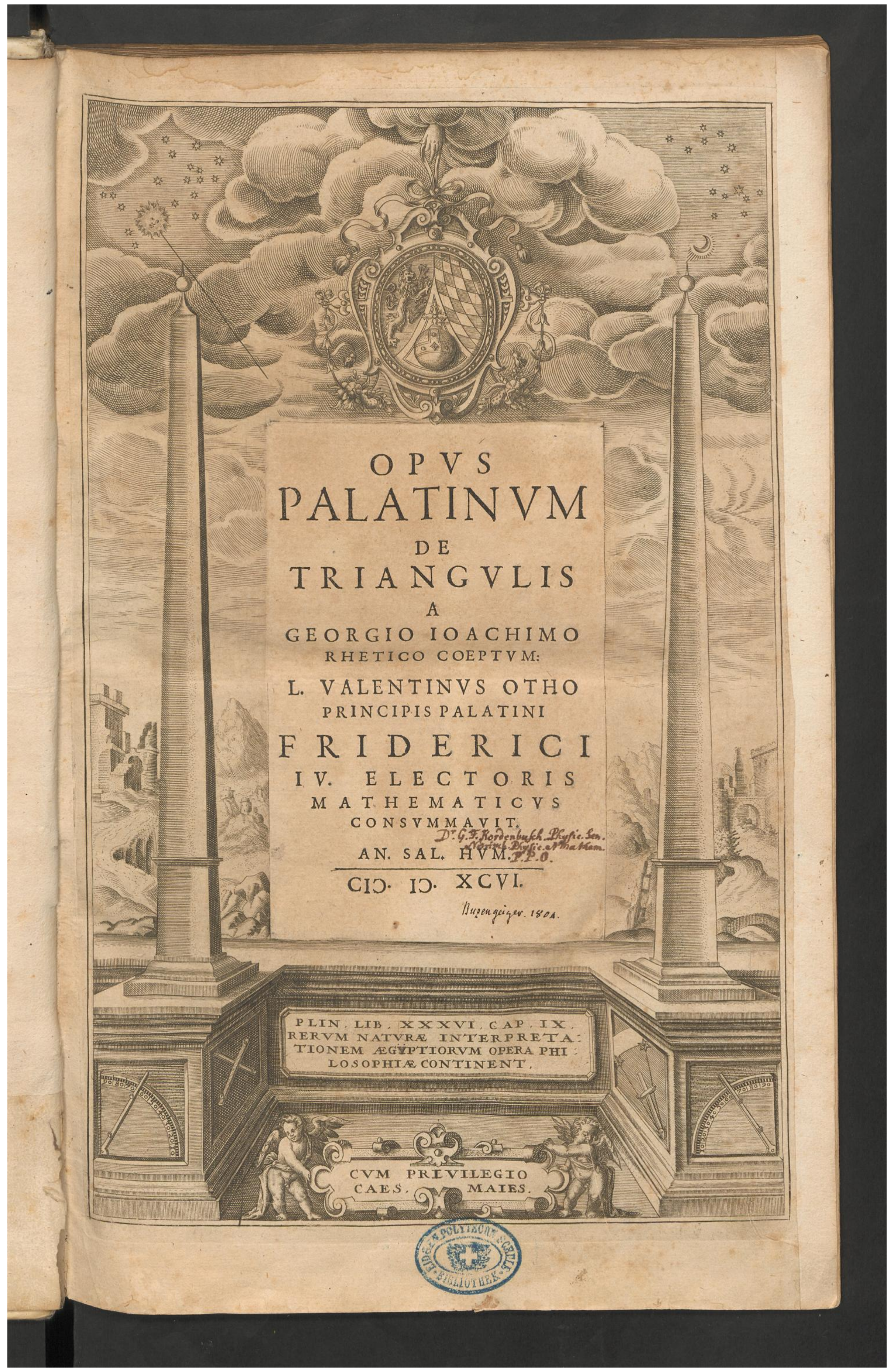



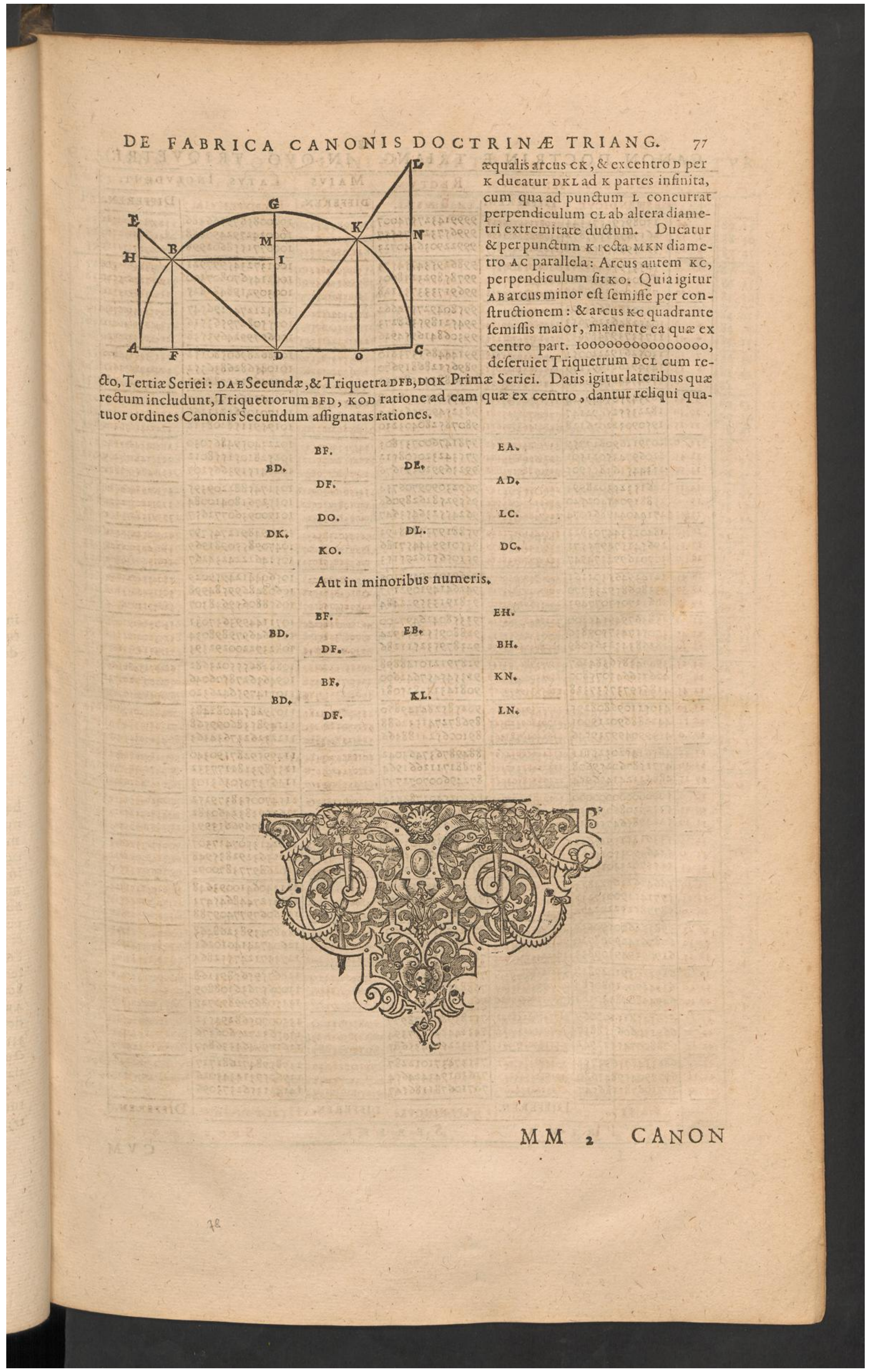



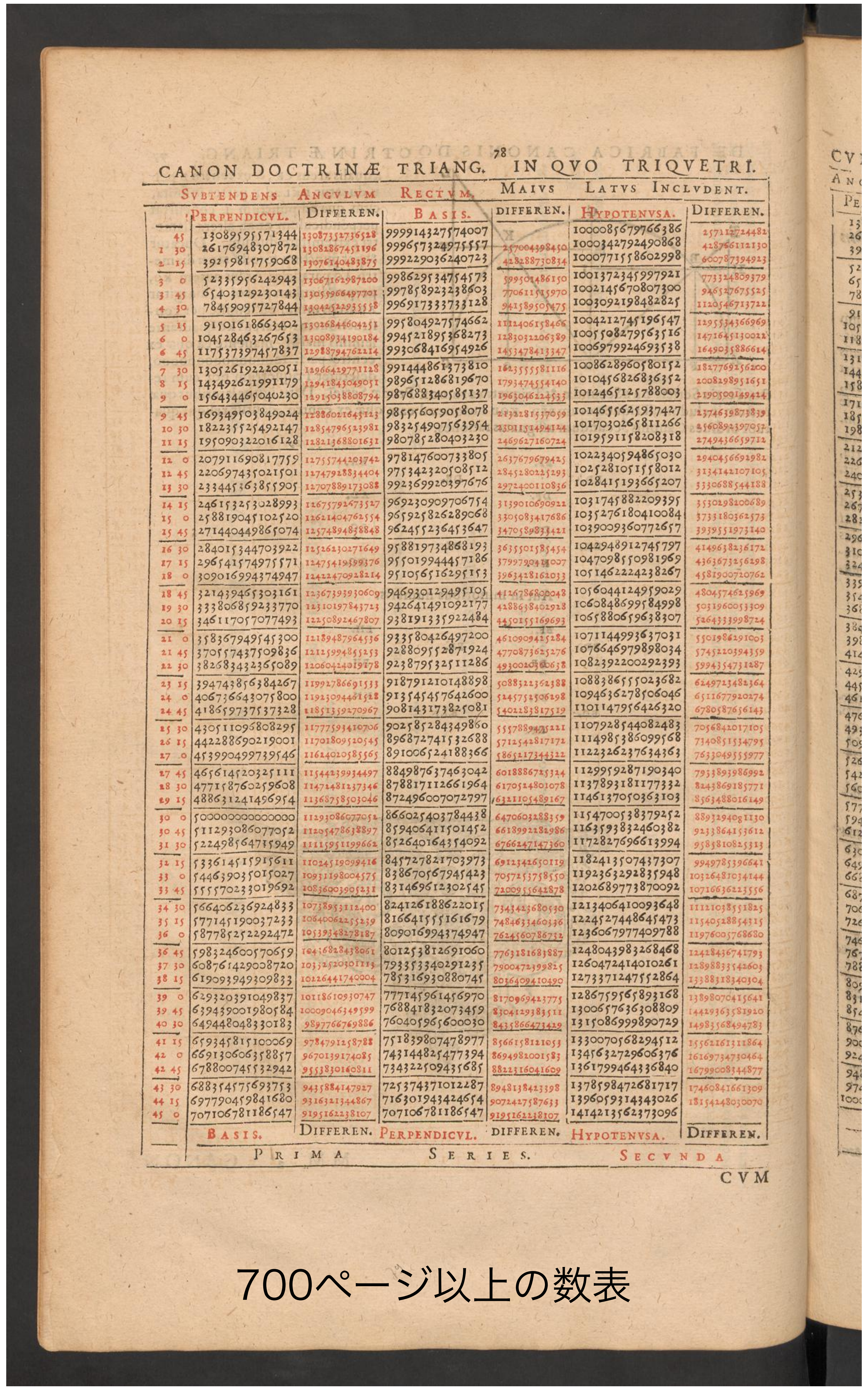

# レティクス『すべての三角形について』1596

## Rheticus『Opus Palatinum de triangulis)』

10秒角間隔で8桁の精度を持つ
６種類の三角関数




700ページ以上の数表

# 12c ルネサンス　イスラム文化がヨーロッパに伝わる

ヒッパルコス（BC190頃-BC120頃）
プトレマイオス（83頃-168頃）『アルマゲスト』（2c）

ヴァラーハミヒラ（505-587）
ブラフマグプタ（598-665）
バースカラ2世（1114-1185）

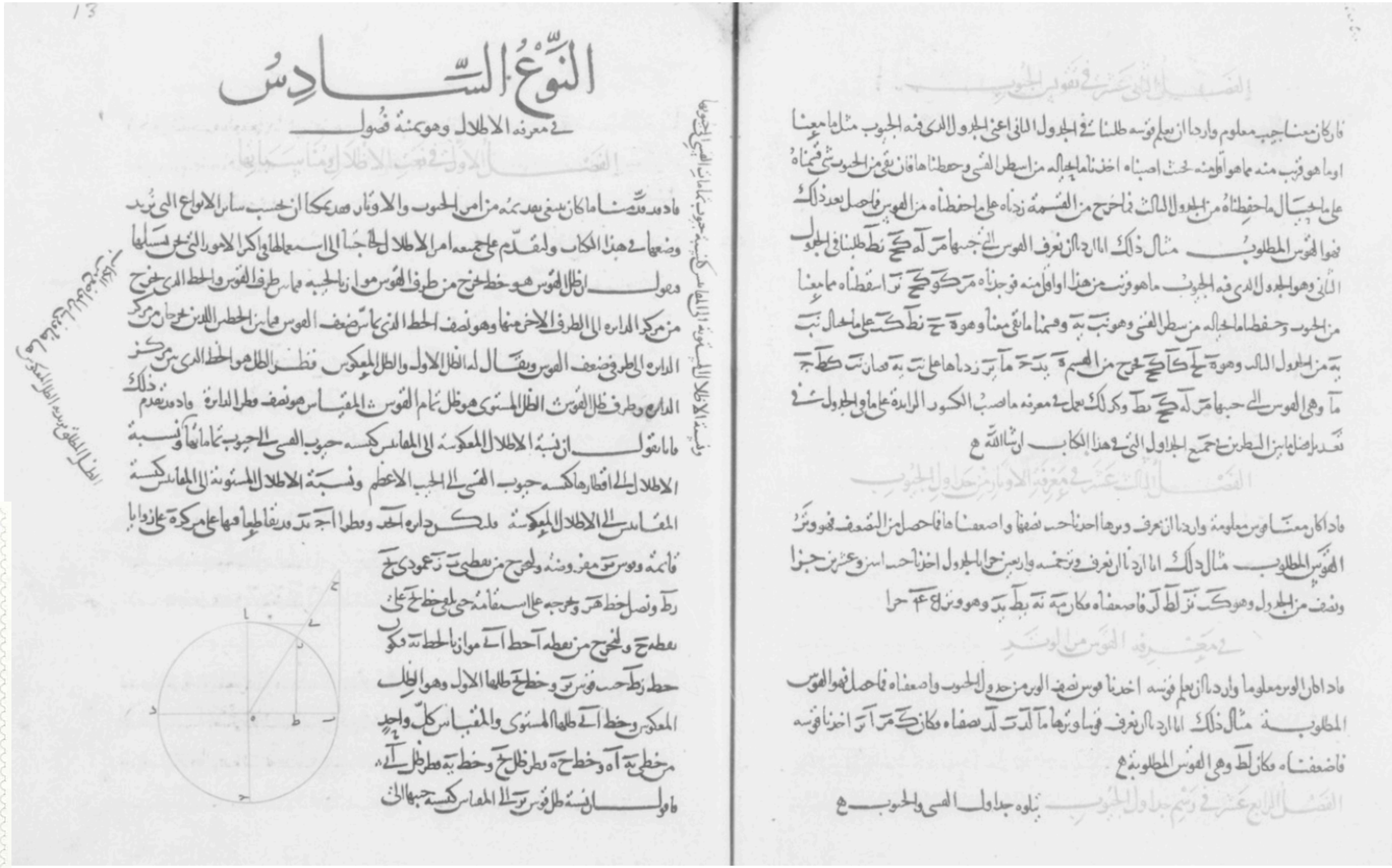
ハバシュ（？-864頃）
アル＝フワーリズミー（780-850）
アル・バッターニー（853-929）
アブル・ワファー（940-998）
アル＝ビールーニー（973--1048）
トゥースィー（1201-1274）

レギオモンタヌス（1436-1476）
レティクス（1514-1574）
ピティスクス（1561-1613）

مجسطى ابى الوفا البوزجانى « L'Almageste d'Abou ʾl-Wafâ al-Boûzdjânî ».

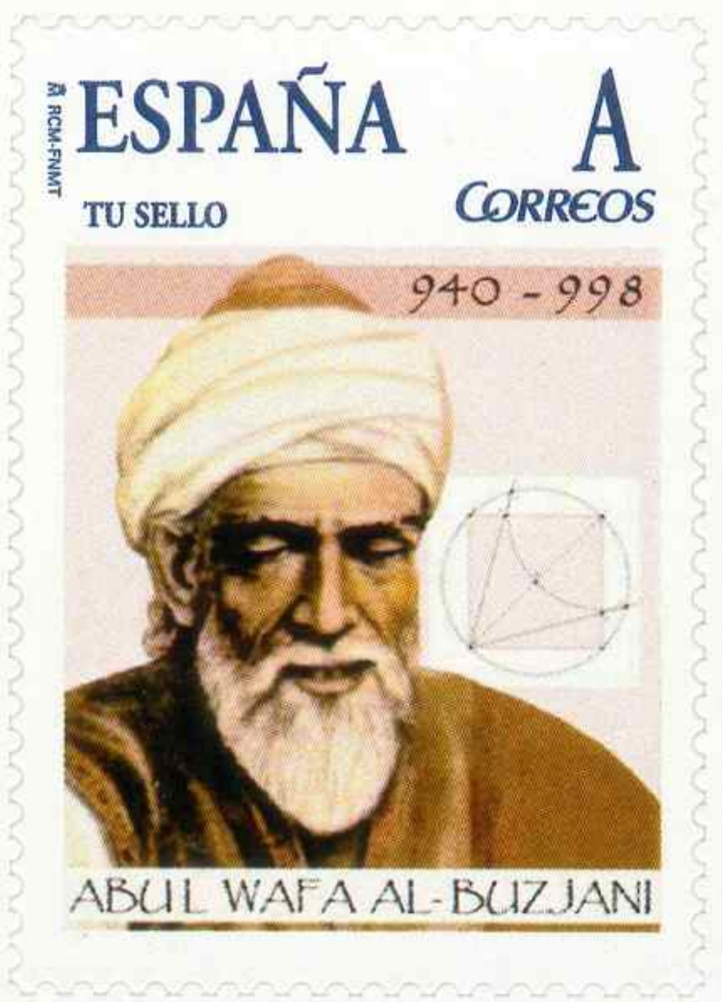
MUḤAMMAD ibn Muḥammad al-Būzǧānī (Abū al-Wafā). Auteur du texte

مجسطى ابى الوفا البوزجانى « L'Almageste d'Abou ʾl-Wafâ al-Boûzdjânî ».



النوع السادس

في معرفة الاظلال وهو ستة فصول




https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b100374763?rk=21459;2#

ligne AE ($=45^p.55.19.15$), qui est la corde de $45°$, et dont la moitié, $22.57.39.37$, est le sinus de $22°30'$.

La corde de $\frac{1}{10}$ circonférence est la corde de $36°$ par la douzième proposition du XIII[e] livre des *Éléments;* il est démontré que le côté de l'hexagone et du décagone inscrits au même cercle étant en même ligne droite, leur somme est divisée en moyenne et extrême raison, et la partie la plus longue est le côté de l'hexagone. (Et la plus courte conséquemment, le côté du décagone.)

Or une ligne divisée en moyenne et extrême raison est une ligne divisée de manière que sa totalité est à sa plus grande partie, comme cette plus grande partie est à la plus petite. Et, dans la proposition quinze du livre XIII des *Éléments*, il est démontré que, pour toute ligne divisée en moyenne et extrême raison, lorsque l'on joint la moitié de la plus grande partie à la plus petite, le carré de cette somme est égal à 5 fois le carré de la moitié de la plus longue partie; c'est-à-dire que si la moitié de la plus longue, qui est le côté de l'hexagone ($=60^p$), est de $30^p$, son carré 15 haussé ($=15.60=30.30$) étant pris 5 fois, ce qui donne 75 haussé ($=75.60$), cela est égal au carré de la somme de $\frac{\text{la plus grande partie}}{2}$ + la plus petite. Tirant donc la racine, nous avons $67^p.4.55.20$, somme de la moitié de la plus grande partie et de la plus petite entière, qui est le côté du décagone. Nous retranchons de la somme la moitié



de la plus grande partie, ou $30^p$; et le reste est le côté du décagone ou la corde de $36° = 37^p.4.55.20$, dont la moitié, qui est le sinus de $18°$, est $18^p.32.27.40$.

La corde de $\frac{1}{5}$ circonférence est celle de $72°$, et il est démontré, dans la treizième proposition du XIII[e] livre des *Éléments*, que le carré de la corde de $\frac{1}{5}$ circonférence est égal aux deux carrés du côté de l'hexagone et du côté du décagone. Or le carré du côté de l'hexagone est 60 haussé ($=60.60$), et le carré du côté du décagone est $22.55^p.4.39.30$; la somme de ces deux carrés, qui est le carré du côté du pentagone, comprend donc 1 haussé deux fois; elle est $1^2.22^1.55^p 4' 39'' 30'''$, dont la racine est le côté du pentagone, savoir : $70^p.32.3.14$; et la moitié $35^p.16.1.37$, est le sinus de $36°$.

Telles sont les cordes dont on peut avoir la valeur exacte par une méthode certaine. On trouve ensuite, par la méthode que l'auteur a exposée, le cosinus des arcs dont le sinus a été déterminé, et de même leur sinus verse.

### SECONDE RÈGLE FONDAMENTALE.

*Détermination réciproque des sinus les uns par les autres.* — Toutes les fois que le sinus d'un arc est connu, on peut en déduire le sinus de la moitié de cet arc; et si le sinus de la moitié est connu, on peut en déduire le sinus du double (de cette moitié).

1° On multiplie la moitié du sinus verse de l'arc



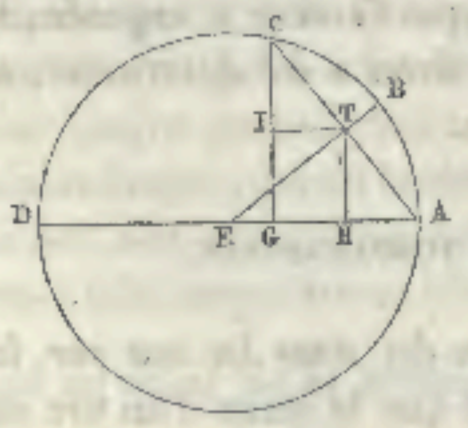
par le demi-diamètre; et, prenant la racine du produit, on a le sinus de $\frac{1}{2}$ arc

$$\left(\sin^2 \frac{1}{2}\text{arc} = \frac{\text{cord}^2}{4} = \frac{\text{sin verse}}{2} \times \frac{\text{diamètre}}{2}\right).$$

2° On multiplie sinus arc donné par son cosinus, et on double le produit : c'est le sinus de l'arc double demandé (divisez par R).

Exemple du premier cas : Nous supposons de $18°$ l'arc dont le sinus est donné; son sinus verse est $2^p.56.12$. La moitié est $1^p.28.6$. Je multiplie par 60, c'est-à-dire 1 haussé une fois, j'extrais la racine; il vient $9^p.33'.9''$; c'est le sinus de $9°$.

Exemple du deuxième cas : Nous supposons encore de $18°$ l'arc dont le sinus est donné. Ce sinus est $18^p.32'.28''$. Le sinus du complément est de $57.3.48$; le produit de ces 2 sinus est $17.38.1.3$, dont le double, $35.16.2.6$, est le sinus de $36°$.




Pour éclairer ces deux propositions, soit le cercle ABCD sur le centre E, je mène le diamètre AED, et je suppose que l'arc AC est donné, et en même temps la corde AC et son sinus droit CG; j'abaisse sur la corde le rayon perpendiculaire ETB, qui coupe la corde en deux parties égales au point T et l'arc au point B.

La demande est que, si la ligne CG, qui est le



sinus droit de l'arc AC, est donnée, la ligne CT, qui est le sinus de CB, sera connue; et que si la ligne CT est donnée, la ligne CG, qui est le sinus de l'arc double, sera connue. Pour cela, si j'abaisse les perpendiculaires TH, TI, sur AE et CG, la ligne AG sera coupée en deux parties égales au point H, et la ligne CG au point I, selon la deuxième proposition du VI[e] livre des *Éléments;* et puisque CG ($=\sin AC$) est donnée, on connaît GE, qui est cosinus AC, et AG, qui est le complément de GE au demi-diamètre, et en même temps HA, qui est $\frac{1}{2}$ AG; comme ATE est un triangle rectangle, et TH perpendiculaire sur AE, on a, par la septième proposition du VI[e] livre, EA : AT :: AT : AH, et par la dix-septième proposition du même livre, surface $AE \times AH = AT^2$; mais la surface AE par AH, ou du demi-diamètre par le demi-sinus verse est connue, ainsi le carré $AT^2$, et conséquemment la racine AT, qui est le sinus de $\frac{AC}{2}$. Et si c'est sinus $\frac{1}{2}$ AC qui est donné, savoir AT, on connaît son sinus verse BT, comme nous l'avons dit, et aussi TE cosinus, et l'on a AT : TH :: AE : ET par la septième proposition du VI[e] livre; ensuite la surface connue $AT \times ET$ est comme $TH \times AE$ par la dix-septième proposition du même livre; divisant $AT \times ET$ par AC = demi-diamètre, on a TH, dont le double CG est le sinus de AC double de AB; C. Q. F. D.

L. A. Sédillot, Journal Asiatique, Paris, XVI (1853), 323

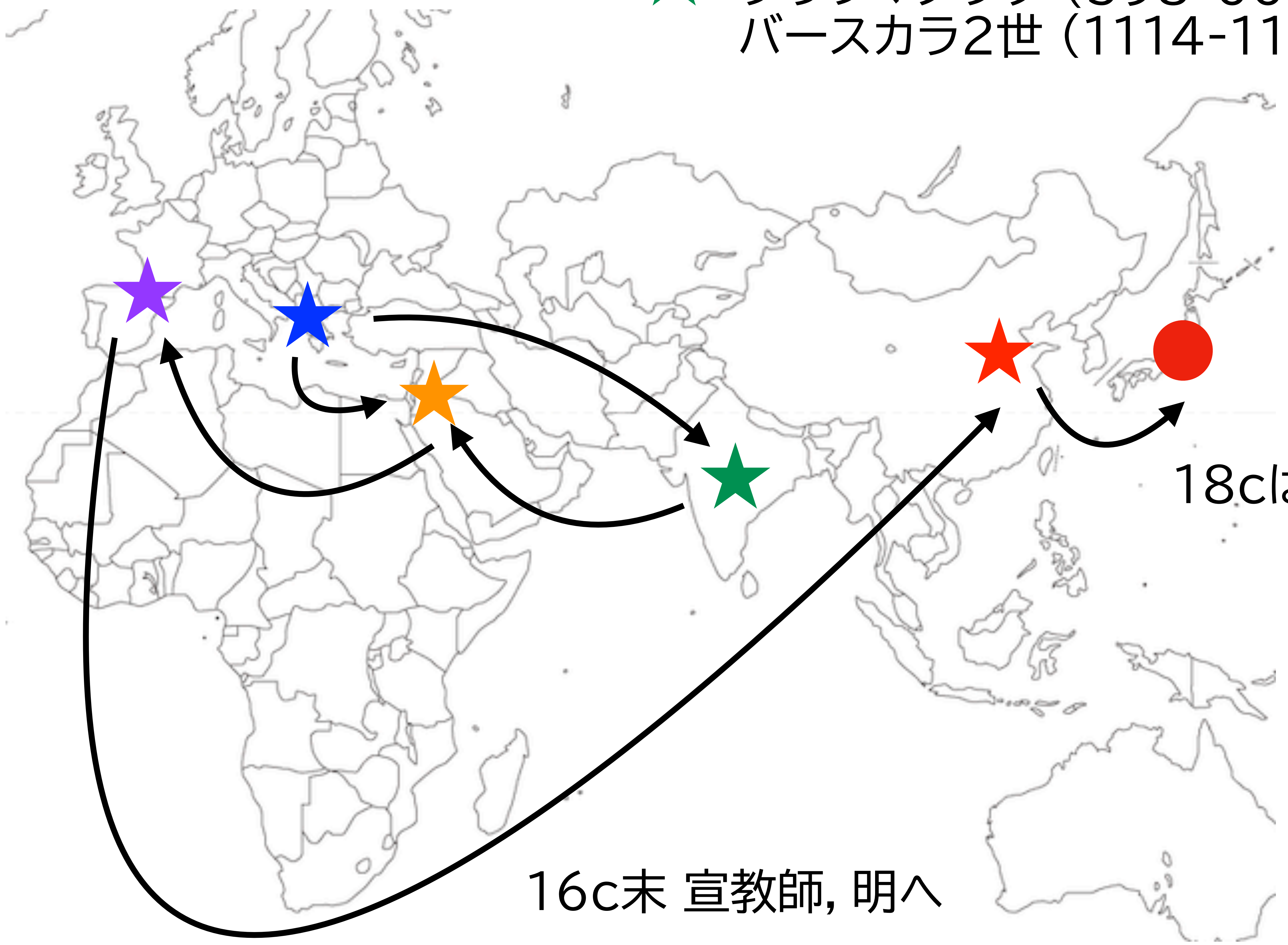
https://archive.org/details/s5journalasiatiq01sociuoft

# 16c末 イエズス会宣教師 明へ ヨーロッパ科学を伝える

ヒッパルコス（BC190頃-BC120頃）
プトレマイオス（83頃-168頃）『アルマゲスト』（2c）

ヴァラーハミヒラ（505-587）
ブラフマグプタ（598-665）
バースカラ2世（1114-1185）

ハバシュ（？-864頃）
アル＝フワーリズミー（780-850）
アル・バッターニー（853-929）
アブル・ワファー（940-998）
アル＝ビールーニー（973--1048）
トゥースィー（1201-1274）




レギオモンタヌス（1436-1476）
レティクス（1514-1574）
ピティスクス（1561-1613）

アダム・シャール
徐光啓『崇禎暦書』（1634）
梅文鼎『暦算全書』（1723）

中根元圭『八線表算法解義』(1727頃)
建部賢弘『算暦雑考』(1722?)

# 建部賢弘『算暦雑考』（制作年代不明）

半背，矢，半弦を角度の関数として1°から90°まで半径10寸で表にした

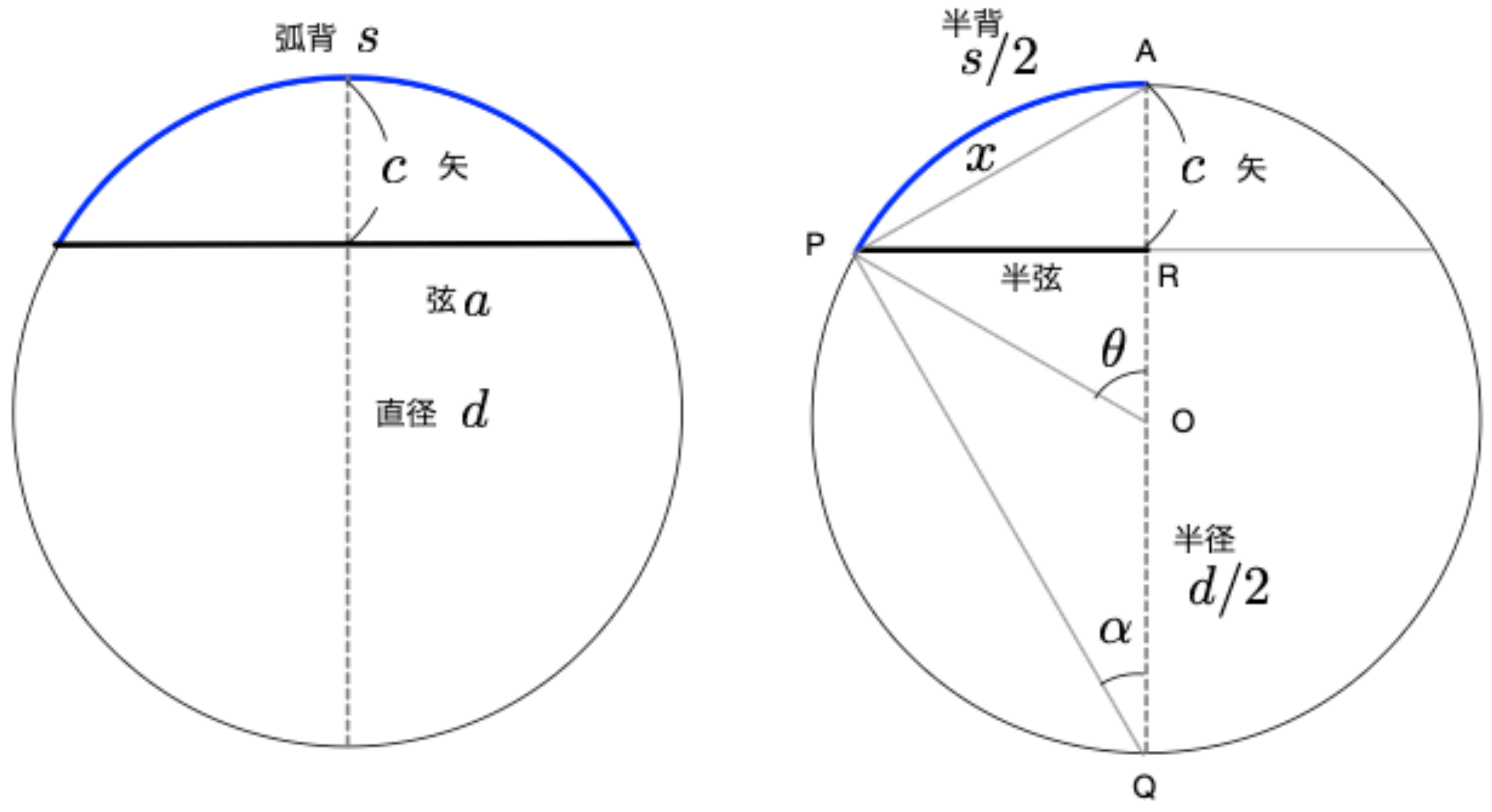
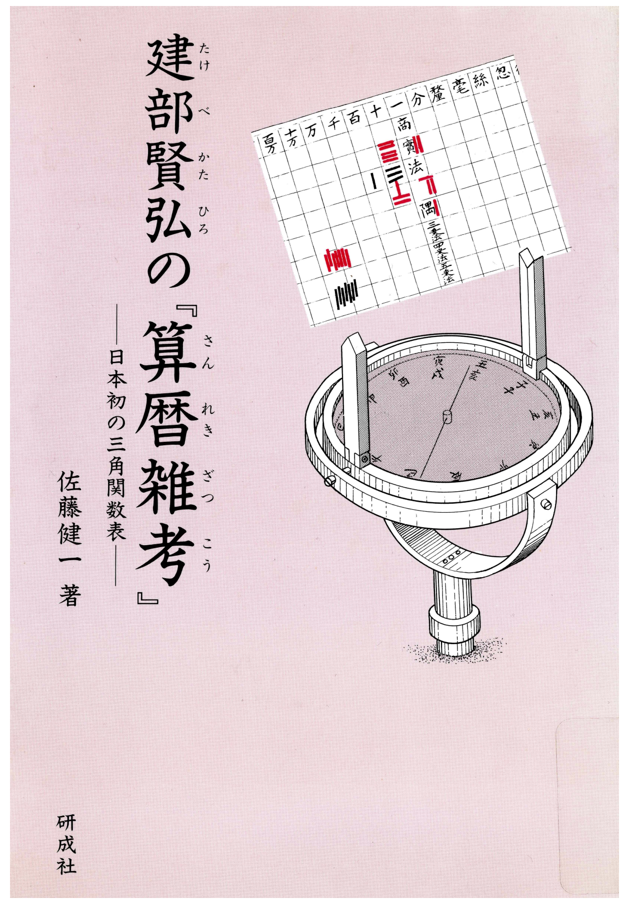



**図 4.1:** 建部が作成した三角関数表は，角度と半背，矢，半弦の 3 つの量の数表である．

表 **B.1:** 建部賢弘の著作で円理に関わるもの [25, 26].

| 書名 | 年代 | 内容 | 備考 |
|---|---|---|---|
| 研幾算法（けんき） | 1683 年 | 矢と弦を与え弓形部分の面積を求める問題あり | 円周率は 355/113 |
| 大成算経 | 1711 年頃 | 算術，代数学（点竄術），幾何学など当時の和算を体系化．第 12 巻「弧率」円・弧・立円（関の『括要算法』巻貞） | 関孝和，建部賢明，建部賢弘の 3 人が編集 |
| 弧背截約集（せつやく） | 不明 | 円理の書．$(d\sin^{-1}\theta)^2$ の展開公式，『弧背術』『弧率』立限弧の背冪の導出，径と背から矢を求める元術，径と半背から矢を求める 捷（しょう） 術ほか | 2005 年に発見される |
| 弧率（弧背率） | 1722 年頃 | 半弦表と半背表 | 学士院 8898, 1428 |
| 綴術算経（てつじゅつ） | 1722 年 | **探円数** 円周率公式（10 角形を用いて 42 桁）<br>**探弧数** $(\sin^{-1}\theta)^2$ の展開公式 | （関は『括要算法』で $2^{17}$ ＝ 131072 角形を用いて 12 桁の円周率） |
| 算暦雑考 | 1722 年頃? | 半背，矢，半弦の表 | |




| 限数 | 半背 | 矢 | 半弦 |
|---|---|---|---|
| 一限 | 八厘七二六六四六二六○○ | 七絲六乙五二四二乙八○五 | 八厘七二六二○参二乙八七 |
| 二限 | 乙分七四五参二九二五二○ | 参毫○四五八六四九○四五 | 乙分七四四九七四八参五乙 |
| 三限 | 二分六乙七九九参八七八○ | 六毫八五二参六二二七二一 | 二分六乙六七九七八乙二二 |
| 四限 | 参分四九○六五八五○四○ | 乙厘二乙七九七四八七乙 | 参分四八七八二参六八七二 |
| 五限 | 四分参六参参二参乙参○○ | 乙厘九○二六五○九五四乙 | 四分参三七七八七乙参七四 |
| 六限 | 五分二参五九八七七五六○ | 二厘七参九○五二参乙五九 | 五分二二六四二参乙六参四 |
| 七限 | 六分乙○八六五二参八二○ | 参厘七二六九二四乙七九参 | 六分○九参四六七乙七○参 |
| 八限 | 六分九八乙参乙七○○八○ | 四厘八六五九六五六二九参 | 六分九五八六五五○四八○ |
| 九限 | 七分八五参九八乙六参四○ | 六厘乙五五八二九七○二五 | 七分八二乙七二参二五二○ |
| 十限 | 八分七二六六四六二六○○ | 七厘五九六乙二参四九四○ | 八分六八二四○八八八参四 |
| 十一限 | 九分五九九参乙○八八六○ | 九厘乙八六四○八二七六二 | 九分五四○四四八七八八 |

# 建部賢弘『算暦雑考』（制作年代不明）

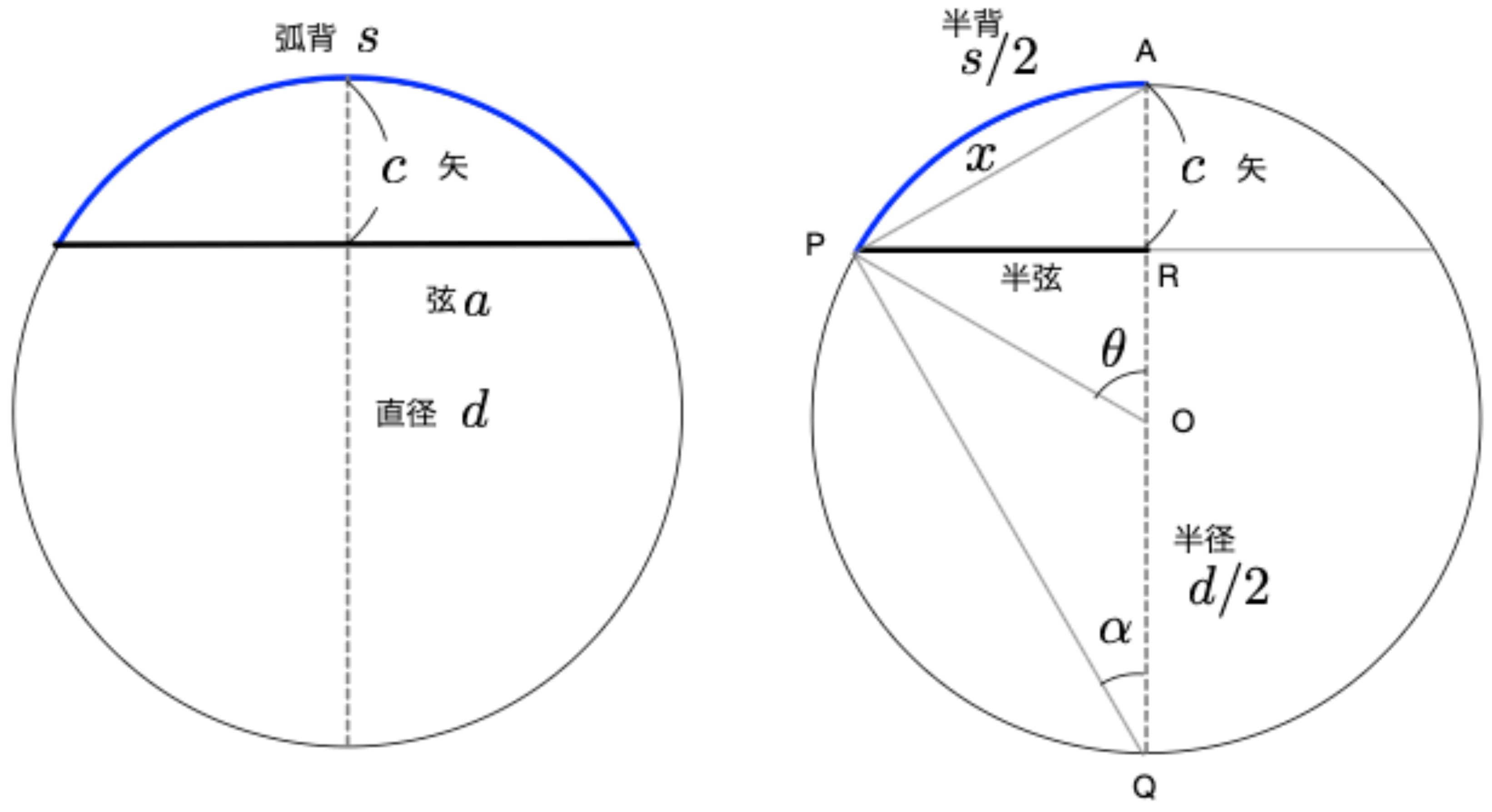



**図 4.1:** 建部が作成した三角関数表は，角度と半背，矢，半弦の 3 つの量の数表である．

「sin x」を持たない和算では・・・

$$\theta = 2\sin^{-1}\sqrt{c/d}$$

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2\left(2\sin^{-1}\sqrt{\frac{c}{d}}\right)^2$$

半背，矢，半弦を角度の関数として1°から90°まで半径10寸で表にした

$$\text{半背}\quad \frac{s}{2} = \frac{d}{2}\theta,$$

$$\text{矢}\quad c = r(1-\cos\theta) = d\sin^2\frac{\theta}{2},$$

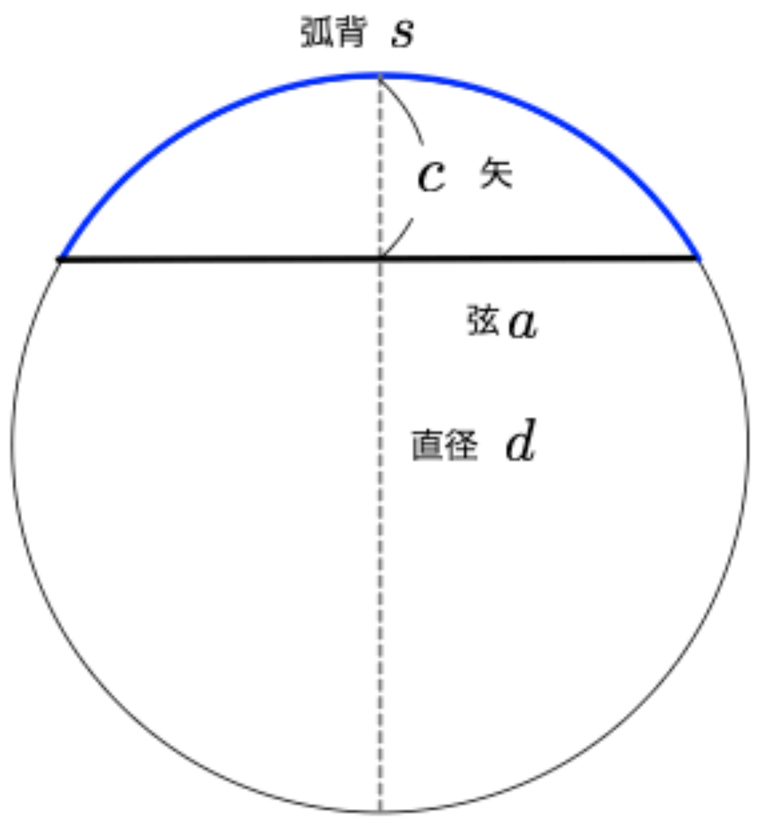
$$\text{半弦}\quad \frac{a}{2} = \frac{d}{2}\sin\theta$$

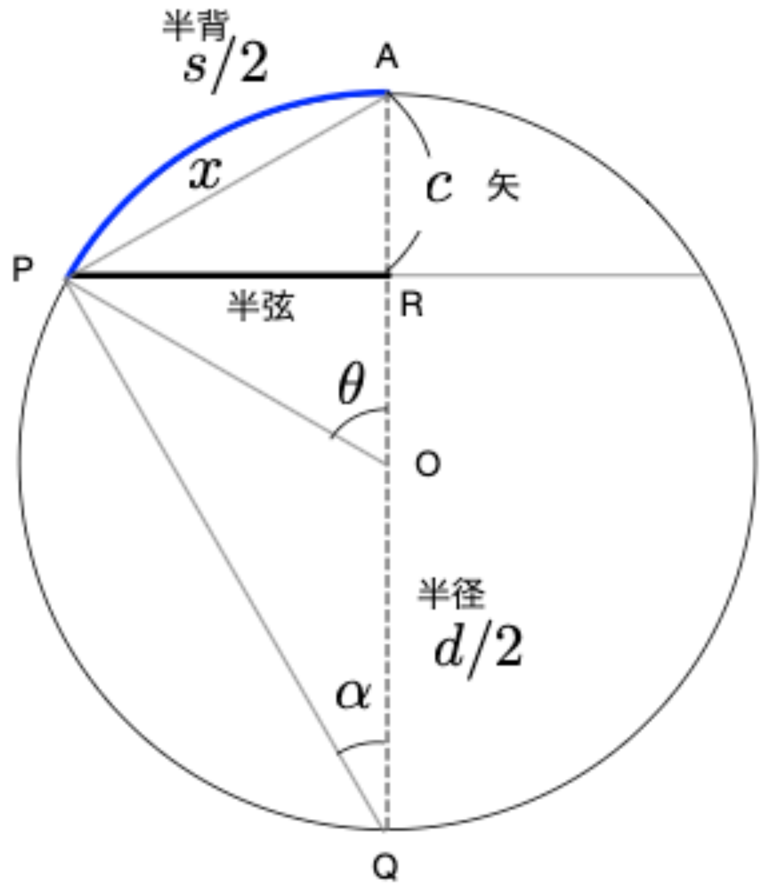
| 度 | 半背 | 矢 | 半弦 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.00000000000000 | 0.00000000000000 | 0.00000000000000 |
| 1 | 0.08726646259972 | 0.00076152421804 | 0.08726203218642 |
| 2 | 0.17453292519943 | 0.00304586490452 | 0.17449748351251 |
| 3 | 0.26179938779915 | 0.00685232622713 | 0.26167978121472 |
| 4 | 0.34906585039887 | 0.01217974870088 | 0.34878236872063 |
| 5 | 0.43633231299858 | 0.01902650954127 | 0.43577871373829 |
| 6 | 0.52359877559830 | 0.02739052315863 | 0.52264231633827 |
| 7 | 0.61086523819802 | 0.03726924179339 | 0.60934671702574 |
| 8 | 0.69813170079773 | 0.04865965629215 | 0.69586550480033 |
| 9 | 0.78539816339745 | 0.06155829702431 | 0.78217232520115 |
| 10 | 0.87266462599716 | 0.07596123493896 | 0.86824088833465 |
| 11 | 0.95993108859688 | 0.09186408276168 | 0.95404497688272 |
| 12 | 1.04719755119660 | 0.10926199633097 | 1.03955845408880 |
| 13 | 1.13446401379631 | 0.12814967607382 | 1.12475527171932 |

| 限数 | 半背 | 矢 | 半弦 |
|---|---|---|---|
| 一限 | 八厘七二六六四六二六○○ | 七絲六乙五二四二乙八○五 | 八厘七二六二○参二乙八七 |
| 二限 | 乙分七四五参二九二五二○ | 参毫○四五八六四九○四五 | 乙分七四四九七四八参五乙 |
| 三限 | 二分六乙七九九参八七八○ | 六毫八五二参六二二七二一 | 二分六乙六七九七八乙二二 |
| 四限 | 参分四九○六五八五○四○ | 乙厘二乙七九七四八七乙 | 参分四八七八二参六八七二 |
| 五限 | 四分参六参参二参乙参○○ | 乙厘九○二六五○九五四乙 | 四分参三七七八七乙参七四 |
| 六限 | 五分二参五九八七七五六○ | 二厘七参九○五二参乙五九 | 五分二二六四二参乙六参四 |
| 七限 | 六分乙○八六五二参八二○ | 参厘七二六九二四乙七九参 | 六分○九参四六七乙七○参 |
| 八限 | 六分九八乙参乙七○○八○ | 四厘八六五九六五六二九参 | 六分九五八六五五○四八○ |
| 九限 | 七分八五参九八乙六参四○ | 六厘乙五五八二九七○二五 | 七分八二乙七二参二五二○ |
| 十限 | 八分七二六六四六二六○○ | 七厘五九六乙二参四九四○ | 八分六八二四○八八八参四 |
| 十一限 | 九分五九九参乙○八八六○ | 九厘乙八六四○八二七六二 | 九分五四○四四八七八八 |

# 建部賢弘

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \left(2\sin^{-1}\sqrt{\frac{c}{d}}\right)^2$$



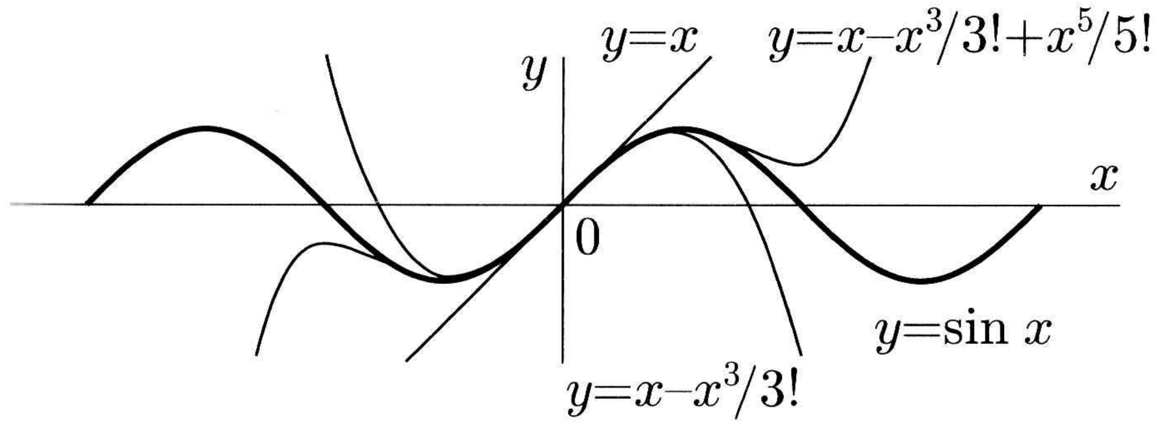



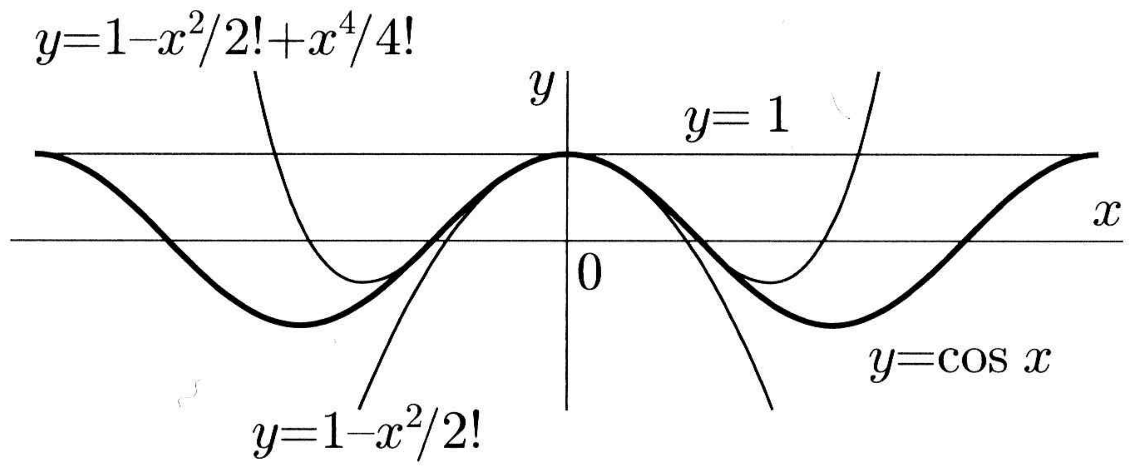

- $x = a$ のまわりでの展開（Taylor 展開）

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

- $x = 0$ のまわりでの展開.（Maclaurin 展開）

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots
\end{aligned}$$




現代人なら「arcsin x」の展開公式を知っているので

逆三角関数の展開公式は，$|x| \ll 1$ のとき，

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots + \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)}x^{2k+1} + \cdots \quad \text{(A.1)}$$

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x \quad \text{(A.2)}$$

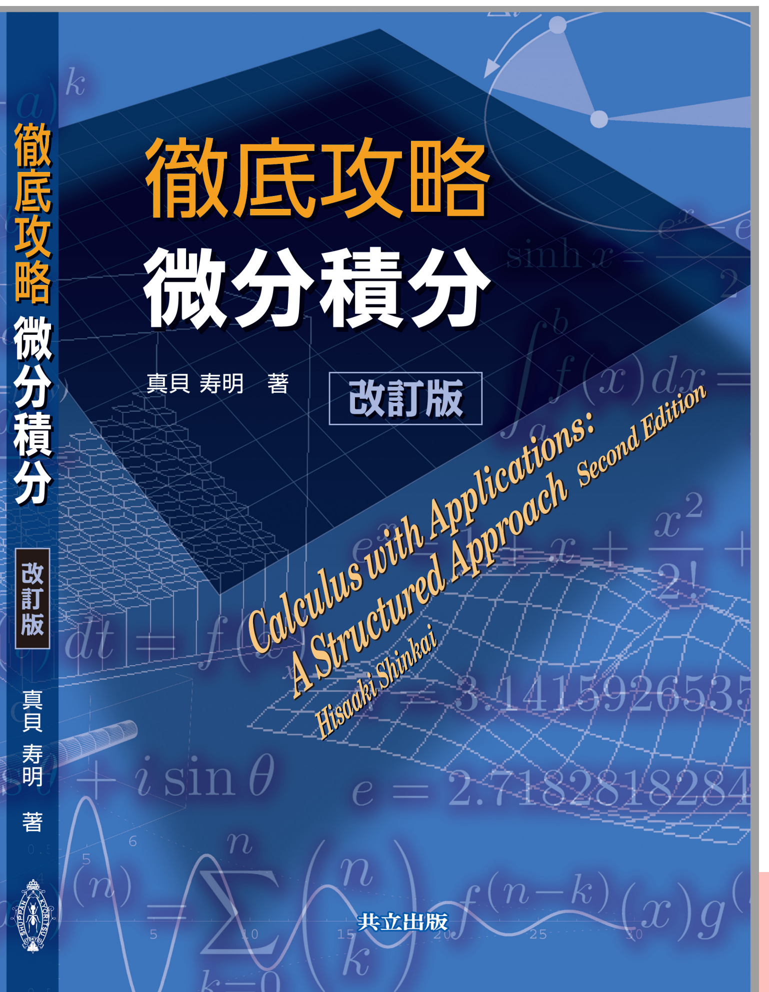
$$= \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 - \frac{35}{1152}x^9 + \cdots \quad \text{(A.3)}$$

これが正解

$$f_0(c) = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \left(2\sin^{-1}\sqrt{\frac{c}{d}}\right)^2 \quad \text{(A.4)}$$

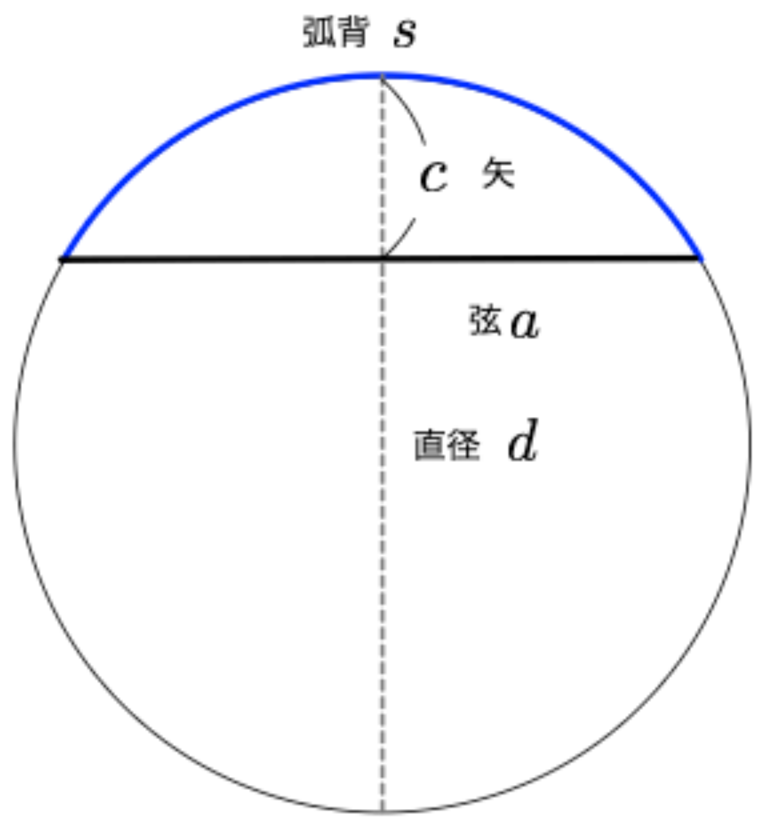
$$= dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{8}{45}\frac{c^3}{d} + \frac{4}{35}\frac{c^4}{d^2} + \frac{128}{1575}\frac{c^5}{d^3} + \frac{128c^6}{2079d^4} + \frac{1024c^7}{21021d^5} + \frac{256c^8}{6435d^6} + \frac{32768c^9}{984555d^7} + \frac{32768c^{10}}{1154725d^8} \cdots \quad \text{(A.5)}$$

$$= dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{0.1777\cdots}{d}c^3 + \frac{0.1142856\cdots}{d^2}c^4 + \frac{0.08126984\cdots}{d^3}c^5 + \cdots$$



# 建部賢弘

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \left(2\sin^{-1}\sqrt{\frac{c}{d}}\right)^2$$




『算暦雑考』に記載された展開式（佐藤健一『建部賢弘の算暦雑考』，研成社，1995）は以下の 3 つである．比較のため，$c$ で展開した式も添える．

- 「背恒術」（とりあえず簡略化した計算で値を求める方法）

$$\begin{aligned} f_{S1}(c) &= dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{c^3}{d - c \times \frac{9}{14}} \times 0.18 \\ &= dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{0.18}{d}c^3 + \frac{0.115714}{d^2}c^4 + \frac{0.0743878}{d^3}c^5 + \cdots \end{aligned} \quad \text{(A.6)}$$

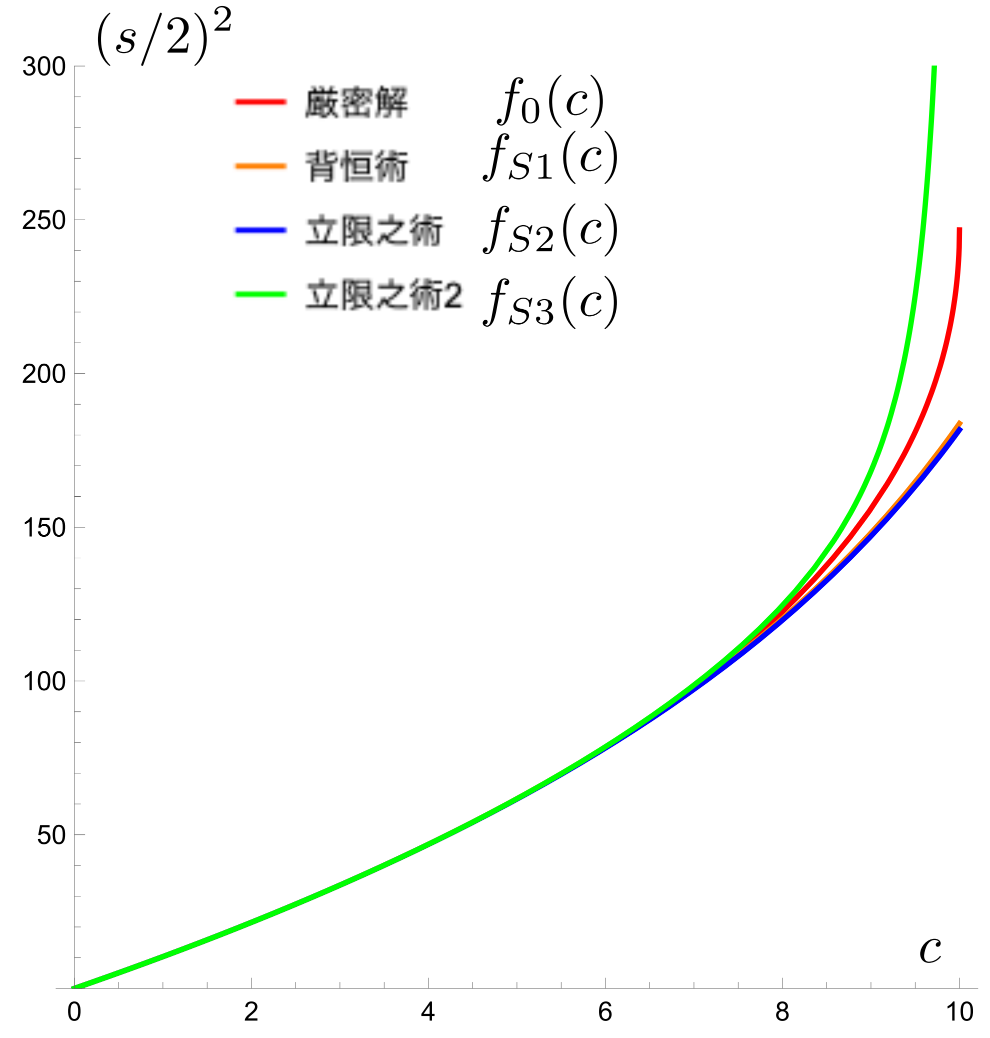
- より精密な結果を得る「立限之術」

$$\begin{aligned} f_{S2}(c) &= dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{\frac{c^2}{3} \times c}{d - c \times 0.632} \times 0.534 \\ &= dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{0.178}{d}c^3 + \frac{0.112496}{d^2}c^4 + \frac{0.0710975}{d^3}c^5 + \cdots \end{aligned} \quad \text{(A.7)}$$

- さらに「立限之術 2」

$$\begin{aligned} f_{S3}(c) &= dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{\frac{c^2}{3} \times c}{d - c} \times \frac{8}{15} - \frac{\frac{c^2}{3} \times c \times \frac{8}{15}}{d - c} \times \frac{c}{d - c \times \frac{13}{25}} \times 0.3573 \\ &= cd + \frac{c^2}{3} + \frac{8c^3}{45d} + \frac{0.114258c^4}{d^2} + \frac{0.0812274c^5}{d^3} + \cdots \end{aligned} \quad \text{(A.8)}$$

0.17777



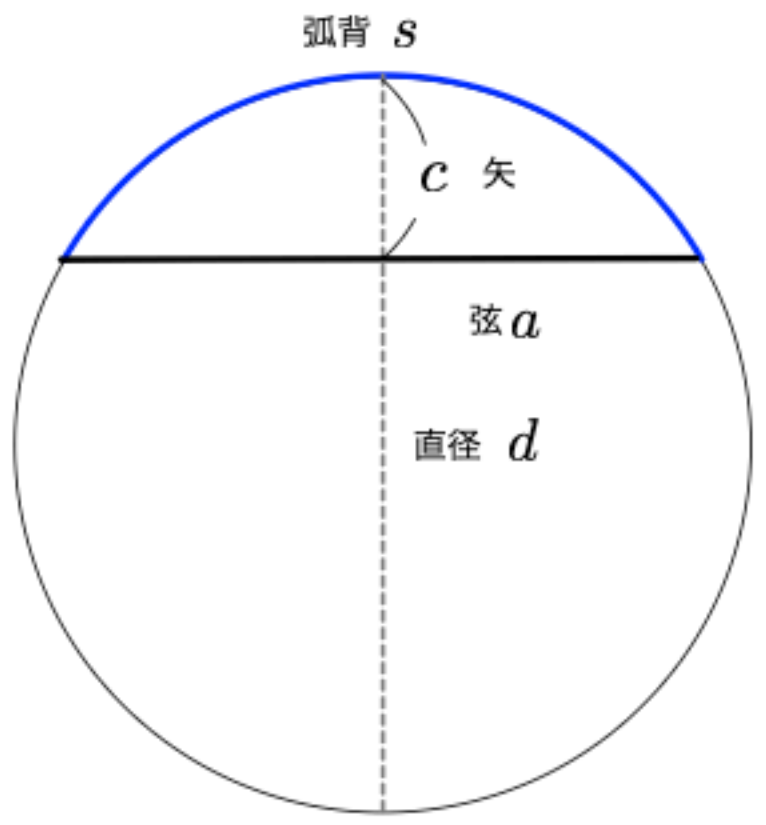

これが正解

$$\begin{aligned} f_0(c) &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 \left(2\sin^{-1}\sqrt{\frac{c}{d}}\right)^2 \quad \text{(A.4)} \\ &= dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{8}{45}\frac{c^3}{d} + \frac{4}{35}\frac{c^4}{d^2} + \frac{128}{1575}\frac{c^5}{d^3} + \frac{128c^6}{2079d^4} + \frac{1024c^7}{21021d^5} + \frac{256c^8}{6435d^6} + \frac{32768c^9}{984555d^7} + \frac{32768c^{10}}{1154725d^8} \cdots \quad \text{(A.5)} \\ &= dc + \frac{1}{3}c^2 + \frac{0.1777\cdots}{d}c^3 + \frac{0.1142856\cdots}{d^2}c^4 + \frac{0.08126984\cdots}{d^3}c^5 + \cdots \end{aligned}$$

# 建部賢弘

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2\left(2\sin^{-1}\sqrt{\frac{c}{d}}\right)^2$$

「数に盡るあり，不盡あり」(数には尽きるものと尽きないものがある)
『綴術算経』(1722)




『綴術算経』(1722) 弧数第十二に記載された展開式（小川束訳註，岩波文庫，2026）は以下の 3 つである．

- 「定半背冪」（$c^7$ の項の係数まで厳密解と一致）

$$\begin{aligned} f_{T1}(c) &= dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{c^3}{d}+\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{9}{14}\frac{c^4}{d^2}+\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{9}{14}\frac{32}{45}\frac{c^5}{d^3}+\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{9}{14}\frac{32}{45}\frac{25}{33}\frac{c^6}{d^4}+\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{9}{14}\frac{32}{45}\frac{25}{33}\frac{72}{91}\frac{c^7}{d^5} \quad \text{(A.9)}\\ &= dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{8c^3}{45d}+\frac{4c^4}{35d^2}+\frac{128c^5}{1575d^3}+\frac{128c^6}{2079d^4}+\frac{1024c^7}{21021d^5}+\cdots \end{aligned}$$

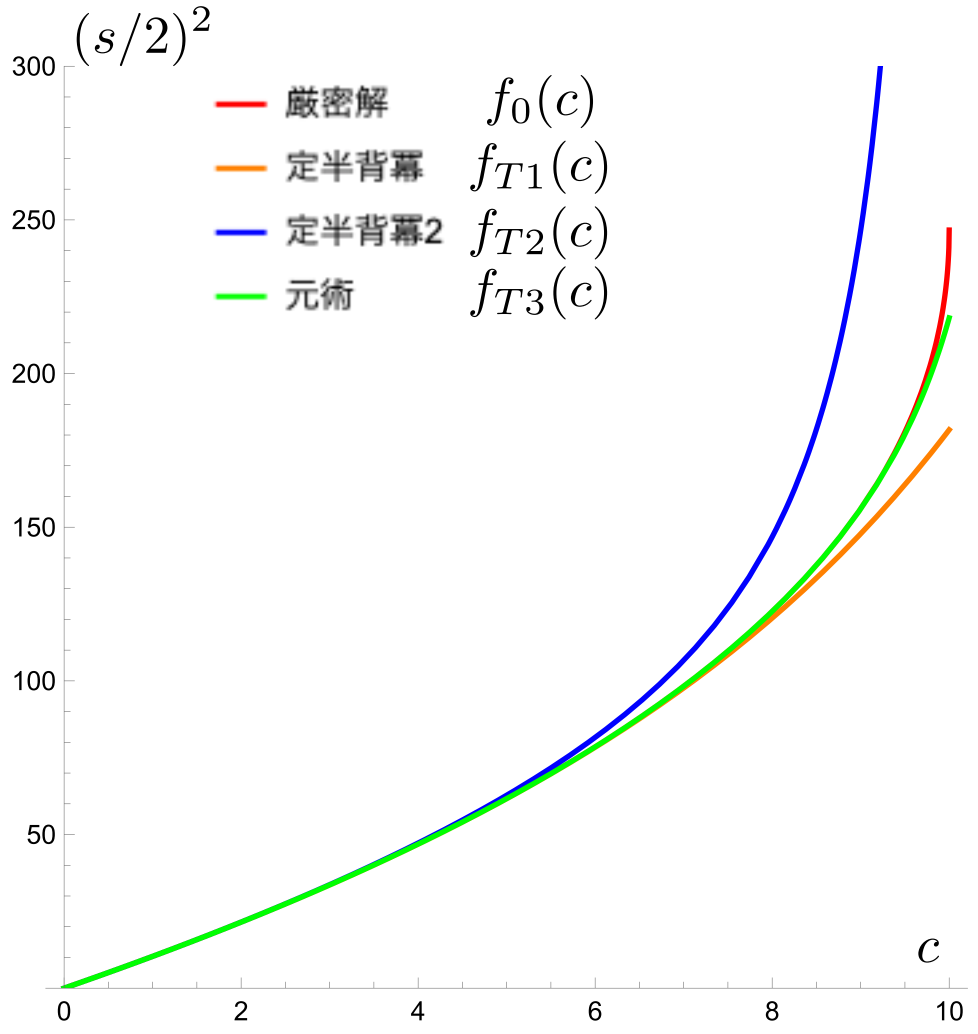
- 「定半背冪 2」（$c^4$ の項の係数まで厳密解と一致）

$$\begin{aligned} f_{T2}(c) &= dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{c^3}{d-c}-\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{5}{14}\frac{c^4}{(d-c)^2}+\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{5}{14}\frac{12}{15}\frac{c^5}{(d-c)^3}-\frac{1}{3}\frac{8}{15}\frac{5}{14}\frac{12}{15}\frac{223}{396}\frac{c^6}{(d-c)^4} \quad \text{(A.10)}\\ &= dc+\frac{c^2}{3}+\frac{8c^3}{45d}+\frac{4c^4}{35d^2}+\frac{32c^5}{315d^3}+\frac{3464c^6}{31185d^4}+\frac{712c^7}{6237d^5}+\frac{2564c^8}{31185d^6}-\frac{416c^9}{31185d^7}-\frac{896c^{10}}{4455d^8}+\cdots \end{aligned}$$

- 「元術」（$c^7$ の項の係数まで厳密解と一致）

$$\begin{aligned} f_{T3}(c) &= dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{1}{3}\frac{c^3}{d-\frac{9}{14}c}\frac{8}{15}+\frac{1}{3}\frac{c^3}{d-\frac{9}{14}c}\frac{c^2}{d^2-\frac{1696}{1419}cd-\frac{6743008}{26176293}c^2}\frac{8}{15}\frac{43}{980} \quad \text{(A.11)}\\ &= dc+\frac{c^2}{3}+\frac{8c^3}{45d}+\frac{4c^4}{35d^2}+\frac{128c^5}{1575d^3}+\frac{128c^6}{2079d^4}+\frac{1024c^7}{21021d^5}+\frac{2655317160448c^8}{6666512860507 5d^6}+\cdots \end{aligned}$$

Euler-Bernouilliによる逆三角関数の展開式(1737) より15年はやい!!




これが正解

$$\begin{aligned} f_0(c) &= \left(\frac{d}{2}\right)^2\left(2\sin^{-1}\sqrt{\frac{c}{d}}\right)^2 \quad \text{(A.4)}\\ &= dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{8}{45}\frac{c^3}{d}+\frac{4}{35}\frac{c^4}{d^2}+\frac{128}{1575}\frac{c^5}{d^3}+\frac{128c^6}{2079d^4}+\frac{1024c^7}{21021d^5}+\frac{256c^8}{6435d^6}+\frac{32768c^9}{984555d^7}+\frac{32768c^{10}}{1154725d^8}\cdots \quad \text{(A.5)}\\ &= dc+\frac{1}{3}c^2+\frac{0.1777\cdots}{d}c^3+\frac{0.1142856\cdots}{d^2}c^4+\frac{0.08126984\cdots}{d^3}c^5+\cdots \end{aligned}$$

# 建部賢弘『算暦雑考』（制作年代不明）

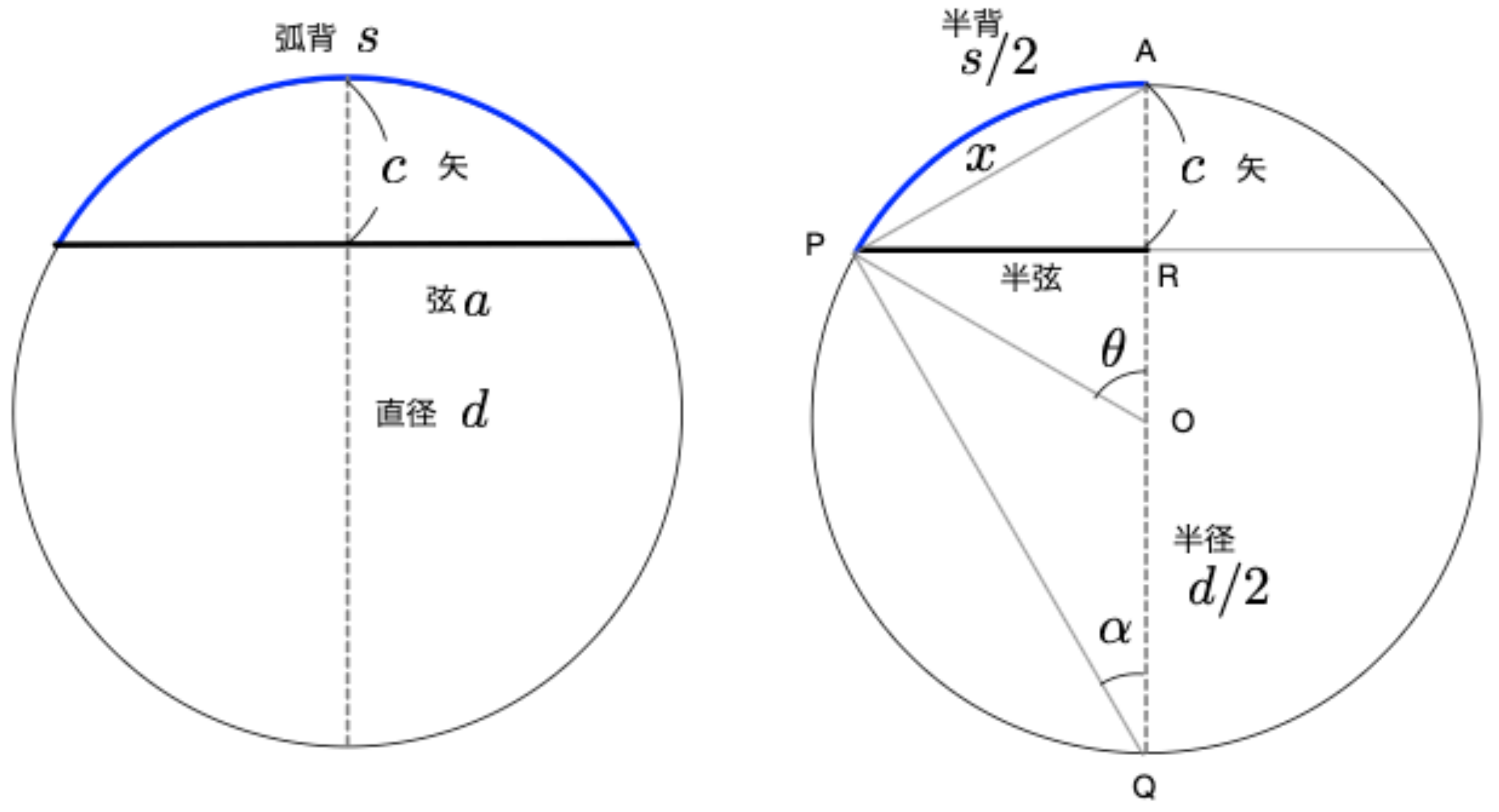



**図 4.1:** 建部が作成した三角関数表は，角度と半背，矢，半弦の 3 つの量の数表である．

半背，矢，半弦を角度の関数として1°から90°まで半径10寸で表にした

| 限数 | 半背 | 矢 | 半弦 |
|---|---|---|---|
| 一限 | 八厘七二六六四六二六○○ | 七絲六乙五二四二乙八○五 | 八厘七二六六二○参二乙八七 |
| 二限 | 乙分七四五参二九二五二○ | 参毫○四五八六四九○四五 | 乙分七四四九七四八参五乙 |
| 三限 | 二分六乙七九九参八七八○ | 六毫八五二参六二二七二 | 二分六乙六七九七八乙二三 |
| 四限 | 参分四九○六五八五○四○ | 乙厘二乙七九七四八七乙 | 参分四八七八二参六八七二 |
| 五限 | 四分参六参参二参乙参○○ | 乙厘九○二六五○九五四乙 | 四分参三七七八七乙参七四 |
| 六限 | 五分二参五九八七七五六○ | 二厘七参九○五二参乙五九 | 五分二二六四二参乙六参四 |
| 七限 | 六分乙○八六五二参八二○ | 参厘七二六九二四乙七九参 | 六分○九参四六七乙七○参 |
| 八限 | 六分九八乙参乙七○○八○ | 四厘八六五九六五六二九参 | 六分九五八六五五○四八○ |
| 九限 | 七分八五参九八乙六参四○ | 六厘乙五五八二九七○二五 | 七分八二乙七二参二五二○ |
| 十限 | 八分七二六六四六二六○○ | 七厘五九六乙二参四九四○ | 八分六八二四○八八八参四 |
| 十一限 | 九分五九九参乙○八八六○ | 九厘乙八六四○八二七六二 | 九分五四○四四八七八八 |

展開式を求めた建部であったが・・・

高次の展開式で半背の値が得られたとしても, 角度が大きなところでは必ず収束性が悪くなる.

これらの近似式を使わず,
＊角度を倍にしたときの弦と矢の関係式「倍術」（倍角の公式）
＊余角を利用した関係式「折術」
＊3倍の角についてなりたつ「三双術」（3倍角の公式）
＊加法定理に相当する「併接術」
を開発し, 三角関数表を作成した.

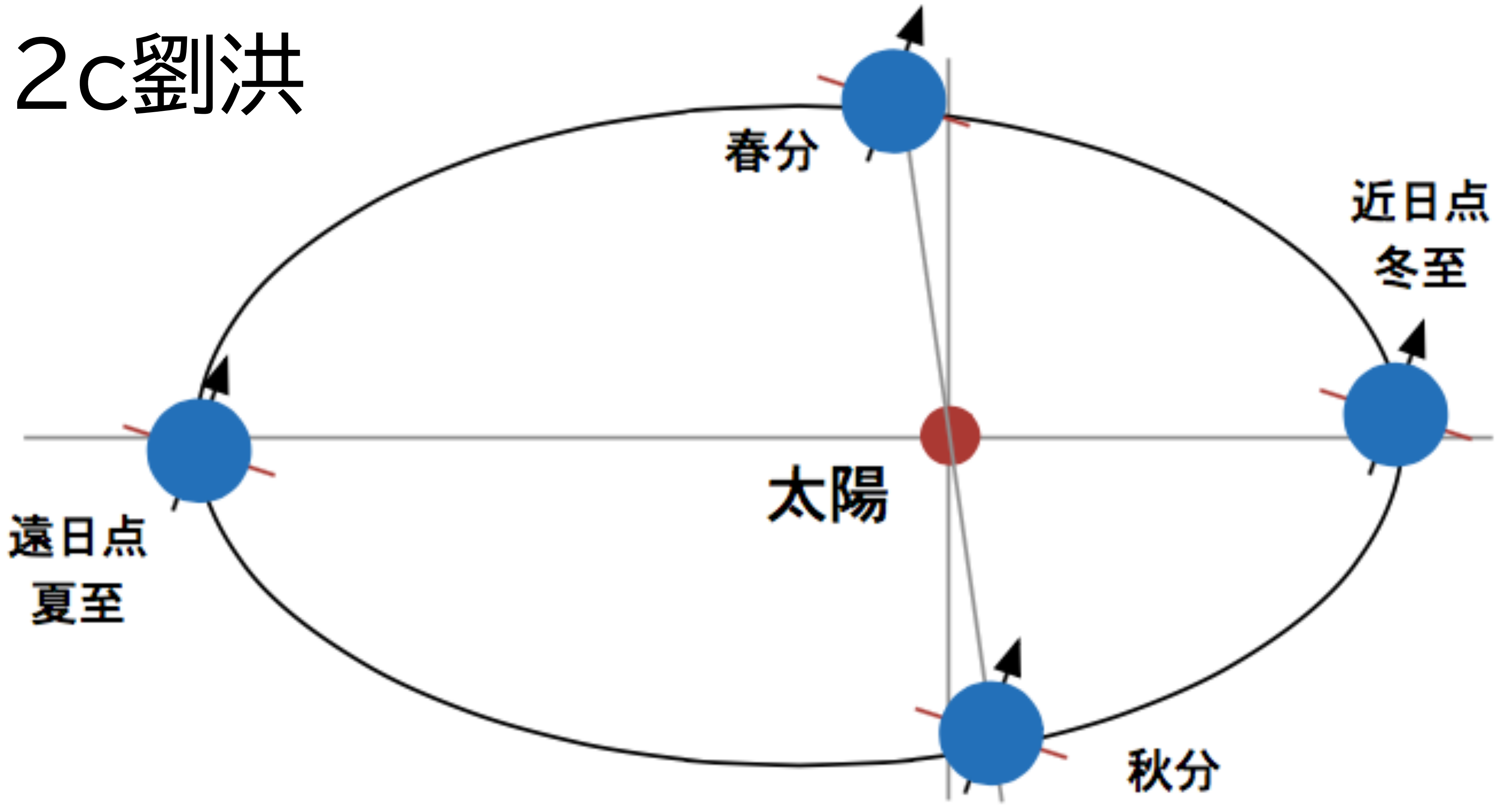
『崇禎暦書』を見た？
（そうなら，1727年以降？）

# 太陰太陽暦 （朔望月29.53日と太陽年365.2242日のよい組み合わせ）をつくる

閏月を何回いれるか　　**章法**(メトン周期19年に7回)から**破章法**へ
閏月をどこに入れるか　**歳終置閏法**から**歳中置閏法**へ
月初めをいつにするか　**平朔**から**定朔**へ

1年の長さを正確に知る　◂◂ 表(ノーモン)で冬至の瞬間を決める
地球の歳差を知る　◂◂ 星の位置の経年変化　4c虞喜
太陽の動きを正確に知る　◂◂ 楕円軌道の概念がなかったので,
太陽運動の不等性, 日行盈縮　6c張子信

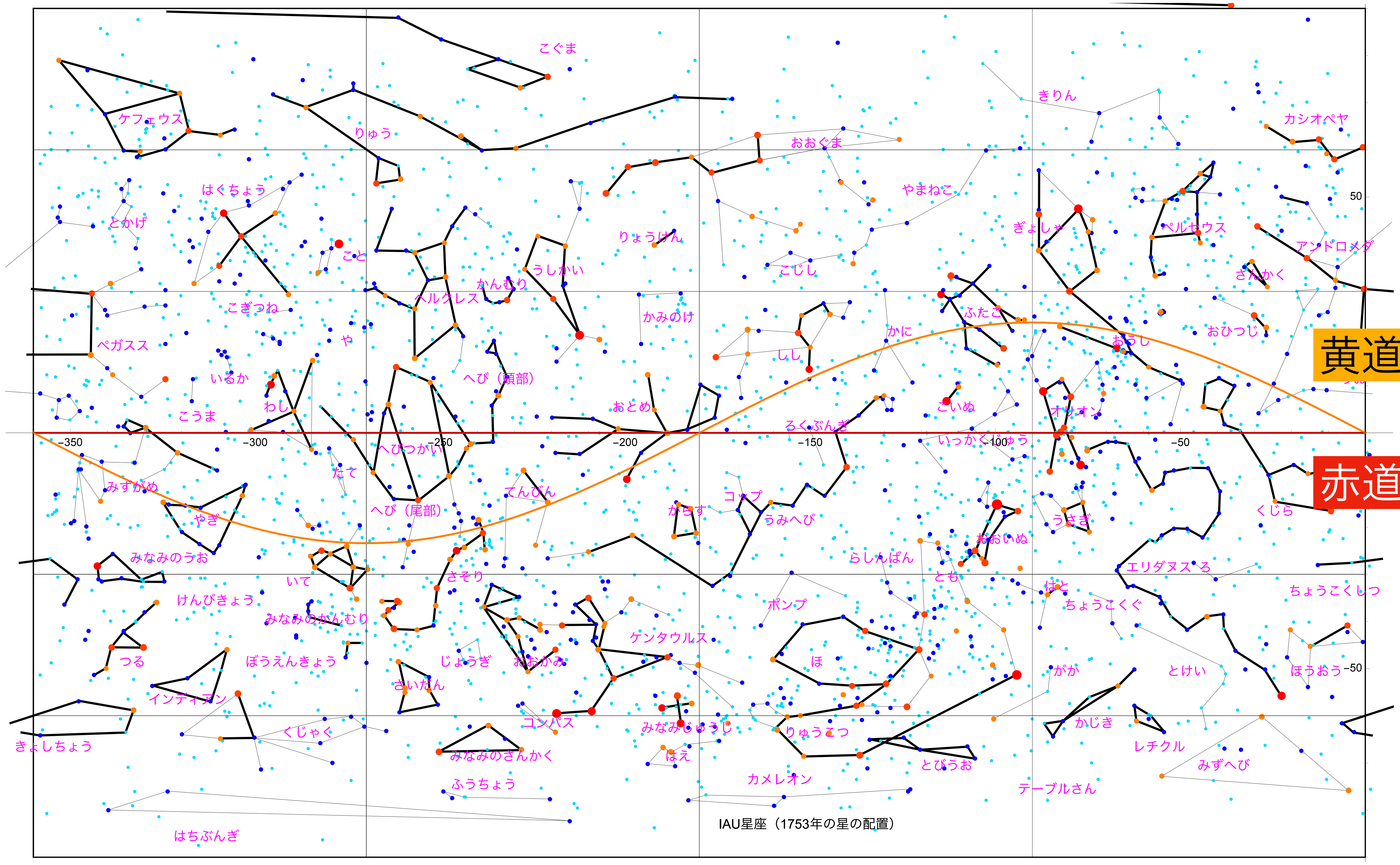
月の動きを正確に知る　◂◂ 楕円軌道の概念がなかったので,
月の運動の不等性, 月行遅疾　2c劉洪



# 暦に対する天文学的に必要な修正

## 万有引力による惑星運動は楕円 ➡ 運動の速さは面積速度一定の法則にしたがう

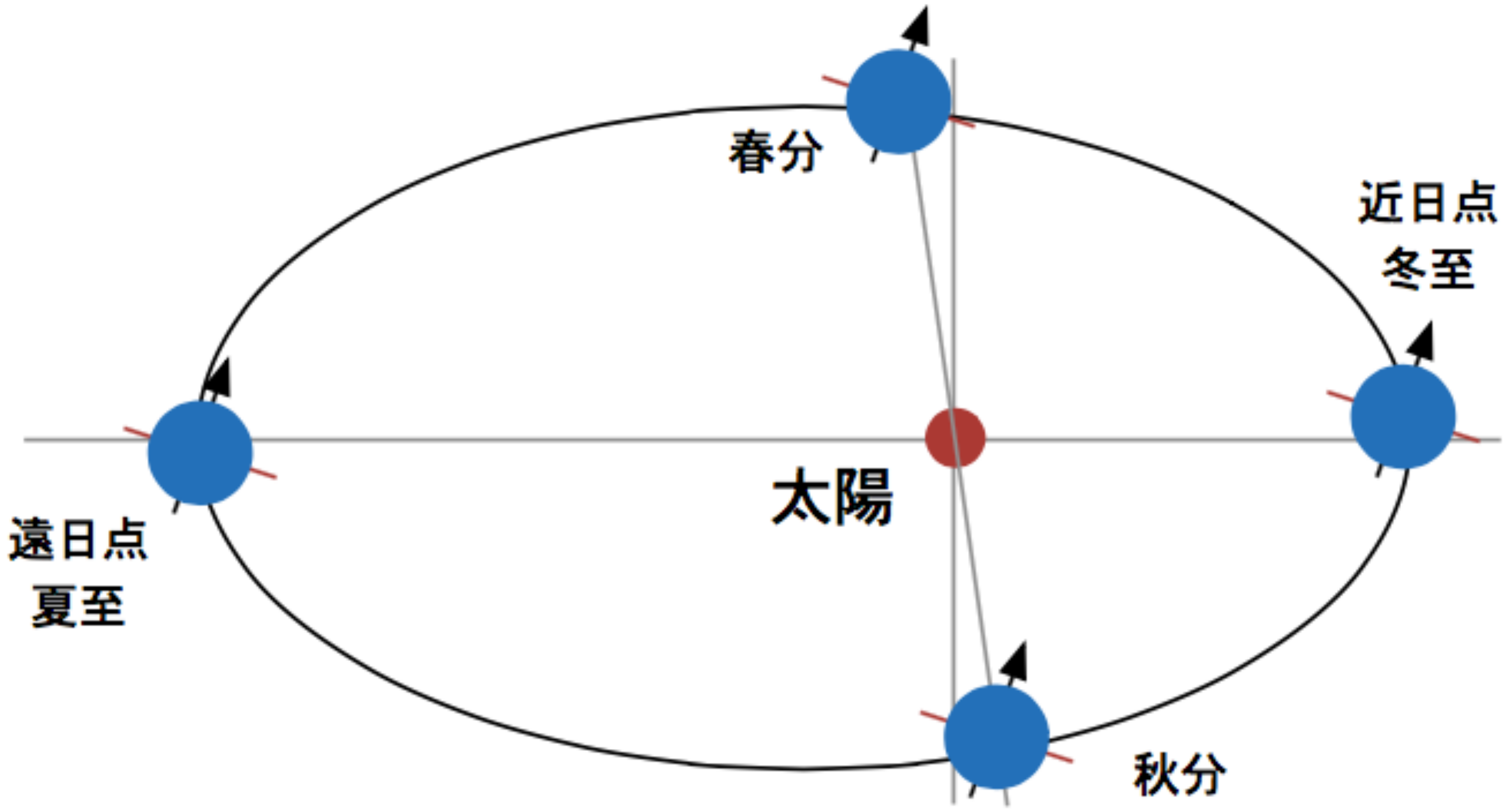
＊　太陽が天球面上を移動する速さは季節によって違う　**太陽運動の不等性，日行盈縮**




黄道（太陽の通り道）

赤道（北極星を極軸）

177 日　　186 日




2025/2026 年の場合，

春分の日(3/20)から秋分の日(9/23)までは 186 日
秋分の日(9/23)から春分の日(3/20)までは 177 日

# 中国では独自の天文暦学が発展

**表 12:** 中国で使われた主な暦.（A は山＋而＋頁，B は王＋頁，C は登＋おおざと，D は言＋斤，E は火＋卓，F は草かんむり＋爲，G は目＋候）

| 時代名 | 暦名 | 使い始め | 終わり | 作成者 | 特徴 | 日本への影響 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 殷・周代 | | | | | 太陰太陽暦の原型，二十四節気が農耕の目安として整備 | |
| 秦–前漢 | ＡＢ暦 | | | | | |
| 前漢 | 太初暦 | 前 104 年 | 84 年 | C平・落下紘ら | 中国初の計算体系が整った暦．24 節気を導入． | 中国暦の基本モデルとして伝来． |
| 前漢 | 三統暦 | | 84 年 | 劉 D | 食周期 135 月，暦元を過去におく上元積年法． | |
| 後漢 | 四分暦 | 85 年 | 220 年 | 編 D・李梵 | 1 年=365.25 日 | 日本で最初に公的に採用されたという説あり． |
| 呉 | 乾象暦 | 223 年 | 280 年 | 劉洪 | 章法（19 年 7 閏月），月の遅疾（近地点移動，黄道白道の交点の逆行） $1$ 年 $= 365\frac{145}{589} = 365.2462$ 日，1 朔望月 $= 29\frac{773}{1457} = 29.53054$ 日． | |
| 南朝宋 | 元嘉暦 | 445 年 | 509 年 | 何承天 | 定朔の導入． | 飛鳥時代に伝来し、初の公暦に． |
| 南朝梁 | 大明暦 | 510 年 | 589 年 | 祖沖之 | 歳差，破章法（391 年 144 閏月） 1 年 $= 365\frac{9589}{39491} (= 365.24281)$ 日 1 朔望月 $= 29\frac{2090}{3939} (= 29.5303)$ 日 | 元嘉暦とともに伝来．日本初期の暦法に多大な影響 |
| 隋 | 皇極暦 | – | – | 劉 E | 日行盈縮，破章法（676 年に 249 閏月），歳差 (76.5 年で 1 度) 1 年 $=$ 365.24454 日，1 朔望月 $= 29\frac{659}{1242} (= 29.53059581)$ 日 | |
| 唐 | 麟徳暦 | 665 年 | 728 年 | 李淳風 | 各計算の分母を 1340 に統一．1 年 = 365.24478 日． | 儀鳳暦の名で 697 年から採用． |
| 唐 | 大衍暦 | 729 年 | 761 年 | 一行 | 太陽の動きに基づく定気法，月の速度変化．1 年 = 365.2444 日． | 吉備真備が持ち帰り，764 年から使用． |
| 唐 | 五紀暦 | 762 年 | 821 年 | 郭献之 | 大衍暦を簡略・修正したもの． | 大衍暦と併用される形で伝来． |
| 唐 | 符天暦 | – | – | 曹士F | 暦元を 660 年とした（近距法）．九曜（日/月/五星/羅 G/計都）の位置，1 年 = 365.2448 日． | 暦博士や宿曜師が利用 |
| 唐 | 宣明暦 | 822 年 | 892 年 | 徐昂 | 定朔の計算法を改良（加減速） 1 年 = 365.2446 日． | 平安〜江戸初期まで約 800 年間使われた． |
| 元 | 授時暦 | 1281 年 | 1367 年 | 郭守敬 | 定朔の計算法を改良（3 次補間）．イスラーム天文観測を取り入れ． 1 年 = 365.2425 日 | 貞享暦（渋川春海）作成のモデルになった． |
| 明 | 大統暦 | 1368 年 | 1644 年 | （元の暦を継承） | 授時暦をほぼ踏襲し、定数を一部変更． | 民間暦や改暦議論に大きな影響． |
| 清 | 時憲暦 | 1645 年 | 1911 年 | Adam Schall ら | 西洋天文学の成果を取り入れ | 江戸後期の寛政暦・天保暦の理論的基礎となった． |
| 近代 | グレゴリオ暦 | 1912 年 | 現在 | | 世界標準の太陽暦 | 1872 年の日本の改暦と足並みを揃える形に． |

1年＝365.2448日　とした宣明暦を
800年近く使い続けた日本では，暦が2日ずれてしまう
▶▶ 江戸初期，改暦の必要性が認識され，
中国の授時暦が研究された．

現在は1年＝365.2422日の
グレゴリオ暦を使用

日本

1年＝365.2448日

862 宣明暦

1685 貞享暦

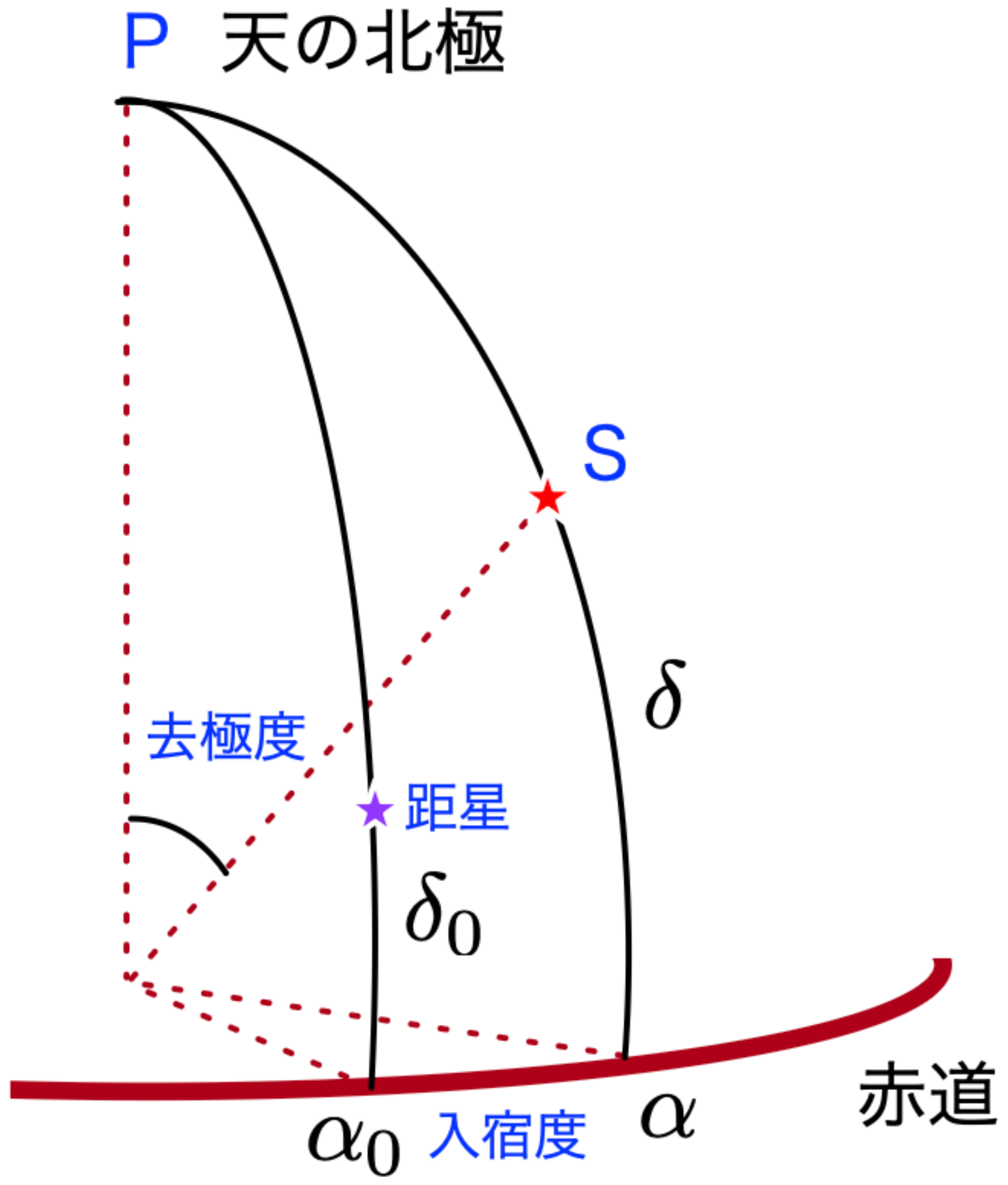
1755 宝暦暦

1798 寛政暦

1844 天保暦

# 天測の座標系：赤道座標・黄道座標・極黄道座標

Equatorial Coordinate System・Ecliptic Coord Sys.・Polar Ecliptic Coord Sys.




距星を基準に星Sの位置をいう

$$入宿度 = \alpha - \alpha_0, \qquad 去極度 = 90^\circ - \delta$$

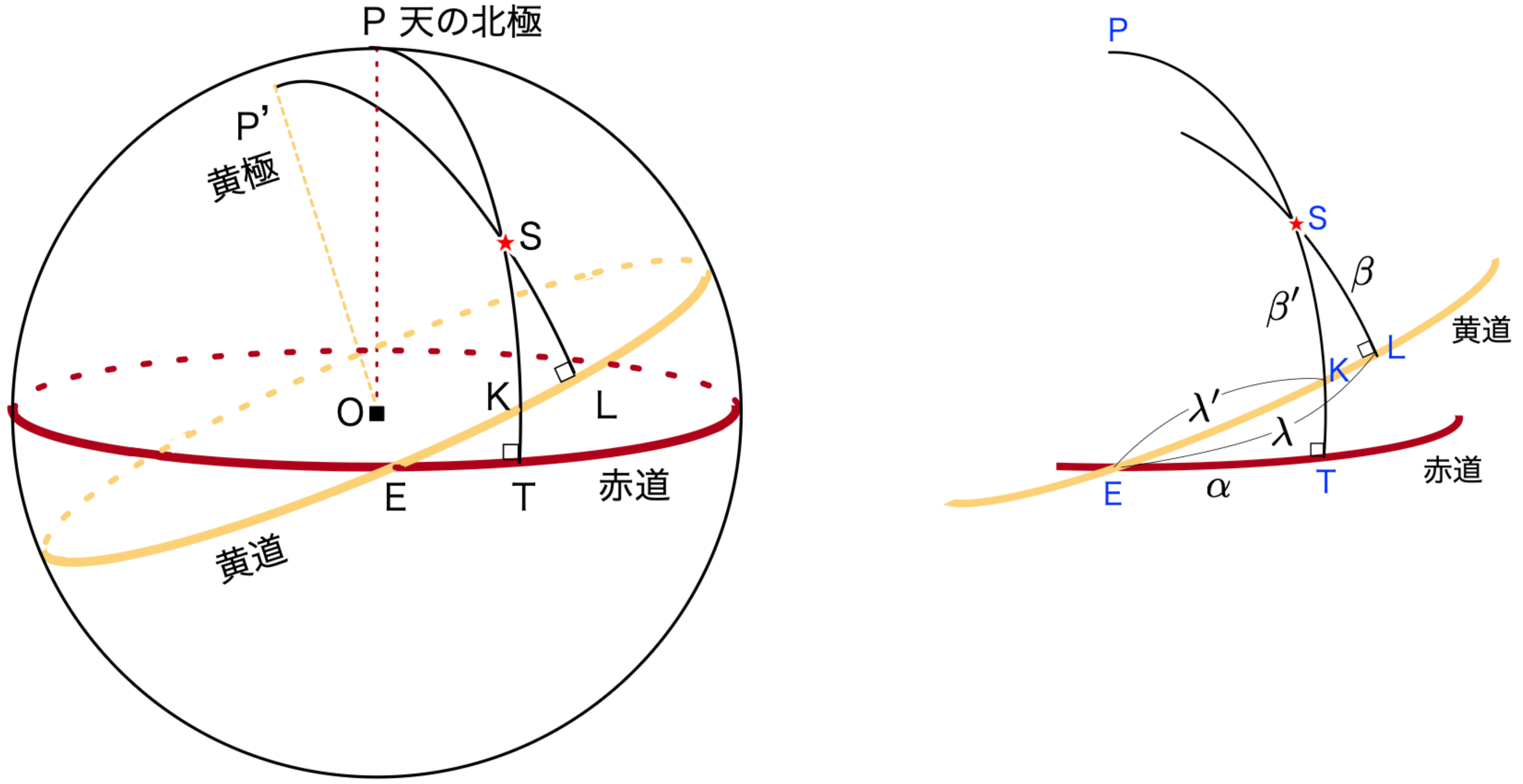



**図 6:** 黄道座標系 $(\lambda, \beta)$ と極黄道座標系 $(\lambda', \beta')$.

赤道座標：赤経 $\alpha = \overset{\frown}{ET}$，赤緯 $\delta = \overset{\frown}{TS}$ — ブラーエ以降，現在標準

黄道座標：黄経 $\lambda = \overset{\frown}{EL}$，黄緯 $\beta = \overset{\frown}{LS}$ — 西洋

極黄道座標：黄経 $\lambda' = \overset{\frown}{EK}$，黄緯 $\beta' = \overset{\frown}{KS}$ — 中国・インド

太陽や月の位置を表す

# 天測の座標系：赤道座標・黄道座標・極黄道座標

Equatorial Coordinate System・Ecliptic Coord Sys.・Polar Ecliptic Coord Sys.

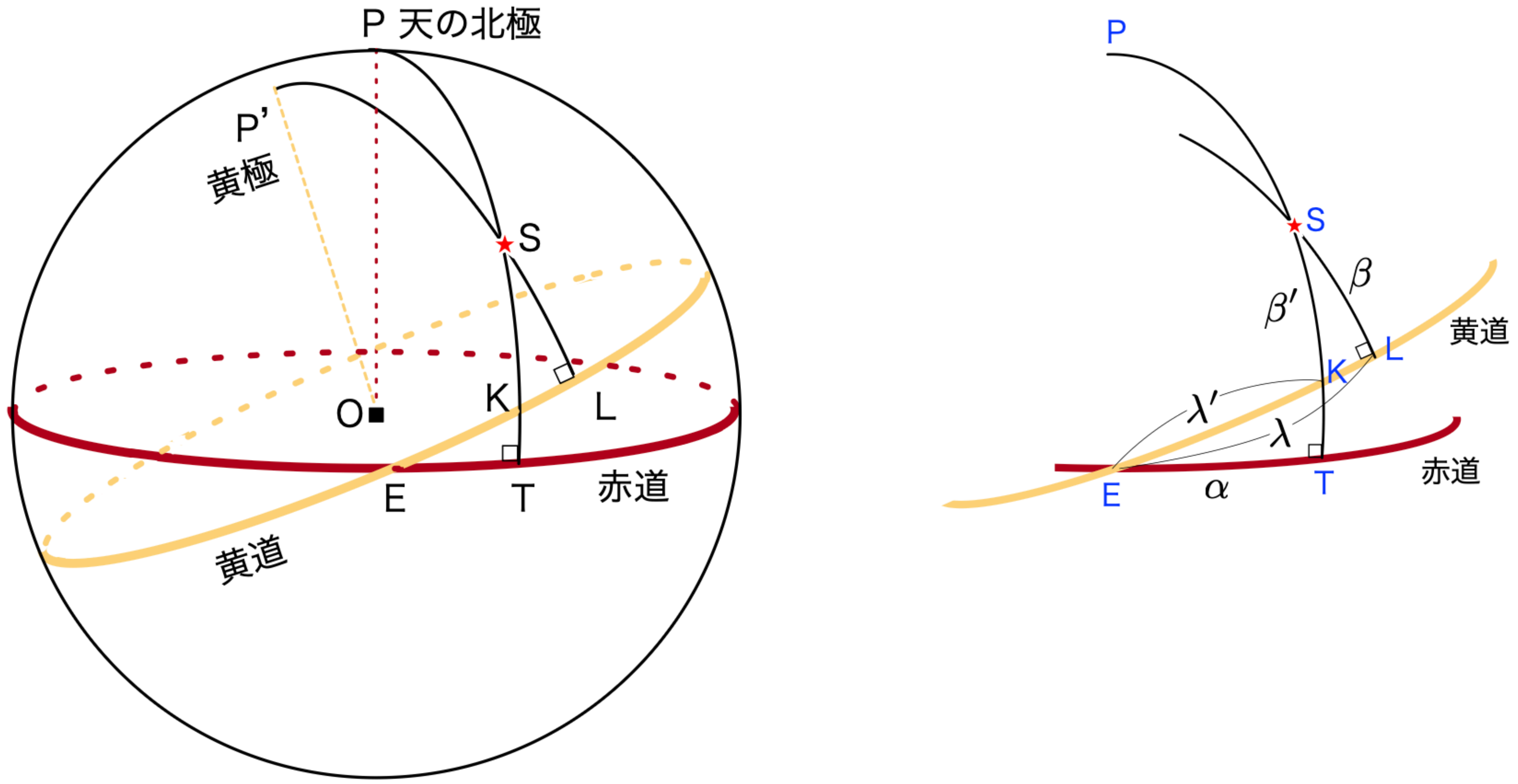
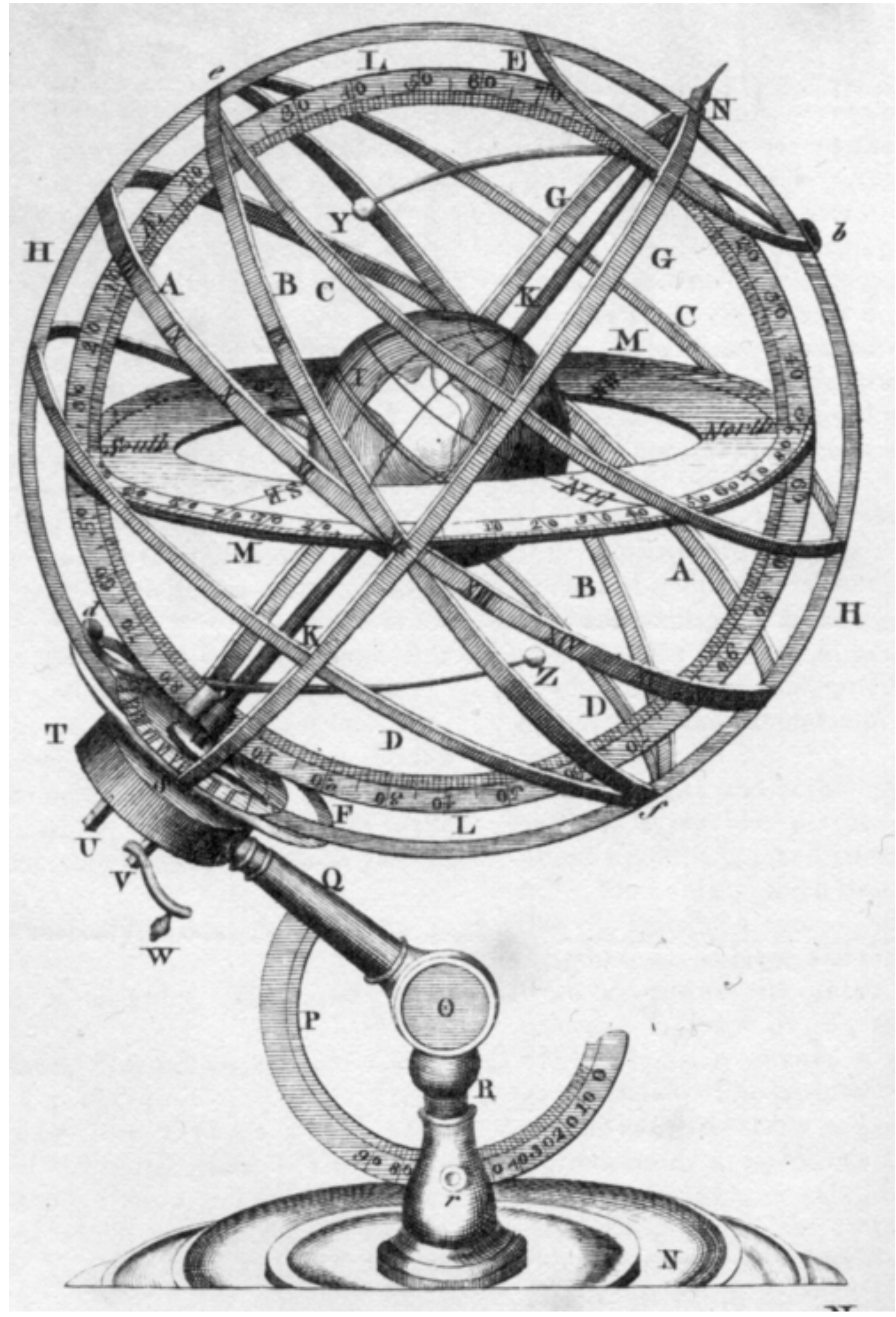



**図 6:** 黄道座標系 $(\lambda, \beta)$ と極黄道座標系 $(\lambda', \beta')$.

赤道座標：赤経 $\alpha = \overset{\frown}{ET}$，赤緯 $\delta = \overset{\frown}{TS}$

黄道座標：黄経 $\lambda = \overset{\frown}{EL}$，黄緯 $\beta = \overset{\frown}{LS}$

極黄道座標：黄経 $\lambda' = \overset{\frown}{EK}$，黄緯 $\beta' = \overset{\frown}{KS}$



渾天儀

Armillary sphere

# 天測の座標系変換：球面三角法

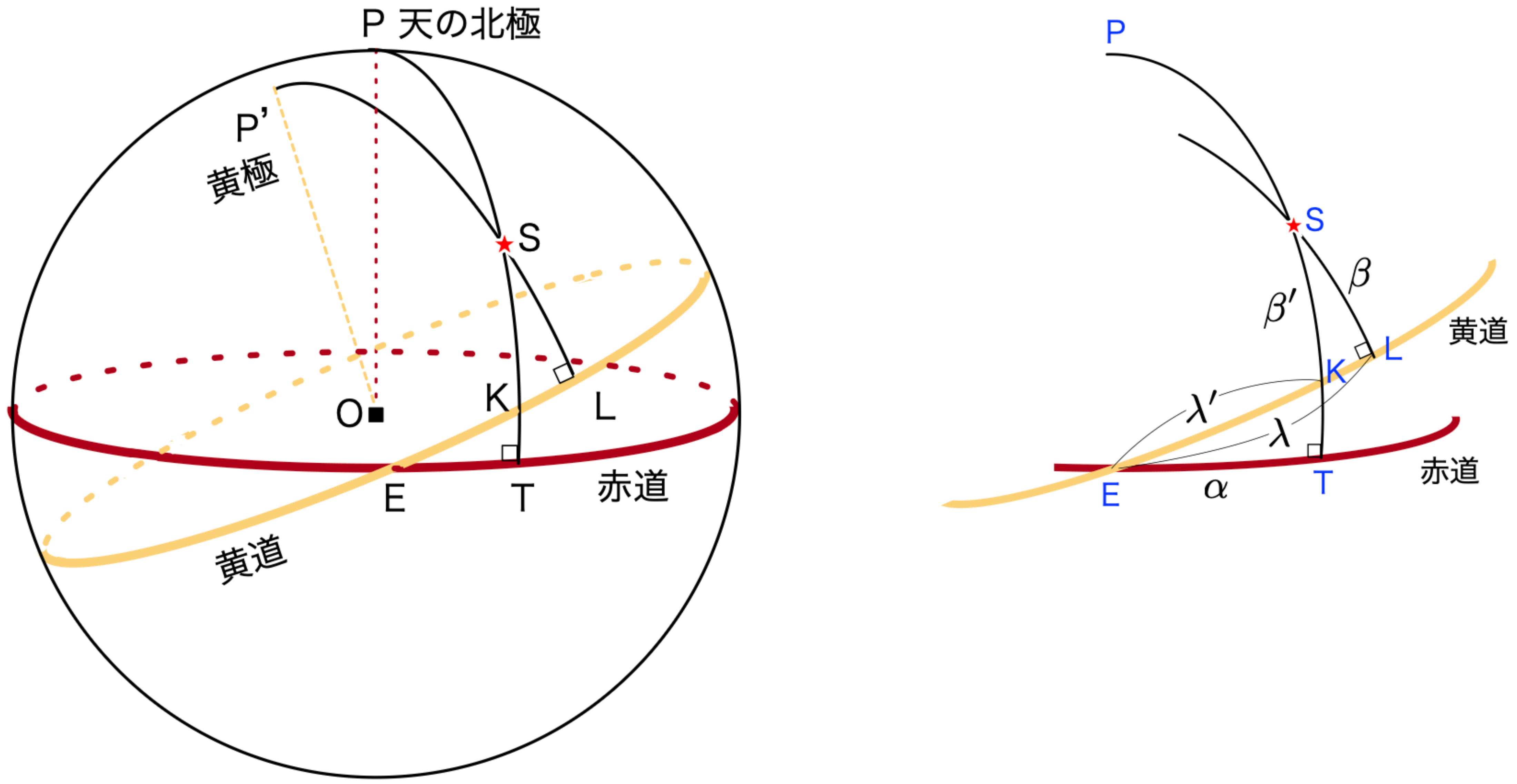



**図 6:** 黄道座標系 $(\lambda, \beta)$ と極黄道座標系 $(\lambda', \beta')$.

赤道座標：赤経 $\alpha = \overset{\frown}{ET}$，赤緯 $\delta = \overset{\frown}{TS}$

黄道座標：黄経 $\lambda = \overset{\frown}{EL}$，黄緯 $\beta = \overset{\frown}{LS}$

極黄道座標：黄経 $\lambda' = \overset{\frown}{EK}$，黄緯 $\beta' = \overset{\frown}{KS}$

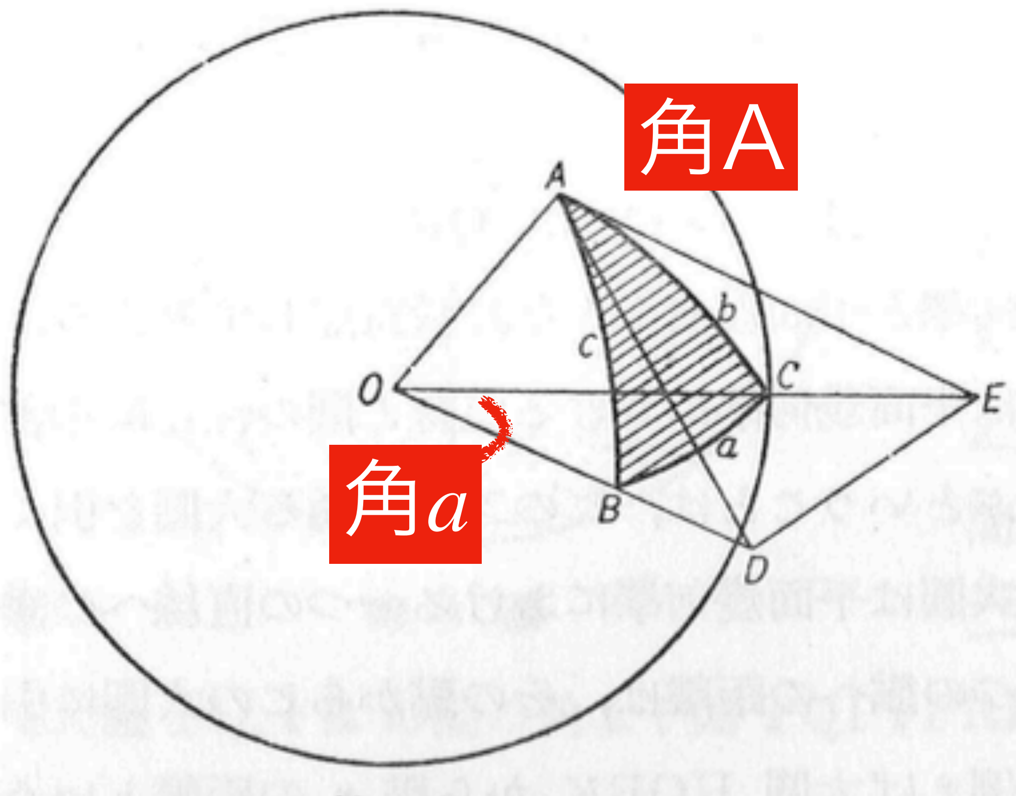
$$\tan \lambda' \cos \epsilon = \tan \alpha$$

**表 11:** 黄道座標 1 度と，赤道座標 1 度の対応.

| 限 | 赤経 $\alpha$(中国度) | 赤経 $\bar{\alpha}$(現行度) | 黄経 $\bar{\lambda}$(現行度) | 黄経 $\lambda'$(中国度) | $\lambda' - \alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 初 | 0 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 2 | 5 | 4.93 | 5.39 | 5.47 | 0.47 |
| 3 | 10 | 9.86 | 10.77 | 10.93 | 0.93 |
| 4 | 15 | 14.78 | 16.11 | 16.35 | 1.35 |
| 5 | 20 | 19.71 | 21.42 | 21.73 | 1.73 |
| 6 | 25 | 24.64 | 26.66 | 27.05 | 2.05 |
| 7 | 30 | 29.57 | 31.84 | 32.31 | 2.31 |
| 8 | 35 | 34.50 | 36.95 | 37.49 | 2.49 |
| 9 | 40 | 39.43 | 41.99 | 42.60 | 2.60 |
| 10 | 45 | 44.35 | 46.94 | 47.63 | 2.63 |
| 11 | 50 | 49.28 | 51.82 | 52.58 | 2.58 |
| 12 | 55 | 54.21 | 56.63 | 57.46 | 2.46 |
| 13 | 60 | 59.14 | 61.37 | 62.26 | 2.26 |
| 14 | 65 | 64.07 | 66.05 | 67.01 | 2.01 |
| 15 | 70 | 68.99 | 70.67 | 71.70 | 1.70 |
| 16 | 75 | 73.92 | 75.25 | 76.35 | 1.35 |
| 17 | 80 | 78.85 | 79.79 | 80.96 | 0.96 |
| 18 | 85 | 83.78 | 84.31 | 85.54 | 0.54 |
| 19 | 90 | 88.71 | 88.82 | 90.11 | 0.11 |
| | 91.3125 | 90.00 | 90.00 | 91.31 | 0.00 |

## § 4. 球面三角法の基本公式

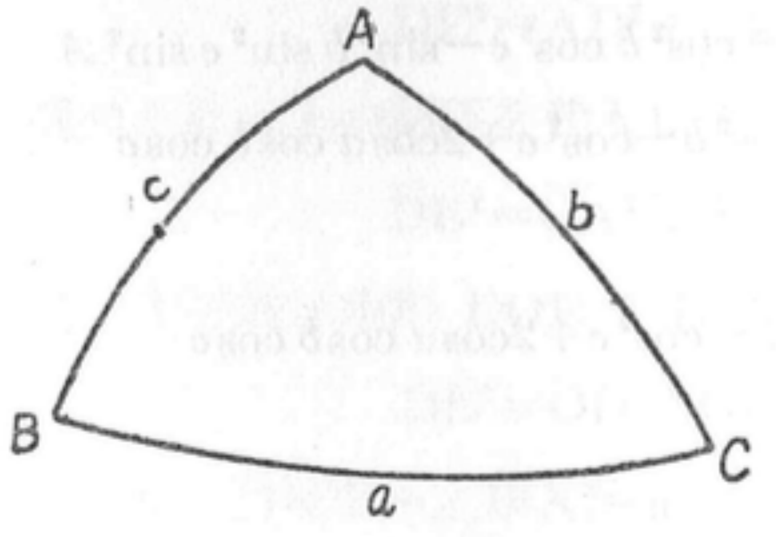
(i) 餘弦公式　ABC を球面三角形とし，邊 BC, CA, AB をそれぞれ $a$, $b$, $c$とする．A D は大圓ABのA 點における接線，同じく AE は A 點における大圓 AC への接線とする．從つて OA は AD, AE に垂直である．AD は大圓 AB の平面内にあるから，OB を延長すれば，接線 AD と D で交わる．




第 2 圖

球面角 BAC(簡單に ∠A と記す)＝∠DAE

余弦公式，正弦公式




第 3 圖

$$\left.\begin{aligned}\sin a\sin B&=\sin b\sin A\\ \sin a\cos B&=\sin c\cos b-\cos c\sin b\cos A\\ \cos a&=\cos c\cos b+\sin c\sin b\cos A\end{aligned}\right\}$$

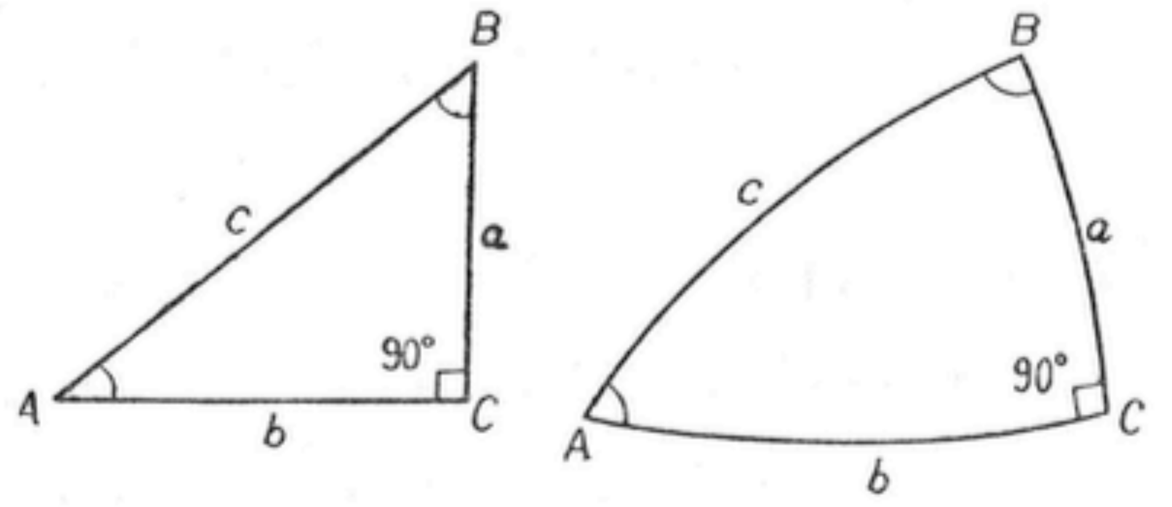
$$\left.\begin{aligned}\sin b\sin C&=\sin c\sin B\\ \sin b\cos C&=\sin a\cos c-\cos a\sin c\cos B\\ \cos b&=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B\end{aligned}\right\}\qquad(4\cdot6)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin c\sin A&=\sin a\sin C\\ \sin c\cos A&=\sin b\cos a-\cos b\sin a\cos C\\ \cos c&=\cos b\cos a+\sin b\sin a\cos C\end{aligned}\right\}$$

誘導公式　$\cos a\cos C=\sin a\cot b-\sin C\cot B$　(D)

## 球面直角三角形

以上六組の直角三角形に關する公式は球面三角形を解く場合に極めて重要なものである．今記憶に便なるように上述十箇の球面直角三角形に關する公式を平面直角三角形の公式と比較して見よう．但し $\angle C=90°$ とする．(第 5 圖)

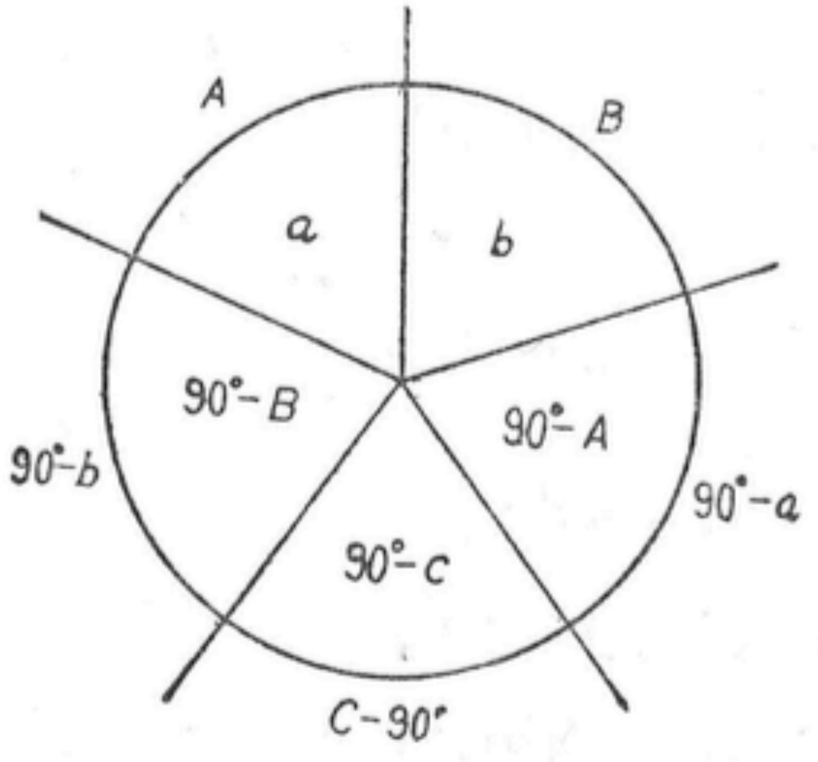



第 5 圖

| 平面直角三角形 | | 球面直角三角形 | |
|---|---|---|---|
| $\sin A=\frac{a}{c}$, | $\sin B=\frac{b}{c}$ | $\sin A=\frac{\sin a}{\sin c}$ | $\sin B=\frac{\sin b}{\sin c}$ |
| $\cos A=\frac{b}{c}$ ・ | $\cos B=\frac{a}{c}$ | $\cos A=\frac{\mathrm{tg}\, b}{\mathrm{tg}\, c}$ | $\cos B=\frac{\mathrm{tg}\, a}{\mathrm{tg}\, c}$ |
| $\mathrm{tg}\, A=\frac{a}{b}$ | $\mathrm{tg}\, B=\frac{b}{a}$ | $\mathrm{tg}\, A=\frac{\mathrm{tg}\, a}{\sin b}$ | $\mathrm{tg}\, B=\frac{\mathrm{tg}\, b}{\sin a}$ |
| $\sin A=\cos B$, | $\sin B=\cos A$ | $\sin A=\frac{\cos B}{\cos b}$ | $\sin B=\frac{\cos A}{\cos a}$ |
| $c^2=a^2+b^2$ | | $\cos c=\cos a\cos b$ | |
| $1=\cot A\cot B$ | | $\cos c=\cot A\cot B$ | |

これを記憶するためにナピアの法則がある．

先ず圓の内側を第 6 圖に示すように $a, b, 90°-A,\ 90°-c, 90°-B$ の五部分




第 6 圖


第 7 圖

# 天測の座標系変換：会円術

北宋時代，沈括（しんかつ）（1031-1095）は，『夢渓筆談（ぼうけい）』（1088）にて，弧の長さに対する「会円術（かいえん）」を提示した．円の直径を $d$，矢 CD の長さを $c$，弦 AB の長さを $a$ とする [図7(左)] と，弧 ACB の長さ $s$ は

$$\text{会円術} \quad s = \frac{2c^2}{d} + a \tag{26}$$

とする近似式である．図を半分にしたときの関係は，半弧（半背）を $\ell$，半弦を $p$ として

$$\boxed{\text{会円術} \quad \ell = \frac{c^2}{d} + p} \tag{27}$$

となる．

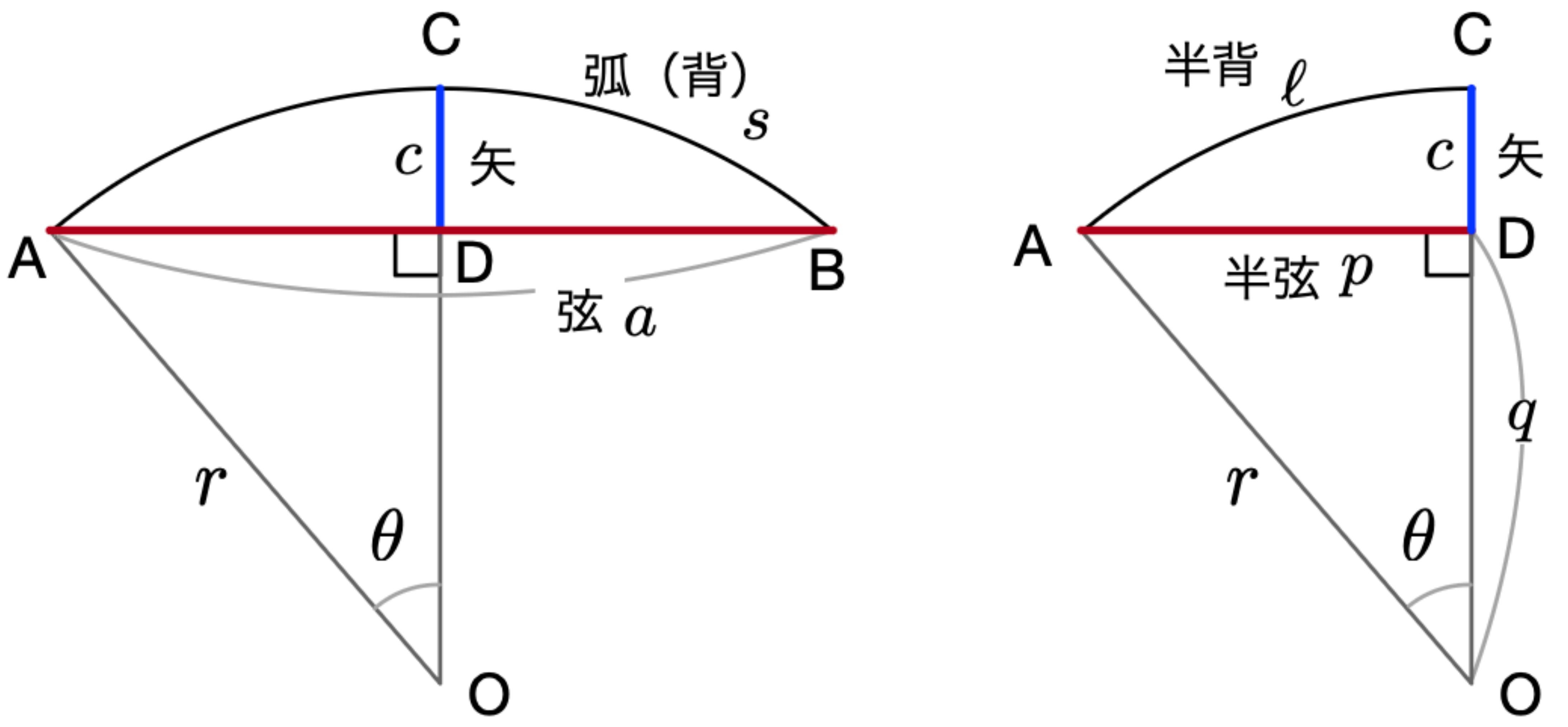
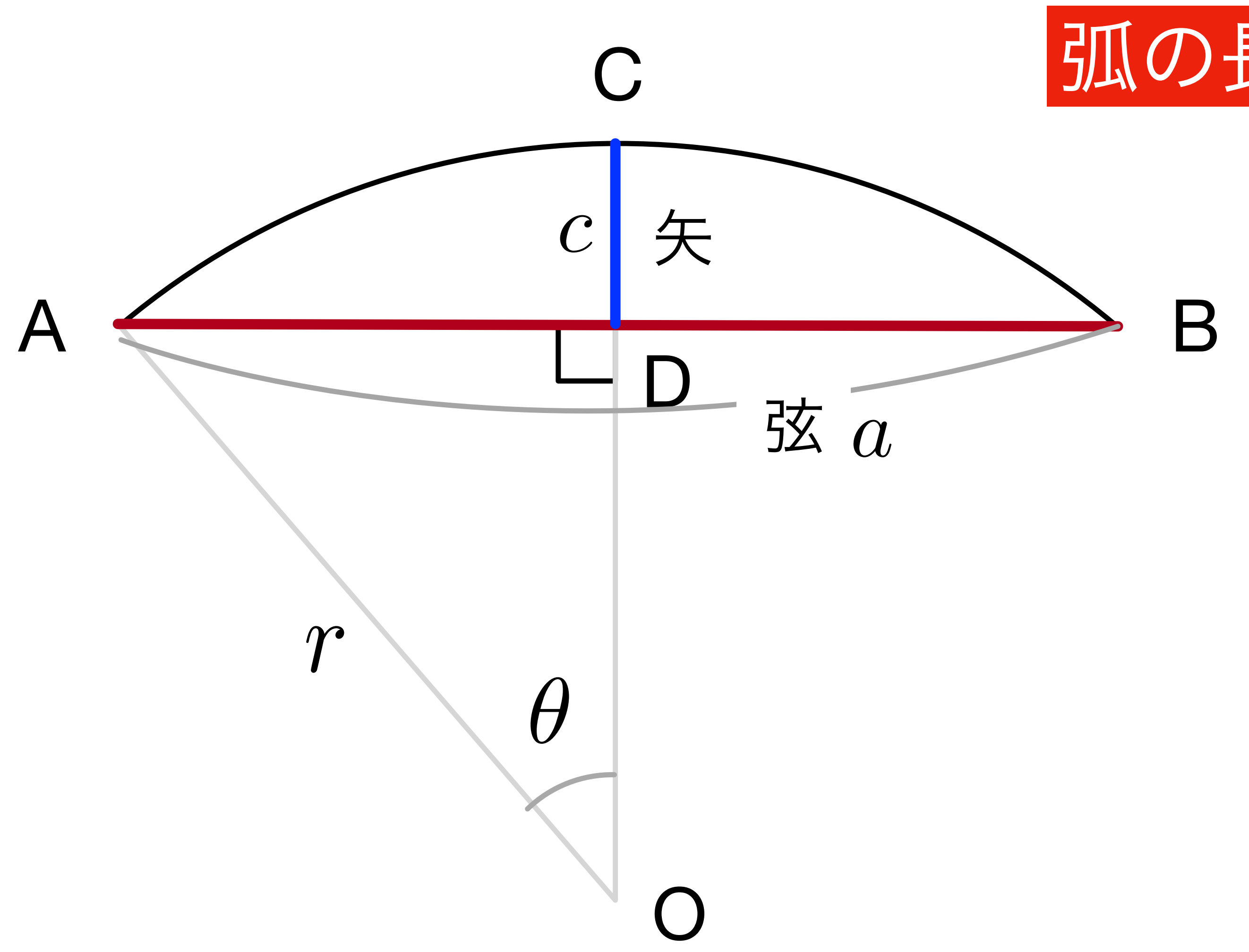
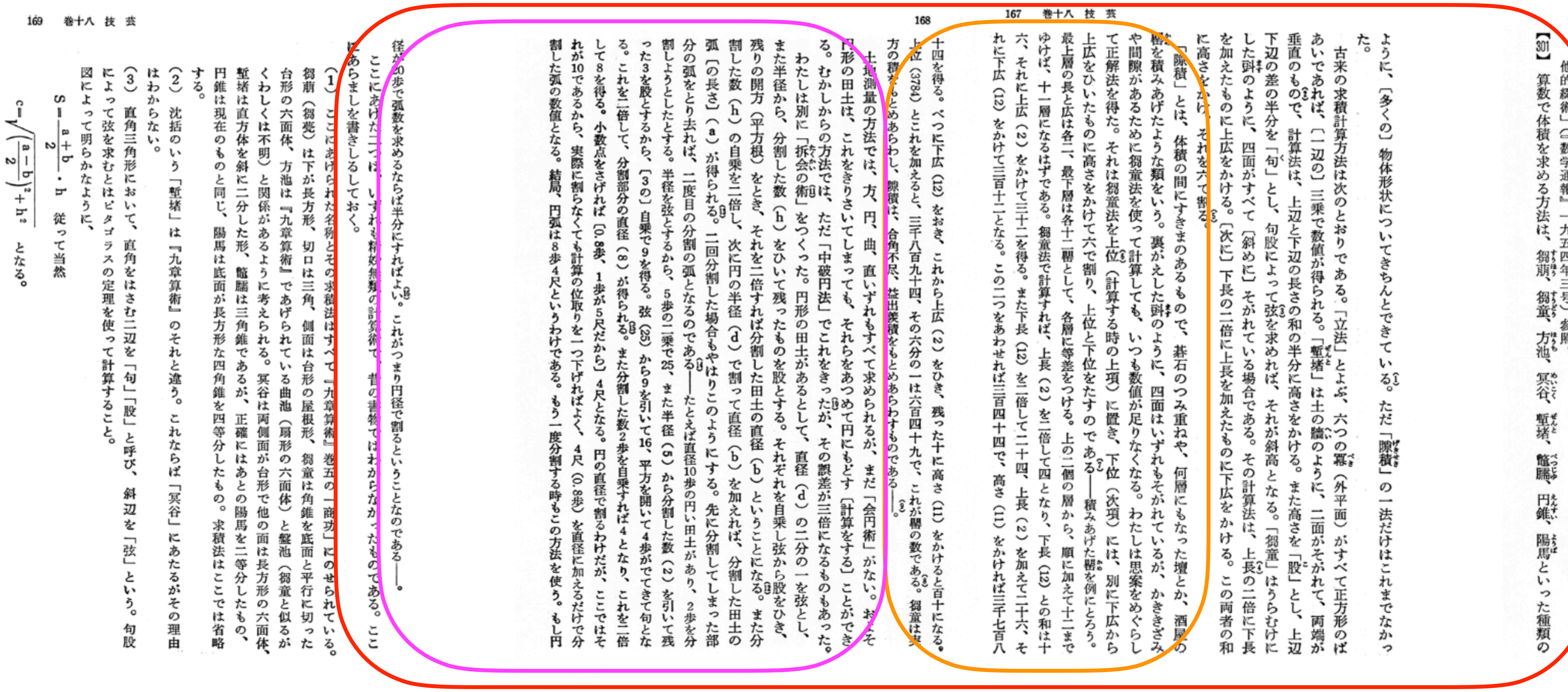


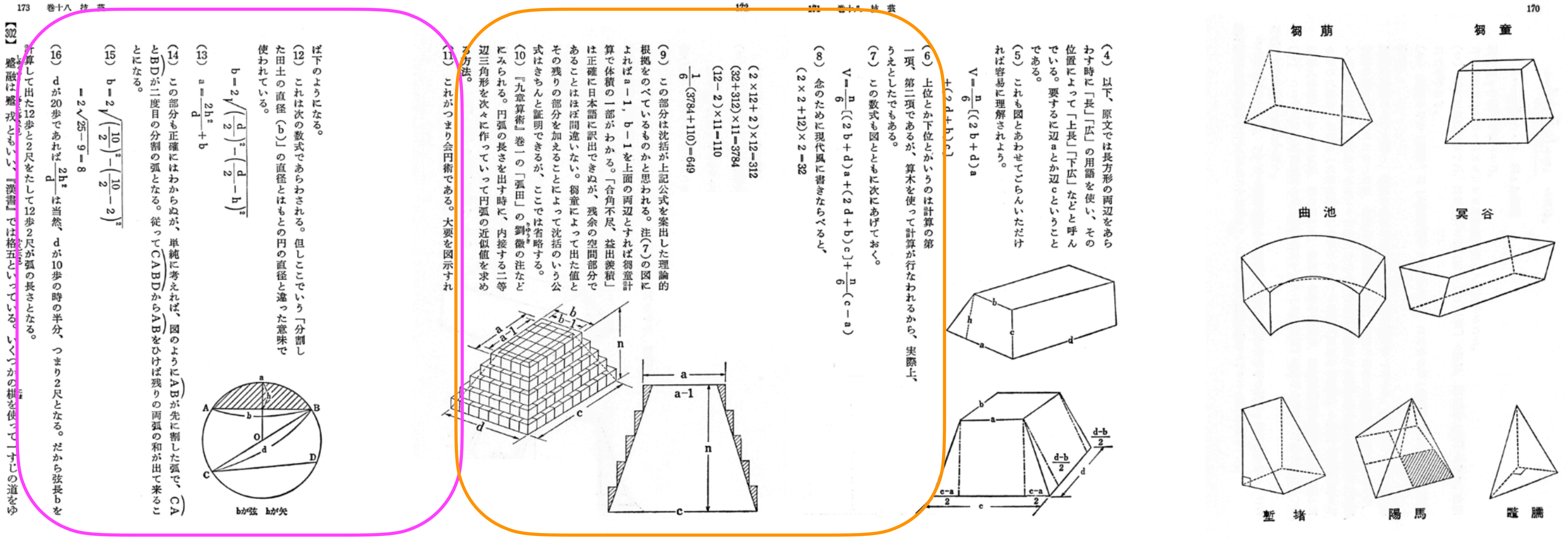

**図 7:** （左）沈括『夢渓筆談』の会円術での変数定義図．（右）半弦・半背としたときの変数定義図．

しんかつ
# 沈括(1031-1095)
# 『夢渓筆談』(1088)
ぼうけいひつだん

弧の長さは？

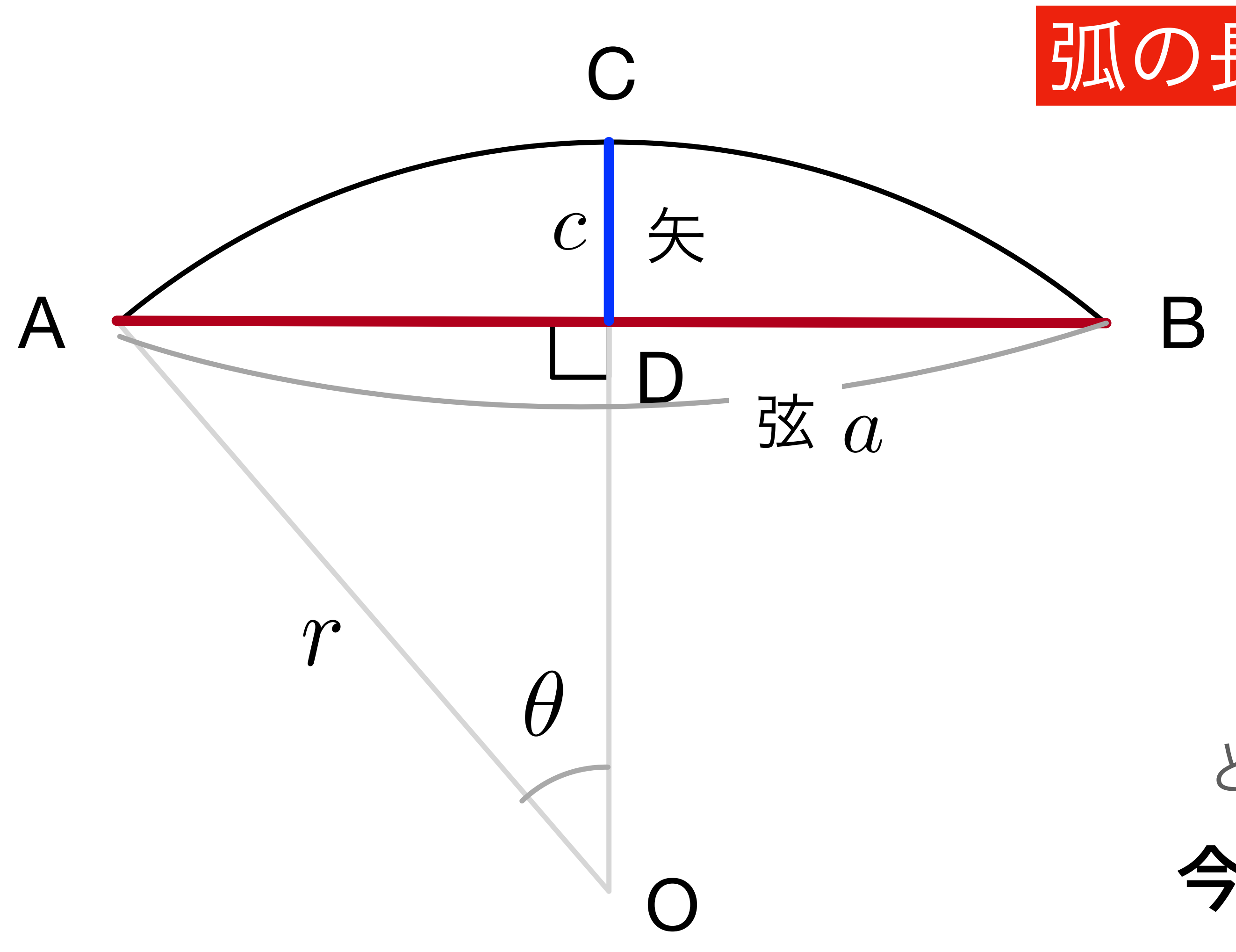




「隙積数」
げきせきじゅつ
「垛積術」
だせきじゅつ

「会円術」
かいえんじゅつ




弧の長さは？

「会円術」
かいえんじゅつ

$$\text{会円術} \quad s = \frac{2c^2}{d} + a$$

？

線形近似では導出できない

ともあき じゅがいろく
今村知商『竪亥録』
(1639)

径矢弧の術

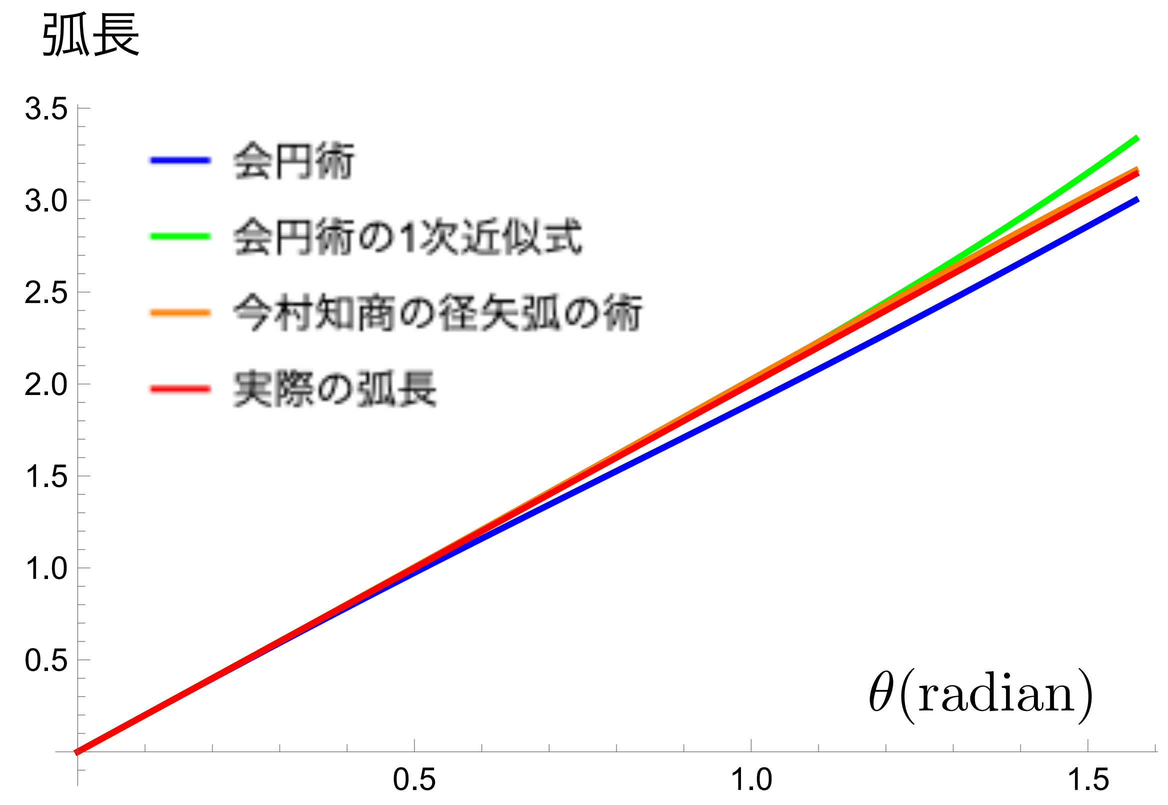
$$s^2 = 4cd + 2c^2$$

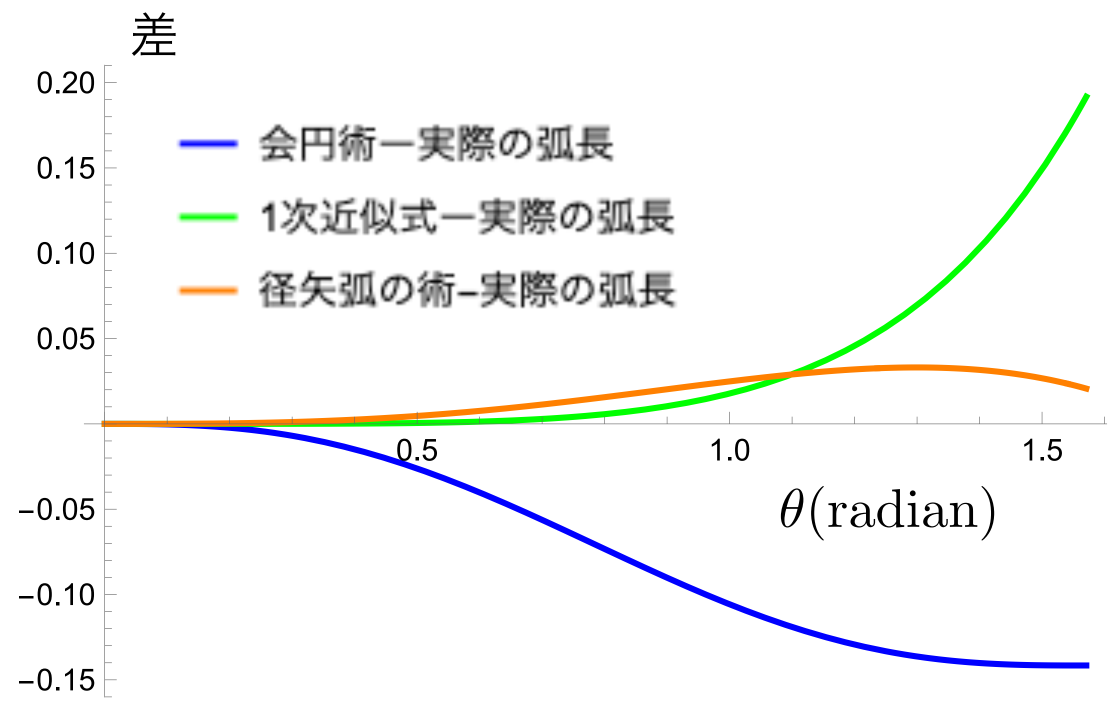
この式の有効性を見るために，実際の長さと，逆三角関数を用いた近似式とを比較してみる．半径 $r$ は，$b, c$ を用いて式 (31) で表されるので，弧の長さ $s$ は，

$$s = 2r\theta = 2r \sin^{-1}\frac{a/2}{r} \tag{35}$$

これを $r \gg a$ として近似すると

$$\begin{aligned} s &= 2r\theta \simeq 2r\left(\frac{a}{2r} + \frac{1}{6}\left(\frac{a}{2r}\right)^3\right) \\ &= a + \frac{a^3}{24r^2} \simeq a + \frac{8c^2}{3a} \end{aligned} \tag{36}$$



# 関孝和『関訂書』（1686）

**黄鼎　『天文大成管窺輯要』**（1652）全80巻，授時暦の数理をまとめる

関が写本した15条のうち，天文総論をのぞく14条は，原文が明末の周述学 (?-1583?) による文章（小林博行2014）

**関孝和　『関訂書』**（1686）

**関孝和『授時発明』（1680）**

表 13: 『関訂書』に写本された『天文大成管窺輯要』の箇所とその内容．*印は『授時発明』で解読されているもの．■は，日＋咎

| | | |
|---|---|---|
| 巻之三の内 | 歳差 | （地球の自転軸の首振り運動による）春分点の移動 |
| | 論中■差（ちゅうき） | 各地で測定した正午の影の長さ |
| | 論黄赤差* | 黄道と赤道のずれ（黄赤交角）によって生じる太陽の運行のズレや補正 |
| | 論黄赤内外差* | （地球の自転軸が公転面に対して傾いていることで生じる）季節ごとの昼夜の長さや太陽の出没位置の変化 |
| | 論白与黄赤道差* | 白道・赤道・黄道の対応，日月食や天体の位置を正確に予測するための幾何学 |
| 巻之四の内 | 天文総論之内 | |
| 巻之七の内 | 日月交食差 | 日食や月食の「計算上の予測と実際の観測とのズレ（食の時刻や規模の誤差）」 |
| | 論日度 | 太陽の天球面上の位置（角度） |
| 巻之八の内 | 論日躔盈縮差（にってんえいしゅく） | （地球の公転軌道が楕円であるために生じる）太陽の運動の速度変化 |
| 巻之十の内 | 論月度 | 月の天球面上の位置（角度） |
| | 論月離遅疾差 | 月の天球面上の動き（月離）の速度変化 |
| | 定朔加減差 | 天体の平均的な動き（平均朔日＝経朔）から，太陽や月の運動の速度変化を計算し，実際の新月（定朔）の日時を求めるための補正値（加減） |
| 巻之十二 | 五星常変差 | 5 つの惑星（水星・金星・火星・木星・土星）が，規則正しい動き（常）からズレる現象やその計算（変差） |
| | 論五星経度 | 5 つの惑星（水星・金星・火星・木星・土星）の位置（黄経） |
| | 論五星緯度 | 5 つの惑星（水星・金星・火星・木星・土星）の位置（黄緯） |

# 関孝和『関訂書』（1686）

観天比崇天但加三乗限分以求合於度法耳。庚
午法同崇天、其黄赤差則減半度矣。已前四術是不過以
斜求斜之法。惟郭守敬授時用弧矢接勾股之法以
求之法、以黄道半弧背立天元一以求得黄道矢自
之以周天径除之得黄道半背弦差、去減黄道半弧背
余為黄道半弧弦。又用黄道矢去減周天半径余（余
の一字天理本に欠く）為黄赤道小弦、以黄赤道大股
乗之用黄赤道大弦除之得黄赤（道の字を入れる）小
股。又以黄赤道小股自之以黄道半弧弦自之相併平
方開（之を入れる）得赤道小弦。又以黄道半弧弦乗
半径所得以赤道小弦除之為赤道大股、就為赤道
半弧弦。又以黄（赤の字を入れる）道小股乗（黄の字を
入れる）赤道大弦所得用赤道小弦除之得赤道横大
勾、以減半径余為赤道横弧矢、自之如円径而一
得赤道半背弦差、去加赤道半弧弦為赤道半弧背。用
（内と訂正）減黄道度余得黄赤道差二度三十分八十五
秒。稍減於庚午。是術循弧宛転実与天道脗合、最
為微妙。可謂冠絶古今矣。

論黄赤内外差

赤道横絡天腹黄道出入内外、冬至出赤道南夏至入
赤道北、其出入各二十四度、其差有漸、是謂黄赤内外
差。

辺岡崇玄立相減相乗之法以求之、計二至加時已来
至其日昏後夜半日数及分、冬至後為息、夏至後為消。
如一象限已下為初、已上反減二至限余為末。令
自相乗進二位以消息法千六百六十七半除為分、副

関孝和『授時発明』（1680）

黄赤道の差

『関孝和全集』（大阪教育図書，1974）平山諦，下平和夫，広瀬秀雄 編

# 関孝和『授時発明（天文大成三条図解）』（1680）



「天文大成三条図解」

**凡　例**

一　読み下しの底本として国立天文台附属図書館蔵の「天文大成三条図解」(請求番号449-S)を使った。

一　天理大学附属天理図書館蔵「天文大成三条図解」(請求番号440-13-34、以下天理大学本と略称する)と原文が異なる箇所はその都度注に記した。

一　底本の一部には一・二点がつけられているので、その場合はそれに従って読み下した。また、読み下し文の作成には、訓点がつけられている東北大学附属図書館岡本文庫蔵の「授時発明」(請求番号岡本写7)も併せて参考にした。ただし、引用されている『天文大成管窺輯要』巻三の本文の読みは、本文の訂正も含めて原則として「関訂書」に従ったが、一部読みを改めたところがある。岡本本と宮内庁図書寮本の「天文大成三条図解」(請求番号557-46)との校異も注に記した。

天文大成三条図解[1]

黄赤道の差を論ず[2]

郭守敬授時に弧矢接鈎股の法を用いて、以てこれを求めるの法、黄道の半弧背を以いて天元の一を立て、以て黄道の矢を求め得る[3]。

仮如、黄道の半弧背四十五度を以てこれを求む。天元の一を立て黄道の矢と為す。これを自して天径[4]に因る黄道半弧背弦の差と為す。左に寄す。黄道半弧背を列し、天径一百二十一度太[5]を以てこれに乗じて得る内、左に寄せたるを減じて、余りこれを自して、天径冪に因る[6]黄道半弧弦冪と為す。再び寄す。天径を列し、内、黄道の矢を減じて、余りを黄道の矢を以てこれに乗じ、黄道半弧弦冪と為す。天径冪を以てこれに相乗して得る数と再び寄せたるとを相消して開方の式[7]を得る。以て三乗の方にこれを開き、黄道の矢一十七度三十二分五十三秒を得る。

これを自して周天の径を以てこれを除し、黄道半背弦の差を得る。

黄道の矢を列し、これを自乗して得る数を実と為す。天径を以てこれを除し、黄道の半弧背弦の差二度四十六分[8]を得る。

黄道の半弧背を去減し、余りを黄道の半弧弦と為す。



黄道の半弧背弦の差を以て黄道の半弧背を減じて、余り四十二度五十四分を黄道の半弧弦と為す。

又た、黄道の矢を用いて周天の半径を去減して黄赤道の小弦と為す。

黄道の矢を以て天の半径六十零度八十七分半を減じ、余り四十三度五十四分半を黄赤道の小弦と為す。

黄赤道の大股を以てこれに乗じ、黄赤道の大弦を用いてこれを除して黄赤道の小股を得る。

黄赤道の小弦を列し、黄赤道の大股五十六度零六分半(二至出入する赤道の内外二十三度九十分を以て半弧背と為す。術に依りて黄赤道の大弧矢四度八十一分を求め得て、これを以て天の半径を減ずるの余りなり)を以てこれに相乗して得る数を実と為す。黄赤道の大弦六十零度八十七分半を以てこれを除し、黄赤道の小股四十零度零九分を得る。

又た、黄赤道の小股を以てこれを自し、黄道の半弧弦を以てこれを自し、相併せて平方にこれを開き赤道の小弦を得る。

黄赤道の小股を列し、これを自乗して得る数と、黄道の半弧弦これを自乗して得る数とを二位相併せて共に得る数を実と為す。平方にこれを開き、赤道の小弦五十八度四十五分三十秒を得る。

又た、黄道の半弧弦を以て半径に乗じて得るところ、赤道の小弦を以てこれを除して、赤道の大股と為す。就いて赤道の半弧弦と為す。

黄道の半弧弦を列し、天の半径を以てこれに相乗して得る数を実と為す。赤道の小弦を以てこれを除し、赤道の大股四十四度三十零分四十三秒を得る。就いて赤道の半弧弦と為す。

又た、黄赤道の小股を以て黄赤道の大弦に乗じて得るところ、赤道の小弦を用いてこれを除して、赤道の横の大鈎を得る。

黄赤道の小股を列し、黄赤道の大弦を以てこれに相乗して得る数を実と為す。赤道の小弦を以てこれを除し、赤道の横の大鈎四十一度七十五分を得る。

以て半径を減じて、余りを赤道の横の弧矢と為す。

赤道の横の大鈎を以て天の半径を減じ、余り一十九度一十二分半を赤道の横の弧矢と為す。

これを自して円径[9]の如く而も一にして、赤道の半背弦の差を得る。

赤道の横の弧矢を列し、これを自乗して得る数を実と為す。天径の如く而も一にして、赤道の半弧背弦の差三度零零四十二秒を得る。



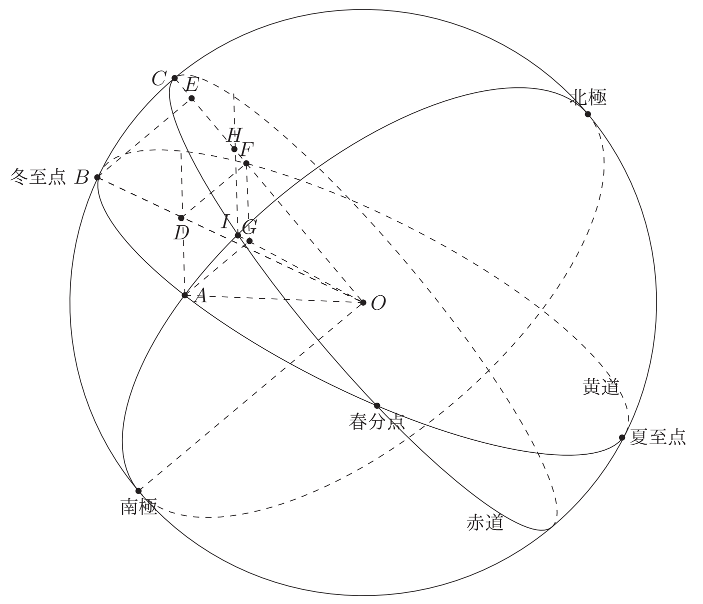




赤道の半弧弦に去加して赤道の半弧背と為す(去は当に以て作るべし[10])。

赤道の半弧背弦の差を以て赤道の半弧弦を加入して、赤道の半弧背四十七度三十零分[11]八十五秒を得る(余はこれに倣へ)。

図に云く(朱を以て経を見、墨を以て緯を見る[12])




$\overset{\frown}{BA}$＝黄道半弧背：黄径(今日の極黄径，黄道の北極ではなく赤道の北極をもとに冬至点を起点にしている)，$DB$＝黄道矢(原図では黄矢)，$DA$＝黄道半弧背弦(原図では黄半弦)，$CE$＝黄赤道大弧矢点 $B$，$D$ から線分 $OC$ に降ろした垂線の足をそれぞれ $F$，$E$ とする．$\overset{\frown}{BC}$＝二至出入内外(黄道傾斜角)，$BO$＝黄赤道大弦，$DO$＝黄赤道小弦，$EO$＝黄赤道大股，$FO$＝黄赤道小股，$CH$＝赤道矢，$\overset{\frown}{CI}$＝赤道半弧背，点 $A$ から線分 $IO$ に降ろした垂線の足を $G$ とする．$GO$＝赤道小弦(原図では赤小弦)，$IH$＝赤道半弧背弦(原図では赤半弦)＝赤道大股，$HO$＝赤道大鈎



『関孝和全集　3』（岩波，2023）上野健爾，小川　束，小林龍彦，佐藤賢一 編（サンプルファイルとして入手可能）

# 関孝和『授時発明（天文大成三条図解）』（1680） [黄赤道の差] 1

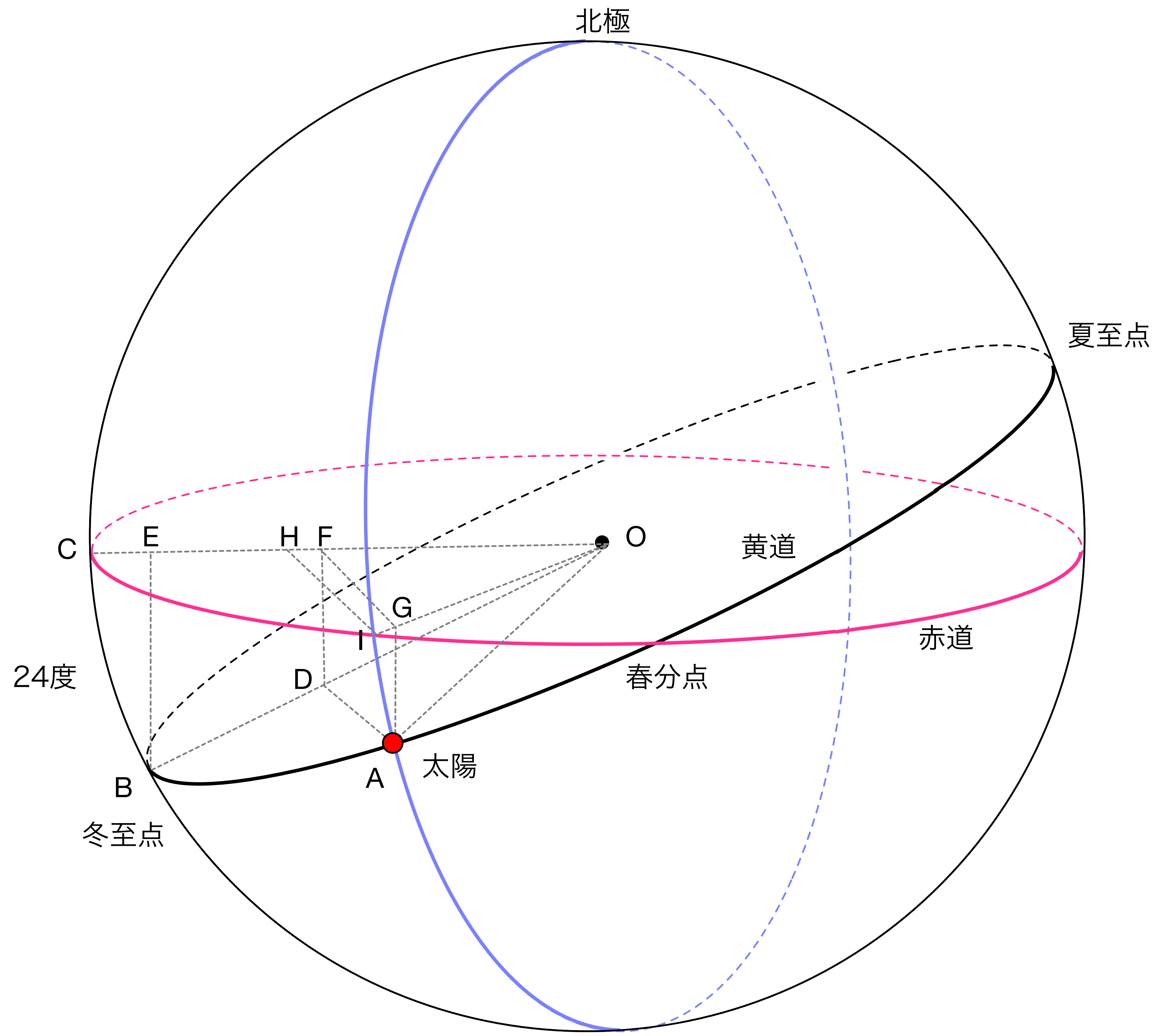
弧BAを観測したとき，弧CIの長さとの差はいくつか？

表 14: 関孝和全集『授時発明』の「黄赤道の差」の計算．書き下し文は岩波本 [22] のもの．

| 『授時発明』書き下し文 | 解読 | 備考 |
|---|---|---|
| 仮如（たとへば)、黄道の半弧背四十五度を以てこれを求む。 | 黄道の弧の長さ（半弧背 BA）を $\ell = 45^{\#}$ とする． | 太陽が黄道の位置 A（弧 BA の長さ $\ell$）にある．これに対応する赤道の弧の長さ CI を求めるのが目的．天径（直径）を $d = 121.75$, 円周を $365.25^{\#}$（円周率 3）としている． |
| 天元の一を立て黄道の矢と為す。 | 求めたい「黄道の矢 BD」を $x$ と置く． | (天元術による変数立て) |
| これを自して天径に因る黄道半弧背弦の差と為す。 | $x$ を 2 乗して，直径 $d$ で割った値は，黄道半弧背弦 (AD，長さ $p_1$) との差 $\ell - p_1$ と等しくなる． $\frac{x^2}{d} = \ell - p_1$ | 会円術の式 (26) $\ell - p = \frac{x^2}{d}$ を適用． |
| 左に寄す。 | $x^2 = d(\ell - p_1)$ とする． | |
| 黄道半弧背を列し、天径一百二十一度太を以てこれに乗じて得る内、左に寄せたるを減じて、余りこれを自して、天径冪に因る黄道半弧弦冪と為す。 | $\ell$ に対して，$d = 121.75$ を乗じ，先の $x^2$ を減じ，その差を 2 乗して $d^2$ で割る式の値は，$p_1^2$ となる． $(d\ell - x^2)^2/d^2 = p_1^2$ | 太は 3/4. |
| 再び寄す。 | $(d\ell - x^2)^2 = d^2 p_1^2$（式 1） | |
| 天径を列し、内、黄道の矢を減じて、余りを黄道の矢を以てこれに乗じ、黄道半弧弦冪と為す。 | $d$ に対して $x$ との差をとり，$x$ をかけた値は，$p_1^2$ と等しくなる． $p_1^2 = x(d-x)$ | 円の幾何学的性質（方べきの定理）を適用．半弦の 2 乗は「矢」と「直径から矢を引いた残り」の積に等しい． |
| 天径冪を以てこれに相乗して得る数と再び寄せたるとを相消して開方の式を得る。 | $d^2$ を両辺にかけて $d^2 p_1^2 = d^2 x(d-x)$ とする．先に得た（式 1）と等しいと置く（相消す）． $(d\ell - x^2)^2 = d^2 x(d-x)$ これより，解くべき式が得られる． | 以下の 4 次方程式が導かれる． $x^4 + (d^2 - 2d\ell)x^2 - d^3 x + (d\ell)^2 = 0$ |
| 以て三乗の方にこれを開き、黄道の矢一十七度三十二分五十三秒を得る。 | この 4 次方程式を解くと，実数解として $x = 17.3253^{\#}$ を得る．黄道の矢 BD が求められた． | 「三乗の方」とは 4 次方程式（最高次が $x^4$）のこと．授時暦は 100 進法（1 度= 100 分、1 分= 100 秒）． |

BD=x として求める

BDを矢，ADが半弦，弧AB既知より会円術を用いる



# 関孝和『授時発明（天文大成三条図解）』（1680） [黄赤道の差] 2

| | | |
|---|---|---|
| 黄道の矢を列し、これを自乗して得る数を実と為す。天径を以てこれを除し、黄道の半弧背弦の差二度四十六分を得る。 | $x^2$ を $d$ で割り，$\ell - p_1$ を得る．$\ell - p_1 = 2.46$ を得る． | |
| 黄道の半弧背弦の差を以て黄道の半弧背を減じて、余り四十二度五十四分を黄道の半弧弦と為す。 | $\ell = \ell$ の両辺から $\ell - p_1 = 2.46$ を減じることで，$p_1 = 42.54$ を得る． | $p_1 = \ell - 2.46 = 42.54$ を得る． |
| 黄道の矢を以て天の半径六十零度八十七分半を減じ、余り四十三度五十四分半を黄赤道の小弦と為す。 | 半径 $r = d/2 = 60.875$ より，矢 $x$ を引き，余りを黄赤道の小弦 (DO，長さ $q_1$) が得られる $q_1 = r - x = 43.545$. | ここで黄道面上での話が終わる． |
| 黄赤道の小弦を列し、黄赤道の大股五十六度零六分半（二至出入する赤道の内外二十三度九十分を以て半弧背と為す。術に依りて黄赤道の大弧矢四度八十一分を求め得て、これを以て天の半径を減ずるの余りなり）を以てこれに相乗して得る数を実と為す。黄赤道の大弦六十零度八十七分半を以てこれを除し、黄赤道の小股四十零度零九分を得る。 | （夏至または冬至のとき，黄道と赤道の間は $23.90^{\#}$ の弧の長さ BC がある．先の術をここでも用いて，黄赤道の大弧矢 (CE, 長さ $x_0$) を $x_0 = 4.81^{\#}$ と求め、天の半径 $r$ から $x_0$ を引いた余りで得られる $r - x_0 = 56.065^{\#}$ を黄赤道の大股 (EO, 長さ $q_0$) とする．）黄赤道の小弦 (DO)$q_1$ と，黄赤道の大股 $q_0$ を乗じたものを黄赤道の半径 $r = 60.875$ で割ることで，黄赤道の小股 (FO, 長さ $\omega$) $\omega = 40.09$ を得る． | 夏至または冬至のとき，原点と黄道面と赤道面で囲まれる円弧の話になる．三角形 OEB と三角形 OFD の相似を用いて，黄赤道の小股 (FO, 長さ $\omega$) を求める． |
| 黄赤道の小股を列し、これを自乗して得る数と、黄道の半弧弦これを自乗して得る数とを二位相併せて共に得る数を実と為す。平方にこれを開き、赤道の小弦五十八度四十五分三十秒を得る。 | 黄赤道の小股 (FO, $\omega$) の 2 乗と黄道の半弧弦 (AD) を 2 乗して加えた数を実とする．平方にこれを開き、赤道の小弦 (GO) を得る．赤道の小弦 (GO) $= \sqrt{(小股\ (FO))^2 + (黄道半弧弦\ (AD))^2} = \sqrt{40.09^2 + 42.54^2} \approx 58.455^{\#}$ | 三角形 OFG に三平方の定理を適用．AD=GF としているが，本来は，赤道面と黄道面の傾きを考慮すべき． |
| 黄道の半弧弦を列し、天の半径を以てこれに相乗して得る数を実と為す。赤道の小弦を以てこれを除し、赤道の大股四十四度三十零分四十三秒を得る。就いて赤道の半弧弦と為す。 | $\dfrac{黄道の半弧弦\ (GF) \times 天の半径\ (OI)}{赤道の小弦\ (OG)}$ を計算することによって，赤道の半弧弦 (IH) を得る．$44.3043^{\#}$ となる．この弦 IH(長さ $p_3$) が求められたので，弧 IC (長さ $a$) が求められることになる． | 三角形 OGF と三角形 OIH が相似なので，OG : GF = OI : IH . |
| 黄赤道の小股を列し、黄赤道の大弦を以てこれに相乗して得る数を実と為す。赤道の小弦を以てこれを除し、赤道の横の大鈎四十一度七十五分を得る。 | $\dfrac{黄赤道の小股\ OF(40.09) \times 大弦\ OI(60.875)}{赤道の小弦\ OG(58.455)}$ より，赤道の大鈎 OH を得る．41.75. | 三角形 OGF と三角形 OIH が相似なので，OF : OG = OH : OI . |

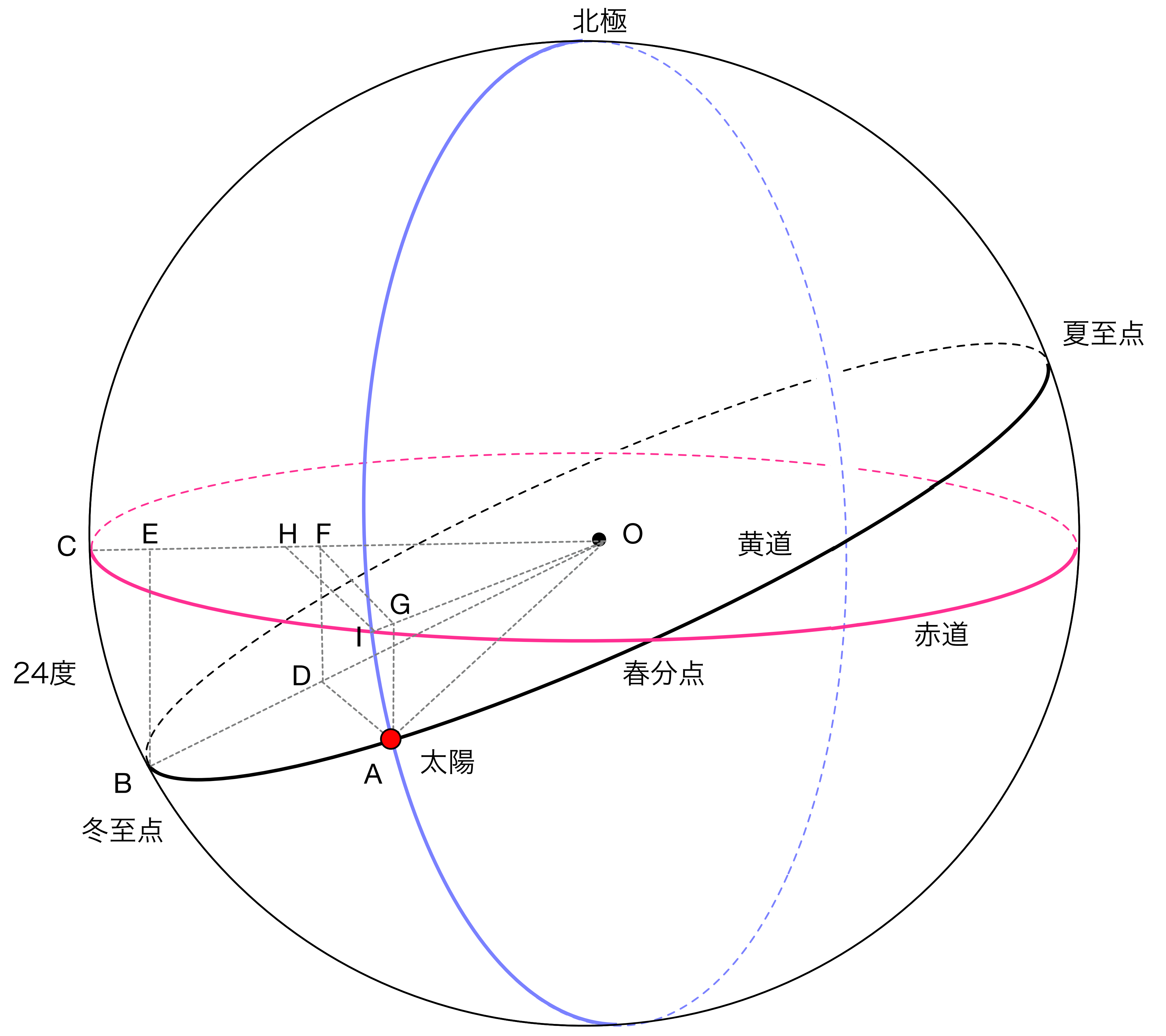
DBがわかったので，DOがわかる

同様にして，弧BC24度から，CEを求め，EOの長さがわかる

三角形OEBと三角形OFDは相似，FOがわかる．

DA=FGとして三角形OGFに三平方の定理を使ってOGを求める．

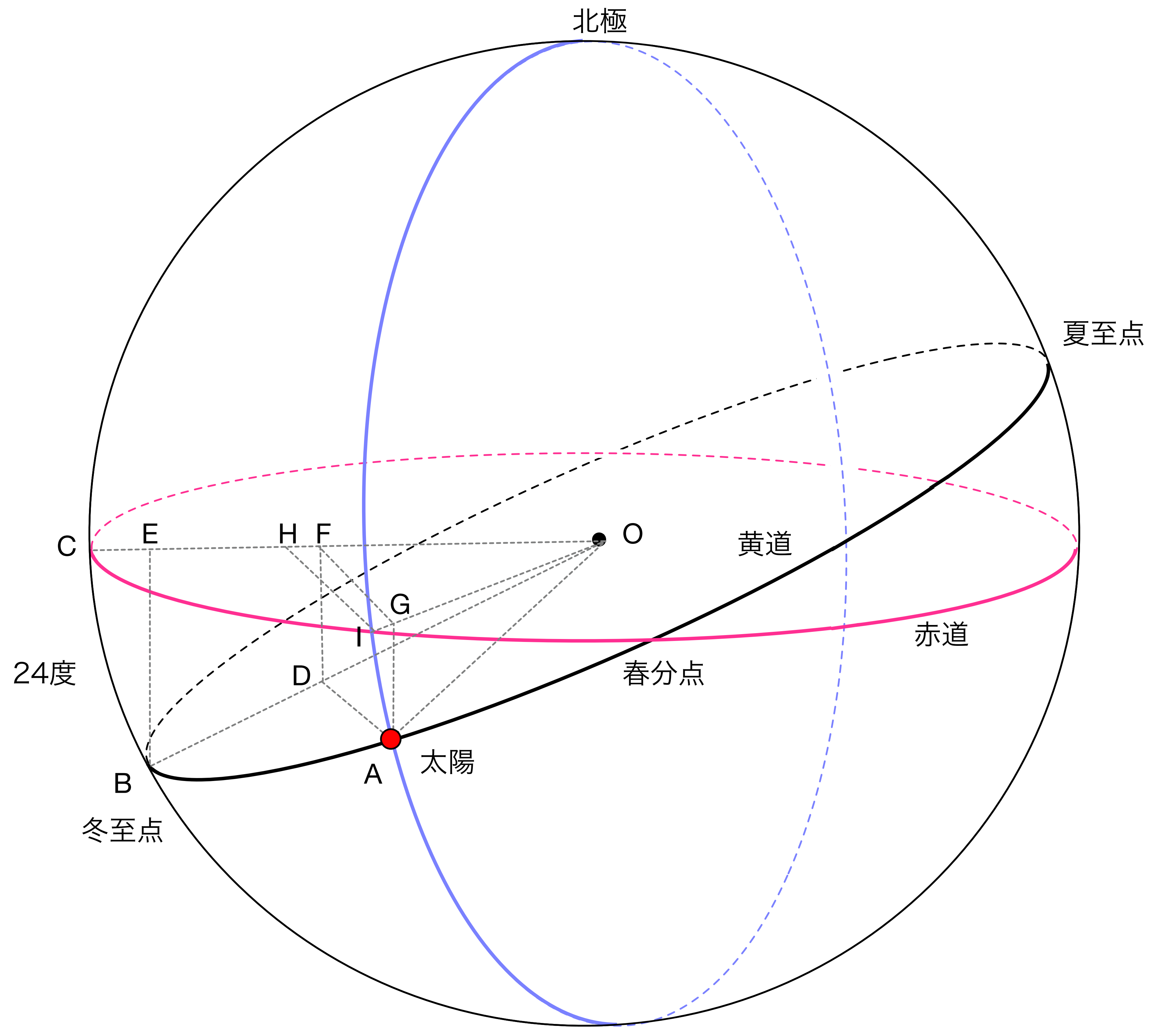
三角形OGFと三角形OIHは，相似，IHがわかる．OHもわかる



# 関孝和『授時発明（天文大成三条図解）』（1680） [黄赤道の差] 3

| | | |
|---|---|---|
| 以て半径を減じて、余りを赤道の横の弧矢と為す。赤道の横の大鈎を以て天の半径を減じ、余り一十九度一十二分半を赤道の横の弧矢と為す。 | 赤道面での弧 OIC にて，弧矢 (CH) を求める．<br>(半径)−(大鈎 OH)=(弧矢 CH)=19.125 | 赤道面の OIC にて，会円術を適用する準備. |
| これを自して円径の如く而も一にして、赤道の半背弦の差を得る。赤道の横の弧矢を列し、これを自乗して得る数を実と為す。天径の如く而も一にして、赤道の半弧背弦の差三度零零四十二秒を得る。 | $\mathrm{CH}^2$/直径 $= 3.0042^{\#}$ となる．これは，弧 IC（長さ $a$） − 弦 IH （長さ $p_3$）に等しい. | 会円術を適用．$a - p_3 = \mathrm{CH}^2/d$ |
| 赤道の半弧弦に去加して赤道の半弧背と為す（去は当に以て作るべし）。赤道の半弧背弦の差を以て赤道の半弧弦を加入して、赤道の半弧背四十七度三十零分八十五秒を得る（余はこれに倣へ）。図に云く（朱を以て経を見、墨を以て緯を見る） | 得られた値 $3.0042^{\#}$ に，弦 IH （長さ $p_3 = 44.3043^{\#}$）を加えることで，弧 CI（長さ $a$）が求められる．$47.3085^{\#}$ | これにより、「黄道上で冬至点から 45 度の位置にある太陽は、赤道上では $47.3085^{\#}$ の位置にあたる」 |
| 赤道の半弧背を列し、内、黄道の半弧背を減じて、余り二度三十零分八十五秒を黄赤道の極差と為す。 | 黄道との差は，$2.3085^{\#}$ となる. | |
| 稍 (やや) 庚午より減ず。この術、循弧宛転、実まこと に天道と■合（ふんごう）す。(■は，月+勿+口）最も微妙為（た）り。古今に冠絶すと謂ふべし。 | | 「(赤道の値が）わずかに庚午の値から減じられる。この算法は、曲線を巧みに扱い、実に天体の運行（天道）とぴったり合致している。最も精妙（極めて精密で奥深い）である。古今に比類なき（天下無双の）優れた術であると言うべきだろう。」(Google AI 訳) |

CHとIHがわかるので，会円術を用いてCIがわかる．

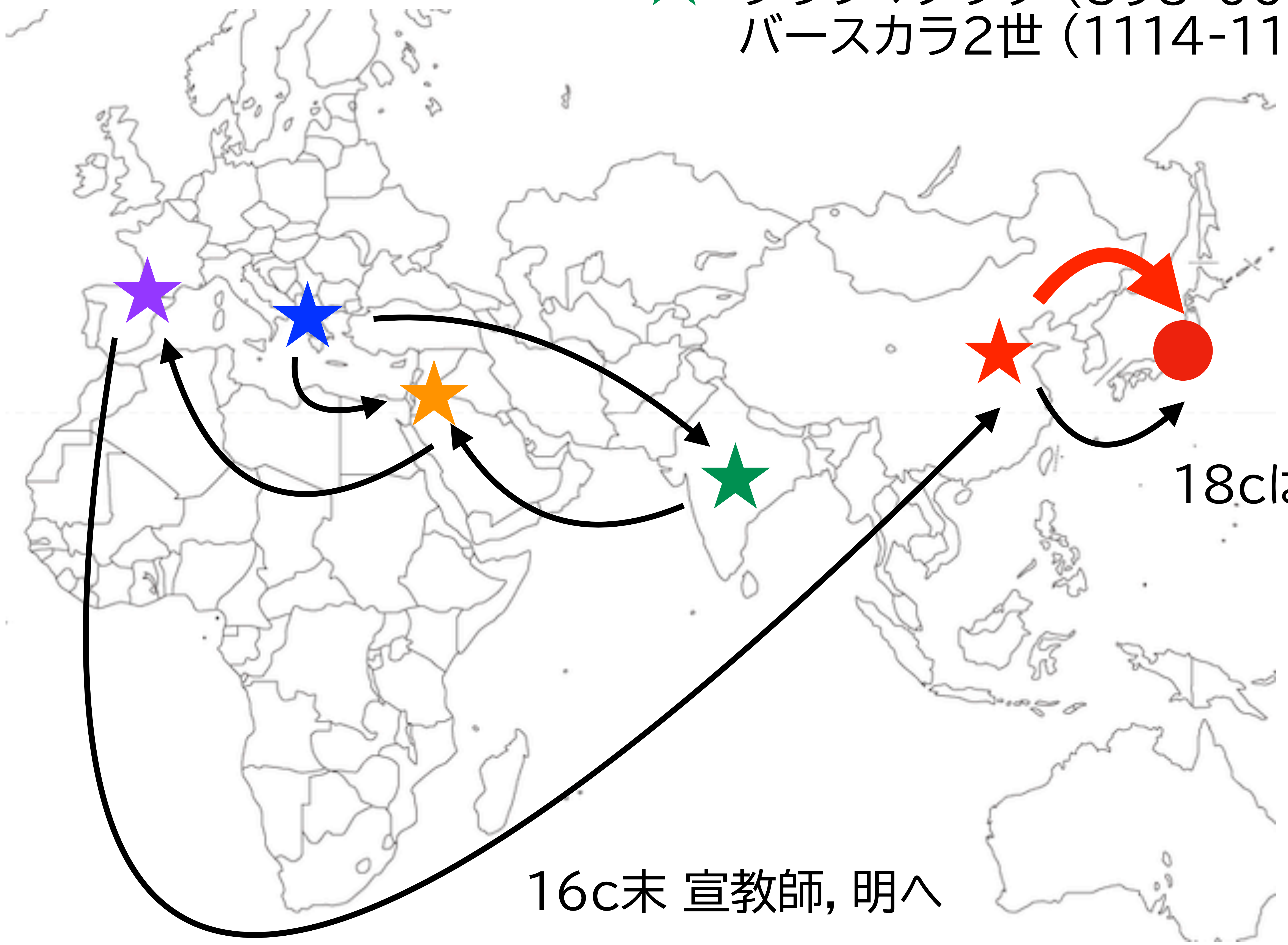


# 16c末 イエズス会宣教師　明へ　ヨーロッパ科学を伝える

ヒッパルコス(BC190頃-BC120頃)
プトレマイオス(83頃-168頃)『アルマゲスト』(2c)

ヴァラーハミヒラ (505-587)
ブラフマグプタ (598-665)
バースカラ2世 (1114-1185)

ハバシュ ( ? -864頃)
アル＝フワーリズミー (780-850)
アル・バッターニー (853-929)
アブル・ワファー (940-998)
アル＝ビールーニー (973--1048)
トゥースィー (1201-1274)




18cはじめ 中国書, 日本へ

レギオモンタヌス (1436-1476)
レティクス (1514-1574)
ピティスクス (1561-1613)

アダム・シャール
徐光啓『崇禎暦書』(1634)
梅文鼎『暦算全書』(1723)

中根元圭『八線表算法解義』(1727頃)
建部賢弘『算暦雑考』(1722?)

# 数学文化交流史から俯瞰する日本の位置