

継子立てとヨセフスの問題

真貝寿明 (大阪工業大学 情報科学部)¹

Mamako-date problem and Josephus problem

Hisaaki Shinkai (Osaka Institute of Technology)

概要

The ‘継子立て’ (mamako-date, ‘stepchild standing’), which became famous through *Jinkoki* (『塵劫記』), is a mathematical game in which people arranged in a circle are removed every tenth count, and the last person remaining wins. When two groups (the children of the first wife and the children of the second wife) are arranged in a particular order, only one group is eliminated first — but the story carries a dramatic twist: the last remaining member of the group being eliminated proposes a change, and the outcome is reversed.

The generalized problem of under what settings such a reversal can occur was discussed in Seki Takakazu’s *Rule of Sandatsu* (1683), where it was derived by a recursive method.

The western ‘Josephus problem’, often compared with the mamako-date, shares the same setting but asks a simpler question — namely, at which position the last remaining person will be — with no reversal in the storyline. It was L. Euler who elevated this problem to a mathematical one, in 1776, describing it in terms of a distinctive numerical sequence. I report here my finding that Euler’s recursive method is exactly identical to that of *the rule of Sandatsu*. This means that Japanese mathematics had already treated and solved the problem more than 80 years earlier. As far as I have been able to determine, no trace of historical exchange between the two problems has been found.

『塵劫記』を通じて有名になった「継子立て」は、円形にならべた人を 10 人ごとに外し、最後に残る人を勝ちとする算数遊戯である。2つのグループ（先妻の子と、後妻の子）を特別な順にならべると、1つのグループだけが先にすべて取り除かれていくが、取り除かれていくグループの最後の一人の提案で、勝敗が逆転するというストーリー性を持っている。このような逆転劇がどのような設定で生じるか、という一般化された問題は、関孝和編『算脱之法』(1683 年)にて論じられ、再帰的方法で導かれている。

一方、継子立てとよく比較される西洋の Josephus (ヨセフス) の問題は、同じ設定でありながら、最後に残される人はどこの位置か、というシンプルな問いかけであり、逆転するような展開はない。オイラーによって、ヨセフス問題が数学問題に格上げされたのは 1776 年のことで、その特異な数列として、算脱之法と、まったく同じ再帰的方法が述べられていたことを発見したので報告する。和算の方が 80 年以上早く、問題を扱って解決していたことになる。2つの問題の間には、管見の限り、歴史的交流の跡は見つからない。

1 継子立て

1.1 問題設定

吉田光由 (1598-1673) によって今から 400 年前に出版された『塵劫記』は、初版では珠算の方法をはじめとする実用的な問題集として書かれていたが、版を重ねながら、算数遊戯の要素も含むようになり、広く人々に親しまれた。その中でも有名な一問に、「継子立て」と言われる問題がある²。問題設定は、次のようである。

先妻の子 15 人と、後妻の子 15 人を残して主人が亡くなった。誰か一人に財産を継がせることになったが、後妻は実子を選びたい。そこで、30 人がある順に円形に並べ、10 人ごとに取り除くことにした。はじめてみると、先妻の子（継子）だけが次々と取り除かれていく。15 人目の継子が「これは意図的であまりにひどい。今から自分から数え直して欲しい」と嘆願する。後妻は同意し、その子から数え始めると 15 人の実子がすべて取り除かれ、15 人目の継子が最後に残った。どのような順に並べたか（どこから数えたか）。³

問題設定としては、他のバージョンもある。⁴

¹hisaaki.shinkai@oit.ac.jp

²林 [1] に、『塵劫記』各版での継子立の変遷が示されている。それによれば、吉田光由の初版 (寛永 4 年版, 1627) にはなく、寛永 8 年以前に出版された刊行年不詳版が初出とのこと。

³『塵劫記』では、何が問題とされるのか明確ではない。はじめから絵が添えられ、答えが描かれている。

⁴林 [1] によれば、『塵劫記』の寛永 11 年版で、図中に逆向きを示す仕掛けを取り入れたが、本文では触れられていないという。

最後に残された継子が、こんどは自分から逆回りに数え直して欲しい、と嘆願した。後妻は同意し、その子から数え始めると、継子が最後に残った。

これはユニークに解が定まるパズルである。白黒の碁石やオセロの駒を並べて多くの人が試してみたはずである。継子 1 人と実子 15 人を円形に並べて 10 人ごとに取り除くとき、数え始めた人が最後に残る、と考えれば、2 つのバージョンは、結局のところ同じである。

並べ方は、実子を白丸○、継子を黒丸●として、

○○●○○○●●●●●○○●●○○○○●○●●●○●●○○●

となる。同色をまとめて数を順に表すと $\{2, 1, 3, 5, 2, 2, 4, 1, 1, 3, 1, 2, 2, 1\}$ となる。この数字順は、12 世紀の文献にも見られ [1, 2]、日本では古くから知られていた遊戯のようである。ただし、逆転劇の要素を導入したのは、吉田光由とされている。

このような問題設定は、どのような数の組み合わせでも可能である。最も簡単に考えるなら、数え始めから取り除かれる順番を先に考え、それに実子と継子を当てはめれば良い。総人数を n 、取り除くのが m 人おき、として、 i 番目の人が取り除かれる順 $E_i^{(n,m)}$ を考えよう。 $n = 30, m = 10$ の継子立てでは、

$$\left\{ E_i^{(30,10)} \right\} = \left\{ \begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 21 & 16 & 6 & 20 & 22 & 19 & 11 & 13 & 9 & 1 & 4 & 25 & 23 & 15 & 7 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \\ 18 & 29 & 27 & 24 & 2 & 17 & 5 & 12 & 10 & 28 & 14 & 8 & 30 & 26 & 3 \end{array} \right\} \quad (1)$$

となる。 $E_i^{(30,10)}$ の各要素で 15 以下を継子、16 以上を実子としたのが、先の列である。

後に登場するので、ここで導入しておくが、(1) 式の逆置換 (inverse permutation) を $\tilde{E}_i^{(30,10)}$ とする。どの位置の人から取り除いていくのかを示すものになる。具体的には

$$\left\{ \tilde{E}_i^{(30,10)} \right\} = \left\{ \begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 10 & 20 & 30 & 11 & 22 & 2 & 15 & 27 & 9 & 24 & 7 & 23 & 8 & 26 & 14 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \\ 2 & 21 & 16 & 6 & 4 & 1 & 5 & 13 & 19 & 12 & 29 & 18 & 25 & 17 & 28 \end{array} \right\} \quad (2)$$

となる。

2 継子立ての一般化：関孝和編『算脱之法』

2.1 正限数

継子立ての計算を一般化した関孝和編『算脱之法 俗に之を継子立と曰う』という数丁の書が 1683 年に出されている⁵。そこでは、正限数の表 (表 1) が掲げられ、この数値の計算法から始められる。「脱数」とは何人目ごとに取り除いていくかというパラメータ (m) であり、「正限数」とは、自分から数え始めて取り除き操作をしたときに、自分が最後まで残るときの、他の人の人数である。正限数を N とすれば、全体人数 n (算脱之法では n を法とよぶ) は自分を加えて $n = N + 1$ である。『塵劫記』の継子立ては脱数を $m = 10$ とした場合であり、先妻の子の最後の一人が残された時の状況が $N = 15$ に相当する。

表 1: 「算脱之法」に記載されている正限数の表 (漢数字を算用数字に直し、列は左から並べた)。

脱数	2	3	4	5	6	7	8	9	10
正限数	1	3	1	2	1	22	1	90	1
同	3	5	4	5	2	49	4	145	15
同	7	8	8	11	7	92	9	207	21
同	15	30	11	14	13	234	19	233	70
同	31	69	15	36	73	319	29	474	226

⁵算脱之法を探り当てたのは、かたあきら 建部賢明 (建部賢弘の兄) であることが、てつじゅうさんけい 建部賢弘『綴術算経』(1722) に記載されている [3, 6]。関孝和「編」とあっても、関の弟子の結果が含まれている [7]。

『算脱』では、表 1 の数値の計算方法から説明がはじまる。『明治前日本数学史』[3] の解説、『関孝和全集』[4, 5] の解題にしたがって理解を進めると、次のようになる。

1. 最初の法（原法）を 1、実を 0（空）とする。
2. 法には 1 を加え、実には脱数を加えてその数から法を引けるだけ引いた残りを実とせよ。
3. 実が 0 となるとき、法から 1 を引いたものが正限数である。
4. これを続けて次の実が 0 になるときも、法から 1 を引いたものが正限数である。

この理解を次のように書き記すことにする。

1. （法とよぶ数） $n = 1, 2, 3, \dots$ を 1 行目に、脱数 m を 2 行目の各列に記せ。
2. （実とよぶ数 +1） $J_m(n)$ とする数を 3 行目のはじめに、 $J_m(n = 1) = 1$ と記入せよ。
3. $n \geq 2$ の $J_m(n)$ は、 $J_m(n) = \text{mod}(J_m(n-1) + m, n)$ である。この値がゼロのときは、 $J_m(n) = n$ とせよ。
4. $J_m(n) = 1$ となるときの n より、 $N = n - 1$ とすればそれが正限数である。

例えば、 $m = 3$ のときは、次の表 2 になり、正限数は、 $N = 3, 5, 8, \dots$ ということになる。

表 2: 脱数 $m = 3$ のときの計算. $n > 2$ で $J_m(n) = 1$ となるのは、 $n = 4, 6, 9, \dots$ であることがわかる。

法	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
脱数	m	3	3	3	3	3	3	3	3	3
実 +1	$J_m(n)$	1	2	2	1	4	1	4	7	1

2.2 正限数の導出

関の書では、上記以上の説明はない。 $J_m(n)$ は、 n 人いるときの m 脱で、何番目の人が最後まで残るかを示している。 $J_m(n) = 1$ なら、数え始めの人が残る。なぜ上記の計算法で $J_m(n)$ が求められるのかの説明を試みよう。 $m = 3$ とする。

- $n = 1$ のとき、 $J_3(1) = 1$ は明らかである。
- $n = 2$ のとき、人の並びを円状に名前をつけて、 $a, b, a, b, \dots$ とすれば、 $m = 3$ 人目を取り除くと、 $a, b, \cancel{a}, b, \dots$ となり、2 番目の b が残る。したがって、 $J_3(2) = 2$ となる。
- $n = 3$ のとき、同様に、 $a, b, c, a, b, c, \dots$ とすれば、3 人目を取り除くと、 $a, b, \cancel{c}, a, b, \cancel{c}, \dots$ となり、残りは、 a, b の順で二人。二人の場合、 $J_3(2) = 2$ であるから、2 番目の b が残る。したがって、 $J_3(3) = 2$ となる。
- $n = 4$ のとき、同様に、 $a, b, c, d, a, b, c, d, \dots$ とすれば、3 人目を取り除くと、 $a, b, \cancel{c}, d, a, b, \cancel{c}, d, \dots$ となり、残りは d, a, b の順で三人。三人の場合、 $J_3(3) = 2$ であるから、2 番目の a が残る。 a は 1 番目の人なので、 $J_3(4) = 1$ となる。

このようにして、残された列の何番目が最後まで残るか、と再帰的な形式で考えることができる。

2.3 再帰的方法を使わない $J_m(n)$ の導出

n 人が円形に並べられていて、 m 人ごとに取り除くとき、それぞれの人がどの順で取り除かれるかを考えることで、漸化式を用いずに J_n を求めることができる。 $n = 6$ として $\{a, b, c, d, e, f\}$ としよう。 $m = 3$ の場合を考えよう。

- 3 人目を取り除くと、 $\{a, b, c, d, e, f\}$ となる。 c は 1 番目に取り除かれたので、 $c = 1$ とする。
- 残りの順 $\{d, e, f, a, b\}$ から 3 人目を取り除くと、 $\{d, e, f, a, b\}$ となる。 $f = 2$ とする。
- 残りの順 $\{a, b, d, e\}$ から 3 人目を取り除くと、 $\{a, b, d, e\}$ となる。 $d = 3$ とする。
- このような操作を続けると、

a	b	c	d	e	f
6	4	1	3	5	2

 と対応する。この 2 行目が $E_i^{(6,3)}$ である。
- 得られた順を入れ替える (inverse permutation) と、 $E_i^{(6,3)} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ に対応して $\tilde{E}_i^{(6,3)} = \{c, f, d, b, e, a\}$ となるので、最後に残されるのは a 。したがって、 $J_6 = 1$ となる。

Mathematica プログラム例が [10] にある。

2.4 なぜ 10 脱か、なぜ $15 + 15$ 人か

算脱之法による正限数によって、逆転劇が生じる継子立ての場合が網羅される。例えば、 $5 + 5$ 人であれば、表中の 5 が含まれる 3 脱あるい 5 脱で逆転できる。ちなみにこの時の並べ方は、3 脱なら、

$$E_i^{(10,3)} = \{6, 4, 1, 10, 8, 2, 5, 7, 3, 9\} \text{ より } \bigcirc \bullet \bullet \bigcirc \bigcirc \bullet \bullet \bigcirc \bigcirc \bullet \{1, 2, 2, 2, 1, 1, 1\}$$

5 脱なら

$$E_i^{(10,5)} = \{7, 4, 10, 8, 1, 3, 9, 6, 5, 2\} \text{ より } \bigcirc \bullet \bigcirc \bigcirc \bullet \bullet \bigcirc \bigcirc \bullet \bullet \{1, 1, 2, 2, 2, 2\}$$

である。

人数が同じでなくても可能である。 $4 + 5$ 人であれば、3 脱なら

$$E_i^{(9,3)} = \{9, 7, 1, 4, 6, 2, 8, 5, 3\} \text{ より } \bigcirc \bigcirc \bullet \bullet \bigcirc \bullet \bigcirc \bigcirc \bullet \{2, 2, 1, 1, 2, 1\}$$

$5 + 4$ 人であれば、4 脱として

$$E_i^{(9,4)} = \{9, 8, 3, 1, 6, 5, 7, 2, 4\} \text{ より } \bigcirc \bigcirc \bullet \bullet \bigcirc \bullet \bigcirc \bullet \bullet \{2, 2, 1, 1, 1, 2\}$$

などで可能である。

いろいろな組み合わせがあるなかで、(算脱之法以外の) 日本の文献で見られるのは $m = 10$ (10 脱) に限られる。植野 [9] は、これを日本の文化としているが、適度に数える手間があり、キリのよい数であることが理由であろう。半数ずつに分けて、最後の一人逆転劇を起こすためには、 $15 + 15$ 人の設定が最小人数となる。

逆転劇を引き起こすためのキリのよい設定は、「 $15 + 15$ 人の 10 脱」以外には「 $3 + 3$ 人の 3 脱」「 $4 + 4$ 人の 4 脱」「 $5 + 5$ 人の 5 脱」がある。少子化の現代ではこちらのほうが説得力があるかもしれない。ちなみに「 $3 + 3$ 人の 3 脱」は

$$E_i^{(6,3)} = \{6, 4, 1, 3, 5, 2\} \text{ より } \bigcirc \bigcirc \bullet \bullet \bigcirc \bullet \{2, 2, 1, 1\}$$

「 $4 + 4$ 人の 4 脱」は

$$E_i^{(8,4)} = \{5, 4, 6, 1, 3, 8, 7, 2\} \text{ より } \bigcirc \bullet \bigcirc \bullet \bullet \bigcirc \bigcirc \bullet \{1, 1, 1, 2, 2, 1\}$$

である。

3 ヨセフスの問題

ヨセフスの問題

継子立てと似た数学遊戯は、西洋ではヨセフスの問題 [9, 10, 11] として知られている。しかし、設定は継子立てよりも単純で、「 n 人を円形に並べて m 人ごとに取り除いていく」設定をヨセフスの問題と呼んでいる。

このヨセフスは、歴史家としても知られる Flavius Josephus である。本人を第三者の視点で記載した『ユダヤ戦記』第3巻8章7[12]が原典とされている。紀元後67年、ローマ帝国に攻められたユダヤ人のヨッドファットの戦い (Siege of Yodfat) の場面である。将軍ヨセフスと仲間40名は洞窟に逃げ込み、自滅することになった。ユダヤ教では自害は禁じられているので、仲間同士で殺し合うことになる。しかし、生き延びたいヨセフスは腹案をもちながら、次のような提案をする。

... しかし、窮地に陥っても、彼（ヨセフス）の力は彼を見捨てなかった。神の加護を信頼し、彼は命を危険にさらし、こう言った。「死ぬ覚悟ができたのなら、さあ、くじに命の順番を決めさせよう。最初にくじを引いた者は、次にくじを引いた者に殺されるのだ。そうすれば、運命は全員に行き渡り、自らの手で命を絶つことはなくなるだろう。残りの者がいなくなった後、誰かが後悔して逃げおおせるのは不公平だ。」この提案は人々に信頼をもたらした。彼の助言は受け入れられ、彼は残りの者とくじを引いた。こうして選ばれた者は皆、自分の将軍がすぐに自分の運命を共にするであろうという確信のもと、隣の者に自分の首を差し出した。ヨセフスと共に死ぬという考えは、彼らにとって生きることよりも甘美だった。しかし、彼は（幸運と言うべきか、神の摂理と言うべきか?）、ただ一人残された。運命に縛られることも、最後まで同胞の血で手を汚すこともしたくなかった彼は、この男にも誓約を交わして生き残るよう説得した。(翻訳筆者)

ヨセフス自身が生き延びた、という話だが、「くじ (lot)」とだけ書かれていて、具体的なルールはない。これが後世になると、次のように語られることになる。

ローマ時代の内乱期、ユダヤ人の反乱グループ41人は洞窟に閉じ込められ、敗北が明らかになったので自害することにした。当時の慣習により、全員が円形に並び、3人ごとに処刑することになった。ヨセフスは、どこに立てば最後になるかを素早く計算した。

「41人を円形に並べて3人ごとに取り除いていく。最後の一人になるのはどこの位置か」という問題である。このようなパズル問題をヨセフスと結びつけたプロセスは不明であるが、スミス [13] は、作者は4世紀のミラノ司教ではないか、と述べている。

ヨセフスの問題は、以前は「トルコ人とキリスト教徒の問題」あるいは「ユダヤ人とキリスト教徒の問題」と呼ばれたと三上 [14] は記している。三浦 [15] は、ヨセフス問題を論じた数学者の例とバリエーションをさまざまに紹介している。

入手できた文献で、Claude-Gasper Bachet (1581-1638) による『Problemes plaisants et d'electables qui se font par les nombres. 2nd ed.』(1624) [18] にあるもの (p174 PROBLEME XXIII) を紹介する。

15人のキリスト教徒と15人のトルコ人が同じ船で航海していた。激しい嵐に遭遇したため、水先案内人は船に乗っていた人々の半分を海に投げ込み、残りの人々を救う必要があると言った。これは力づくでしかできない。そこで、全員を順番に配置し、9ずつ数えて9人目を海に投げ込むことで合意した。30人のうち15人だけが残るようにする。キリスト教徒を一人も失うことなくトルコ人を全員投げ込むにはどのように並べるべきか。(Google 翻訳)

15 + 15 人の9脱であり、取り除かれる順は、

$$E_i^{(30,9)} = \{23, 20, 28, 24, 14, 4, 7, 12, 1, 19, 16, 10, 26, 27, 25, 5, 18, 2, 8, 29, 30, 13, 15, 11, 22, 6, 3, 21, 17, 9\}$$

となるから、キリスト教徒を○、トルコ人を●とすれば、

○○○○●●●●○○●○○○●●●○○●●●○○●●○○●

となり、並べ順は {4, 5, 2, 1, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 1} となる⁶。

⁶ この順には記憶法がある。平山 [19] では英語版が紹介されている。母音 a, e, i, o, u をそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5 と対応させて, “From numbers’ aid and art, never will fame depart” (数の助けと技術によって名誉は去らない)。三浦 [15] は、原典は Pacioli にあることを紹介している。

4 ヨセフス問題の一般化：オイラー『特異な数列』

オイラー (Leonhard Euler, 1707-83) は、『Observationes circa novum et singulare progressionum genus⁷』(1776)[17] にて、「トルコ人とキリスト教徒の問題」の設定を冒頭に挙げて、ここに登場する再帰的法則を論じている。本稿の付録 A に、原文（ラテン語）全文に対する英訳と日本語訳を展開した。

オイラーは、取り除く人を $m = 2, 3, 4, 5$ 人目ごととする場合について、全体人数 $n = 1, \dots, 16$ の場合に、取り除かれる順 $\tilde{E}_i^{(n,m)}$ ($i = 1, \dots, n$; 式 (2) で導入したものと同一) を具体的に列挙し、その数列のしくみの解明を試みた。最後に残る人 (survivor) を $J_m(n)$ とする (この notation では、現在使われているものである。例えば [16])。 $J_m(n) = \tilde{E}_n^{(n,m)}$ である。数え始めの人が最後に残る場合 (継子立ての逆転劇のケース) は、 $J_m(n) = 1$ となる場合である。一方で、 $J_m(n) = n$ となる場合の n は J_m の fixed point と呼ばれている。

オイラーは、数列 $\tilde{E}_i^{(n,m)}$ の各項を陽に求めることは難しいものの、 $J_m(n)$ が $J_m(n-1)$ を用いて求められることを帰納的に示した。例えば、 $\tilde{E}_i^{(n,m)}$ を $m = 2, 3, 4$ のときについて列挙すると、表 3 のようになる。

この表の各行の最後の数字が $J_m(n) = \tilde{E}_n^{(n,m)}$ である。例えば、 $m = 3$ のときの各行の最後の数字は、表 2 で列挙した関孝和の $J_3(n)$ である。

表 3: 総人数 n 人のときに、 $m = 2, 3, 4$ 人ごとの取り除きを行うときに、取り除かれる人の順番 $\tilde{E}_i^{(n,m)}$ 。

n	$\tilde{E}_i^{(n,2)}$	n	$\tilde{E}_i^{(n,3)}$	n	$\tilde{E}_i^{(n,4)}$
1	1	1	1	1	1
2	2, 1	2	1, 2	2	2, 1
3	2, 1, 3	3	3, 1, 2	3	1, 3, 2
4	2, 4, 3, 1	4	3, 2, 4, 1	4	4, 1, 3, 2
5	2, 4, 1, 5, 3	5	3, 1, 5, 2, 4	5	4, 3, 5, 2, 1
6	2, 4, 6, 3, 1, 5	6	3, 6, 4, 2, 5, 1	6	4, 2, 1, 3, 6, 5
7	2, 4, 6, 1, 3, 5, 7	7	3, 6, 2, 7, 5, 1, 4	7	4, 1, 6, 5, 7, 3, 2
8	2, 4, 6, 8, 3, 7, 5, 1	8	3, 6, 1, 5, 2, 8, 4, 7	8	4, 8, 5, 2, 1, 3, 7, 6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$J_m(n)$ の求め方として、オイラーは、次のように考えた。

- (1) $n+1$ 人に対して m 人ごとの取り除きをすることを考える。まず、一人目を取り除いたとする。 $m < n+1$ であれば、

$$i = \{1, 2, 3, \dots, m-1, \cancel{m}, m+1, \dots, n+1\}$$

の取り除きが行われる。

- (2) $i = 1, \dots, m-1$ を取り除き、順の最後に移行する。その際に連番となるように $n+1$ を加算して再度番号づけをする。すなわち

$$i = \{m+1, \dots, n+1, n+2, n+3, \dots, n+m\}$$

これは、 n 人に対して m 人ごとの取り除きをする問題

$$i = \{1, \dots, n\}$$

と同じになる。

これより、オイラーが導いた式は次のものである。

$m \geq 2$ として、 $J_m(n) = p$ とする。非負の整数 ℓ を用いて、 $p+m \in \{\ell(n+1)+1, \dots, (\ell+1)(n+1)\}$ ならば、

$$J_m(n+1) = p + m - \ell(n+1)$$

⁷タイトル英訳は Observations on a New and Singular Type of Progression, 和訳は『新しく発見された特異な数列』。ここでの特異とは、簡単には予測できない、という意味。

とくに、 $m \leq n+1$ であれば、次のように簡略化される。

$$J_m(n+1) = \begin{cases} p+m, & \text{if } p+m \leq n+1 \\ p+m-(n+1), & \text{if } p+m > n+1 \end{cases} \quad (3)$$

オイラーの主張は、取り除く順 $\tilde{E}_i^{(n,m)}$ をすべて知らなくても、最後に残る人 $J_m(n)$ は、 n の漸化式として求められる、ということである。また、同様の考えによって、最後から2番目に取り除かれる場所、最後から3番目に取り除かれる場所も再帰的に与えられることを述べている。

式(3)は、算脱之法で述べられた方法に他ならない。関らが得ていた関係式は、オイラーよりも83年はやく発見されていたことがわかる。

5 起源・関連は不明

継子立ての問題とヨセフスの問題には共通点もあるが、逆転劇がある点では継子立ての方が複雑である。逆転劇の部分は、吉田光由の作であったとしても、両者の間に共通の起源が存在するのだろうか。本稿で紹介してきたことをまとめると、次のようになる。

- ヨセフス問題に「ヨセフス」がリンクされたのは4世紀頃とされる。このときは、41人の3脱問題だった。12世紀に入ると、15+15人の9脱問題として設定され、それが14世紀になると、宗教間の問題のようになった。
- 継子立てでは12世紀『簾中抄』に記載がみられ、この時から15人+15人の10脱問題である。
- 継子立ての一般化は、関らによって1683年になされた。ヨセフス問題の一般化はオイラーによって1776年になされた。両者は、最後に残る人がどこか($J_m(n)$)を同じ漸化式の形で得ていた。

日本と西洋(西アジア)で、ほぼ同時期に「15+15人」設定が記載されはじめたのは不思議である。中国での同種の問題設定が発見されていれば、シルクロード陸路を通じての文化交流の証左になるかと考えられるが(元がシルクロードを封鎖するのは13世紀後半)、残念ながらニードム[20]によれば、「われわれはまだこの継子立ての中国数学書にある例を知らない」。(もっともニードムが引用しているのは、スミス[13]とスミス・三上[21]の1920年代までの文献である)。

徒然草にあるように、この種のパズルは囲碁や双六などの遊戯盤を用いたとも考えられる。囲碁の起源は不明とされるが、中国では囲碁盤が3世紀の出土品から見られ、4世紀には朝鮮で、8世紀には日本の正倉院に納められている。増川[22]は、正倉院の収蔵品の双六盤の模様や形式が、中国系のものとインドネシア系のものと2種類見られることから、当時すでに、シルクロードの陸路と海路が日本に到達していたとしている。将棋(象棋・チェス)は6世紀にインド北西部で生まれた説があるが、中国・日本には12世紀に伝えられた。このような遊戯の伝播はユーラシア大陸で確実にあったことから、継子立て問題とヨセフス問題に同じ起源を求める気持ちは捨てがたいが、現状では期待にすぎない。

時代を下って、関らの一般化が欧州に伝えられた可能性があったかどうか、あるいはもっと広く、関の数学業績が西洋に影響を与えたかどうかは現時点では不明である。スミス・三上(1914)[21]は、Petrus Hartsingiusという日本人がオランダLeyden大学の学生簿(1654年)に数学を専攻する学生として登録されていることから、そのような可能性について触れている。最近では、この人物がペーター・ハルツィンク(1637-1680)であり、オランダ東インド会社の平戸館にいたドイツ人カール・ハルツィンクと平戸の豪商の娘との間に生まれた日本人で、1641年に鎖国政策により出国せざるをえなくなり、オランダへ渡った人物であることがわかっている[23]。4歳で日本を離れているので、関の数学を伝えるにはまだ若すぎたと言えるだろう。

数学遊戯は、研究書レベルの数学よりも、広く人々を通じた伝播がありえると考えられる。今後は、今回報告した継子立てとヨセフス問題の他にも事例を探求し、文化交流の視点から数学史を俯瞰していきたいと考えている。

謝辞 本研究遂行には、科研費・挑戦的研究（開拓）課題番号：24K21170「天文文化学の新展開：数理的手法の導入で文化史と科学論から自然観を捉える研究の加速」の支援を受けた。

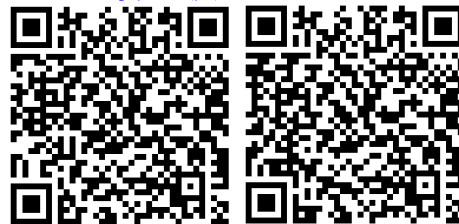
参考文献

- [1] 林隆夫「『塵劫記』以前の継子立」数学史研究 173/174 合併号, 1-28, 2002.
- [2] 小高吉三郎『日本の遊戯』（羽田書店, 1943）[復刻版, 拓石堂書店, 1977].
- [3] 日本学士院編（藤原松三郎）『明治前日本数学史 第2巻』（岩波書店, 1956）.
- [4] 平山諦, 下平和夫, 広瀬秀雄（編著）『関孝和全集』（大阪教育図書株式会社, 1974）.
- [5] 上野健爾, 小川 束, 小林龍彦, 佐藤賢一（編）『関孝和全集』（岩波書店, 2023）.
- [6] 小川束「『綴術算経』の「探算脱術第七」について」数理解析研究所講究録 1257 (2002) 205-209.
- [7] 長田直樹「元禄の中頃に成立した『算法大成』について」数理解析研究所講究録別冊 B89 (2022) 49-76.
- [8] 日本学士院編（藤原松三郎）『明治前日本数学史 第1巻』（岩波書店, 1956）.
- [9] 植野義明「継子立てにおける数理と文化」東京工芸大学工学部紀要 23 (1), 83-92, 2000.
- [10] S. スキエナ著, 植野義明訳『Mathematica 組み合わせ論とグラフ理論』（アジソン ウェスレイ・トッパン, 1992）. 原著は, Steven Skiena, *Implementing Discrete Mathematics – Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*, Addison-Wesley, 1990.
- [11] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming. Vol. I, Vol. III*, Addison-Wesley, 1968, 1973.
- [12] Josephus, *The Jewish War*. 筆者が入手できたのは, H. St. J. Thackeray による 英訳 (William Heinemann Ltd, 1927). Book III の巻にあることは, 英語版 wikipedia の Josephus problem にある.
- [13] D. E. Smith, *History of Mathematics Vol. 2* (1925, Ginn And Company).
- [14] 三上義夫『文化史上より見たる日本の数学』（岩波書店, 1999）.
- [15] 三浦伸夫『近代数学の創造と発酵 中世・ルネサンス・17世紀』（現代数学社, 2023）.
- [16] Y. Bello-Cruz, R. Quintero-Contreras, *Analytical Study and Efficient Evaluation of the Josephus Function*, arXiv:2303.15457
- [17] L. Euler, *Observationes circa novum et singulare progressionum genus*, Euler Archive – All Works. 476, 1776.
- [18] C. G. Bachet, *Problemes plaisants et d'electables qui se font par les nombres*, 2nd ed. Lyon: Pierre Rigaud & Associates, 1624.
- [19] 平山諦『東西数学物語』（恒星者厚生閣, 1973）.
- [20] J. Needham & W. Ling, *Science and Civilisation in China*, (Cambridge Univ. Press, 1959). ニーダム著 芝原茂ほか訳『中国の科学と文明 第4巻 数学』（思索社, 1991）.
- [21] D. E. Smith & Y. Mikami, *A History of Japanese Mathematics*, (Open Court Publ. Com., Chicago, 1914).
- [22] 増川宏一『盤上遊戯の世界史』（平凡社, 2010）.
- [23] 三浦伸夫『数学の歴史』（放送大学テキスト, 2011）.

発表スライド pdf, このプリントの pdf はこちら

[Presentation Viewgraph file \(pdf\)](#)

[This article \(pdf\)](#)



Appendix A: L. Euler『新奇にして特異な数列の一種について』(1776)

オイラーが、ヨセフス問題について考察した, L. Euler, *Observationes circa novum et singulare progressionum genus* (E476, 1776), Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Vol. 20 (1775), 1776, pp. 123-139. の, 原文 (ラテン語)・英語・日本語の対訳比較表を作成した. ラテン語から英語の翻訳は, AI Claudeが行った.

原文では §10 の次が §12 になっており (§11 が欠落), また p.137 の見出しが「17」, p.138 の見出しが「16」となっていて数字の前後が入れ替わっている (原書の誤植と思われる). これらは原文どおりに転記した.

Latin (original)	English translation	日本語訳
	Title / Header	
OBSERVATIONES CIRCA NOVUM ET SINGVLARE PROGRESSIONVM GENVS	Observations on a New and Singular Kind of Progression	新奇にして特異な数列の一種についての観察
Auctore L. EVLERO.	By L. Euler	著者 L. オイラー
(Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Vol. 20 (1775), 1776, pp. 123-139. Eneström E476.)	(Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Vol. 20 (1775), 1776, pp. 123-139. Eneström E476. English translation of the Latin original.)	(『ペテルブルク帝国科学アカデミー新紀要』第 20 巻 (1775 年), 1776 年刊, pp. 123-139. エネストレム番号 E476. ラテン語原文からの日本語訳.)
p. 123		
1. Inter res saepenumero, quae attentione nostra haud dignae videantur, observantur quaedam, quae satis profundam investigationem requirunt, ac non parum sublimibus speculationibus occasionem praebent. Quod cum plurimis exemplis confirmari possit, tum nuper etiam ipse sum expertus, dum quaestionem illam tyronibus notissimam, attentius contemplarer, qua quindecim Christiani totidemque Iudaei ita ordine sunt collocandi, ut si, numerandi initio in dato loco sumto, nonus quisque vel decimus in mare sit eiciendus, haec poena in solos Iudaeos sit casura. Quae quaestio etiamsi in se nihil habeat difficultatis, tamen mox vidi, si in genere de hominum numero quocunque, ex quibus non nonus sed secundum alium quemvis numerum quotusquisque sit eiciendus, proponatur, difficillimum fore, ordinem eorum, qui continuo eicientur, assignare. Neque adeo methodus constat hoc in ge-	1. Among the things which, though they often seem unworthy of our attention, are nevertheless observed to require rather profound investigation and to offer no small occasion for lofty speculation — that this can be confirmed by very many examples I myself have lately experienced, when I looked more closely at that question, well known to beginners, in which fifteen Christians and as many Jews are to be arranged in a circle in such an order that, if the counting begins at a given place, every ninth (or every tenth) person is to be thrown into the sea, this penalty falling only upon the Jews. Although this question in itself presents no difficulty, I soon saw that if, in general, for any number of people whatsoever, it is proposed that not every ninth but every some-other given number be removed in turn, it would be extremely difficult to assign the order of those who are successively removed. Nor indeed is any method available in this	1. 私たちの注意を引くに値しないと思われがちな事柄の中にも, かなり深い考察を要し, かつ高尚な思索の機会を少なからず与えてくれるものが見出されることがある. このことは実に多くの例によって裏付けられるが, 私自身も最近, 初学者によく知られたあの問題 — すなわち, 15 人のキリスト教徒と同数のユダヤ教徒を円形に並べ, ある場所から数え始めて 9 番目 (あるいは 10 番目) ごとに海に投げ込むとき, この罰が必ずユダヤ教徒だけに当たるように配置する, という問題 — を注意深く検討していたときに, これを痛感した. この問題自体には何ら難しいところはないのだが, 私はすぐに気づいた. もし一般に, 任意の人数について, 9 番目ごとではなく他の任意に定めた数ごとに順次除いていくとするならば, 順次除かれていく者たちの順序を求めることは極めて困難であろう, と. しかもこの種の
p. 124		
nere praestandi, tametsi quovis casu oblato, dum numeratio actu instituitur, solutio facillime obtinetur. Ex hoc genere haud parum curiosa mihi videtur quaestio, si v. gr. ex plurium hominum numero is solus sit supplicio afficiendus, qui, postquam nonus quisque vel secundum alium numerum ex ordine fuerit exentus, tandem ultimo solus sit remansurus; hic scilicet maxime intererit, ante nosse illum fatalem locum, in quo numeratio illa ultimo terminabitur.	kind of task, even though for any given case, once the counting is actually carried out, the solution is obtained quite easily. Of this kind a question that seems to me not a little curious is this: if, out of a number of several people, only that one is to be subjected to punishment who, after every ninth (or according to some other chosen number) has in turn been removed, at last alone remains; it would clearly be of the greatest interest to know beforehand that fatal place at which the counting will finally terminate.	作業を行うための方法は確立されていない. もっとも, どのような場合が与えられても, 実際に数え上げの操作を行いさえすれば, 答えはごく容易に得られるのであるが. この種のもので私にとってなかなか興味深く思われる問題は次のようなものである. すなわち, 大勢の人数の中から, 9 番目ごと (あるいは他の適当に選んだ数ごと) に順次除かれていった後, 最後にただ一人だけが残ってその者だけが処罰を受けるとするとき, 数え上げが最終的にどの宿命の場所で終わるかをあらかじめ知ることができれば, 当然きわめて興味深いことであろう.
2. Quo omnia quae hic investiganda occurrunt, clarius perspiciantur, casum illum perpendamus, quo ex serie 30 notarum nona quaeque expungitur, quod negotium numeratione actu instituta ita commodissime repraesentatur:	2. In order that everything to be investigated here may be perceived more clearly, let us consider that case in which, out of a series of 30 marks, every ninth is struck out in turn — a business which is most conveniently represented by actually carrying out the counting:	2. ここで探究すべきことすべてをより明瞭に見てとるために, 30 個の印からなる列において 9 番目ごとに消していく場合を考えてみよう. この作業は, 実際に数え上げを行うことによって, 次のように最も便利に表すことができる.
123456789101112131415161718192021222324252627282930 232028241447121191610262725518282930131511226321179	123456789101112131415161718192021222324252627282930 232028241447121191610262725518282930131511226321179	123456789101112131415161718192021222324252627282930 232028241447121191610262725518282930131511226321179
Hic superiores numeri indicant, quoto loco a primo computando quaeque nota sit posita, inferiores vero numeri ostendunt, quando quaeque eiciatur, dum scilicet continuo nona quaeque expungitur: Ita patet, primo nonam, secundo decimam octavam, tertio vicesimam septimam, quarto sextam, quinto decimam sextam et ita porro expungi, donec ultimo delenda supersit sola vicesima prima, qui adeo foret locus ille fatalis ante memoratus. Si indices eiectionum ordine disponantur, indicesque notarum subscribantur, haec series prodibit.	Here the upper numbers indicate at which place, counting from the first, each mark is set; the lower numbers show when each is removed, given that every ninth is continually struck out. Thus it is clear that the ninth is removed first, the eighteenth second, the twenty-seventh third, the sixth fourth, the sixteenth fifth, and so on in turn, until at last, at the thirtieth removal, only the twenty-first mark remains to be struck out. If the indices of those removed are arranged in [removal] order, with the indices of the marks written beneath them, the following series results.	ここで上段の数は, 最初から数えて各印が何番目の場所に置かれているかを示し, 下段の数は, 9 番目ごとに継続して消していくとき, 各印がいつ除かれるかを示す. これより明らかなように, まず 9 番目の印が除かれ, 次に 18 番目, 3 番目に 27 番目, 4 番目に 6 番目, 5 番目に 16 番目, というように順に除かれていき, ついに 30 回目, すなわち最後に 21 番目の印だけが除かれずに残る. 除かれた者の指標を除去された順に並べ, その下に各印の指標を書き添えるならば, 次の数列が得られる.
p. 125		
Indices eiectionis	Indices of removal	除去の指標
123456789101112131415161718192021222324252627282930 918276162671930122482252311291710228251415131432021	123456789101112131415161718192021222324252627282930 918276162671930122482252311291710228251415131432021	123456789101112131415161718192021222324252627282930 918276162671930122482252311291710228251415131432021
Indices naturales.	Natural indices.	自然指標.
Hanc postremam seriem voco seriem eiectionis, quia ea indicat, quota nota eiciatur primo, secundo, tertio etc. Ita scilicet primo eicitur nota 9na, secundo 18va, tertio 27ma, quarto 6ta, quinto 16ta et ita porro, donec ultimo trigesimo nempe loco eiciatur nota vicesima prima. Vbi quidem meminisse oportet, postquam numerando in serie notarum ad finem fuerit perventum, numerationem iterum ab initio continuari; ex quo intelligitur, notam trigesimam primam convenire cum prima, et si cuiusque notae index fuerit n, eidem quoque indices $n + 30$, $n + 60$, $n + 90$ etc. convenire sunt censendi.	I call this latter series the <i>series of removal</i>, because it shows which mark is removed first, second, third, and so on. Thus the 9th mark is removed first, the 18th second, the 27th third, the 6th fourth, the 16th fifth, and so on, until at last, at the thirtieth place, the 21st mark is removed. Here it must be kept in mind that once the counting through the series of marks has reached its end, the count is continued again from the beginning; from which it follows that the 31st mark coincides with the 1st, and if the index of any mark is n, then the indices $n + 30$, $n + 60$, $n + 90$, etc. must be reckoned as coinciding with it as well.	私はこの後者の数列を「除去の数列」と呼ぶ. なぜならこれは, どの印が第 1 番目に, 第 2 番目に, 第 3 番目に……除かれるかを示すからである. すなわち, まず第 9 番目の印が除かれ, 次に第 18 番目, 第 3 に第 27 番目, 第 4 に第 6 番目, 第 5 に第 16 番目, というように順に除かれていき, 最後の第 30 番目の場所で第 21 番目の印が除かれる. ここで留意すべきは, 印の列を数え終えたら, 数え上げは再び最初から続けられるということである. これより, 第 31 番目の印は第 1 番目の印と一致し, また, ある印の指標が n であれば, 指標 $n + 30$, $n + 60$, $n + 90$ 等もそれと一致するものとみなされねばならないことがわかる.

Latin (original)	English translation	日本語訳
3. Si hanc seriem eiectionis consideremus, vix ullum ordinem in ea deprehendere licet; tres quidem primi termini 9, 18, 27 secundum differentiam 9 ascendunt; et quartus quoque 6, quia cum 36 convenit, eandem legem sequitur. Quintus autem, qui est 16 vel 46, denario praecedentem superat, quia in numerando iam unus scilicet 9 seu 39 est deletus, ideoque non numeratur. Ob eandem rationem a termino quinto 16 ad sextum 26 etiam 10, at a sexto 26 ad septimum 7 seu 37 iam 11 numerantur; sicque saltus continuo fiunt maiores, quia plures notae iam deletae transiliuntur; quod operationem actu instituendo sponte elucet, etiamsi ordi-	3. If we consider this series of removal, scarcely any order can be discerned in it; the first three terms, 9, 18, 27, indeed increase by the common difference 9, and the fourth term, 6, also follows the same rule, since it agrees with 36. The fifth term, however, which is 16 (or 46), exceeds the preceding by only 10, because in counting, one [mark], namely 9 (or 39), has already been deleted, and is therefore not counted. For the same reason, from the fifth term 16 to the sixth 26, again 10 are counted, but from the sixth 26 to the seventh 7 (or 37), already 11 are counted; and so the gaps continually become larger, because more and more already-deleted marks are skipped over — a fact which becomes obvious of itself when the operation is actually carried out, even though the order	3. この除去の数列を眺めても、そこにほとんど何の秩序も見出すことはできない。最初の 3 項 9, 18, 27 は確かに公差 9 で増加しており、第 4 項の 6 も、36 と一致することから同じ規則に従う。しかし第 5 項, すなわち 16 (あるいは 46) は、前項をわずか 10 しか上回らない。なぜなら数え上げの際にはすでに一つ, すなわち 9 (あるいは 39) が削除されているため、それが数えられないからである。同じ理由で、第 5 項 16 から第 6 項 26 までも同様に 10 が数えられるが、第 6 項 26 から第 7 項 7 (あるいは 37) までは、すでに 11 が数えられる。このようにして、飛び幅は次第に大きくなっていく。というのも、すでに削除された印がますます多く飛び越されるからである。この事実は、実際に操作を行ってみれば自然に明らかになる。もっとも

p. 126		
ordinem harum differentiarum auctarum vix assignare liceat; generatim certe hic nihil omnino definiri posse videtur. Circa finem autem imprimis haec series eiectionis ita fit irregularis, ut nulli prorsus legi adstricta videatur. Eum in finem autem hanc seriem hic exposui, quo clarius omnes difficultates, quibus perscrutatio eius impeditur, perspiciantur, haecque ipsa series ex ludicro principio enata attentione nostra non indigna videatur.	of these increasing differences can scarcely be assigned; in general, indeed, nothing at all seems capable of being determined here. Toward the end, moreover, this series of removal becomes so irregular that it seems bound by no rule whatsoever. It is for this very reason that I have set out this series here, so that all the difficulties which impede its investigation may be more clearly perceived, and so that this series itself, though born of a playful beginning, may not seem unworthy of our attention.	これらの増大する差の秩序を割り当てることはほとんどできず、一般にはここで何も定めることができないように思われる。特に終わりに近づくにつれて、この除去の数列はきわめて不規則になり、いかなる法則にも縛られていないように見える。まさにこの理由から、私はこの数列をここに示した。それは、この数列の探究を妨げるすべての困難がより明瞭に見てとれるようにするためであり、またこの数列自体が、たわいもない発端から生まれたものでありながら、私たちの注意を払うに値しないものではないと思われるようにするためである。
4. Haec autem series eiectionis specialis duabus rebus determinatur, quarum altera in numero notarum, qui est 30, altera vero numeratore, qui est 9 continetur. Quocirca in genere quaestio huc redit: ut dato notarum numero una cum numeratore ipsa series eiectionis exhibeatur, cuius solutionem cum in genere sperare nequeamus, in casibus particularibus attentionem nostram exerceri conveniet, num forte legem quampiam detegere videamus. Ac primo quidem patet, si numerator fuerit unitas, seriem eiectionis ipsam fore seriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4 etc. quoniam enim primus quisque eiicitur, primo loco primus terminus, secundo secundus, tertio tertius et ita porro eiicitur, ita ut ultima nota simul sit terminorum ieictorum ultimus.	4. This series of removal is in fact determined specifically by two things: one, the number of marks, which is 30; the other, the counting-number [the modulus of removal, "numerator"], which is 9. Hence the question in general comes down to this: that, given the number of marks together with the counting-number, the series of removal itself be exhibited — a solution which, since we cannot hope for it in general, it will be worthwhile to exercise our attention on particular cases, to see whether we may perhaps discover some law. And first it is clear that, if the counting-number is unity, the series of removal will itself be simply the series of natural numbers 1, 2, 3, 4, etc., since, as every first one in turn is removed, the first term is removed at the first place, the second at the second, the third at the third, and so on, so that the last mark is likewise the last of the removed terms.	4. この除去の数列は、実は二つの事柄によって特定の決定される。一つは印の数であり、これは 30 である。もう一つは数え上げの数（「numerator」）であり、これは 9 である。したがって一般に問題は次のように帰着する。すなわち、印の数と数え上げの数が与えられたとき、除去の数列そのものを示すこと。この解を一般的に期待することはできないので、いくつかの特殊な場合について注意を向け、何らかの法則を発見できないか試みる価値があるだろう。まず明らかにのは、数え上げの数が 1 である場合、除去の数列はそのまま自然数の数列 1, 2, 3, 4 等になるということである。なぜなら、最初の者が順次除かれていくので、第 1 の場所で第 1 項が、第 2 の場所で第 2 項が、第 3 の場所で第 3 項が、というように除かれていき、最後の印は同時に除去された項の最後のものともなるからである。
5. Sit igitur numerator = 2, ita ut secundus quisque eiiciatur, seu ieictio secundum alternos instituatur, ac pro notarum numero series eiectionis ita se habere deprehenduntur:	5. Let the counting-number, then, be = 2, so that every second one is removed, that is, removal proceeds by alternates; and for [various] numbers of marks the series of removal is found to behave thus:	5. さて数え上げの数を 2 としよう。すなわち 2 番目ごとに除かれる、つまり 1 つおきに除去が行われるとする。印の数に応じて、除去の数列は次のようになることがわかる。

p. 127		
numerus notarum — series eiectionis pro numeratore 2	number of marks — series of removal for counting-number 2	印の数 — 数え上げの数 2 に対する除去の数列
1 1 2 2, 1 3 2, 1, 3 4 2, 4, 3, 1 5 2, 4, 1, 5, 3 6 2, 4, 6, 3, 1, 5 7 2, 4, 6, 1, 5, 3, 7 8 2, 4, 6, 8, 3, 7, 5, 1 9 2, 4, 6, 8, 1, 5, 9, 7, 3 10 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, 5 11 2, 4, 6, 8, 10, 1, 5, 9, 3, 11, 7 12 2, 4, 6, 8, 10, 12, 3, 7, 11, 5, 1, 9 13 2, 4, 6, 8, 10, 12, 1, 5, 9, 13, 7, 3, 11 14 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 3, 7, 11, 1, 9, 5, 13 15 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 1, 5, 9, 13, 3, 11, 7, 15 16 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 3, 7, 11, 15, 5, 13, 9, 1	1 1 2 2, 1 3 2, 1, 3 4 2, 4, 3, 1 5 2, 4, 1, 5, 3 6 2, 4, 6, 3, 1, 5 7 2, 4, 6, 1, 5, 3, 7 8 2, 4, 6, 8, 3, 7, 5, 1 9 2, 4, 6, 8, 1, 5, 9, 7, 3 10 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, 5 11 2, 4, 6, 8, 10, 1, 5, 9, 3, 11, 7 12 2, 4, 6, 8, 10, 12, 3, 7, 11, 5, 1, 9 13 2, 4, 6, 8, 10, 12, 1, 5, 9, 13, 7, 3, 11 14 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 3, 7, 11, 1, 9, 5, 13 15 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 1, 5, 9, 13, 3, 11, 7, 15 16 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 3, 7, 11, 15, 5, 13, 9, 1	1 1 2 2, 1 3 2, 1, 3 4 2, 4, 3, 1 5 2, 4, 1, 5, 3 6 2, 4, 6, 3, 1, 5 7 2, 4, 6, 1, 5, 3, 7 8 2, 4, 6, 8, 3, 7, 5, 1 9 2, 4, 6, 8, 1, 5, 9, 7, 3 10 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, 5 11 2, 4, 6, 8, 10, 1, 5, 9, 3, 11, 7 12 2, 4, 6, 8, 10, 12, 3, 7, 11, 5, 1, 9 13 2, 4, 6, 8, 10, 12, 1, 5, 9, 13, 7, 3, 11 14 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 3, 7, 11, 1, 9, 5, 13 15 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 1, 5, 9, 13, 3, 11, 7, 15 16 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 3, 7, 11, 15, 5, 13, 9, 1
Hoc schema inspicienti facile erit pluribus modis ordinem quendam observare. Ultimi scilicet termini manifesto tenent progressionem arithmeticam binario crescentem, dummodo termini qui numerum notarum essent superaturi, infra eum deprimantur, numero scilicet notarum inde detracto. Ita cum primo habeatur 1, pro secunda serie ultimus, qui foret 3, binario subtracto ad unitatem reducitur; hunc sequitur 3, et sequens 5 numerum notarum unitate superans ad unitatem reducitur, et ita porro. Simili lege progrediuntur termini penultimi, tum vero etiam antepenultimi, atque adeo omnes ab-	To anyone examining this table it will be easy to observe a certain order in several ways. The last terms plainly follow an arithmetic progression increasing by two, provided that any terms which would exceed the number of marks are reduced below it, namely by subtracting the number of marks. Thus, since the first [row] gives 1, for the second series the last term, which would be 3, is reduced to unity by subtracting two; this is followed by 3, and the next, 5, exceeding the number of marks by one, is reduced to unity, and so on. The second-to-last terms proceed by the same rule, and likewise the third-to-last, and indeed all terms	この表をよく見れば、いくつかの点で一定の秩序を見出すことは容易であろう。すなわち最後の項は、明らかに公差 2 の等差数列をなしている。ただし、印の数を超えてしまう項については、印の数を差し引いてそれ以下に引き下げる必要がある。例えば第 1 項が 1 であるとき、第 2 の数列の最後の項は本来 3 であるべきだが、2 を差し引いて 1 に引き下げられる。これに続くのは 3 であり、次の 5 は印の数を 1 超えるので 1 に引き下げられる、というように続く。同様の規則は、最後から 2 番目の項についても、また最後から 3 番目の項についても成り立ち、実に最後の項から等距離にあるすべての項について
p. 128		

Latin (original)	English translation	日本語訳
ab ultimis aequidistantes. Quoniam igitur omnes rectae obliquae ei, quae per terminos ultimos transit parallelae, per huiusmodi progressiones arithmeticas pro numero notarum mutilatas transeunt, hinc istae series quousque libuerit facile continuantur.	equidistant from the last. Since, therefore, all the oblique lines which pass through the last terms are parallel, they pass through arithmetic progressions truncated according to the number of marks, and hence these series can easily be continued as far as one pleases.	同様である。したがって、最後の項を通る斜めの直線はすべて互いに平行であるから、これらは印の数に応じて打ち切られた等差数列を通ることになり、それゆえこれらの数列は好きなだけ容易に続けることができる。
6. Exponamus simili modo series eiectionis pro numeratore = 3, ac lex progressionis multo magis abscondita prodibit numerus notarum — series eiectionis pro numeratore 3 <pre> 1 1 2 1, 2 3 3, 1, 2 4 3, 2, 4, 1 5 3, 1, 5, 2, 4 6 3, 6, 4, 2, 5, 1 7 3, 6, 2, 7, 5, 1, 4 8 3, 6, 1, 5, 2, 8, 4, 7 9 3, 6, 9, 4, 8, 5, 2, 7, 1 10 3, 6, 9, 2, 7, 1, 8, 5, 10, 4 11 3, 6, 9, 1, 5, 10, 4, 11, 8, 2, 7 12 3, 6, 9, 12, 4, 8, 1, 7, 2, 11, 5, 10 13 3, 6, 9, 12, 2, 7, 11, 4, 10, 5, 1, 8, 13 14 3, 6, 9, 12, 1, 5, 10, 14, 7, 13, 8, 4, 11, 2 15 3, 6, 9, 12, 15, 4, 8, 13, 2, 10, 1, 11, 7, 14, 5 16 3, 6, 9, 12, 15, 2, 7, 11, 16, 5, 13, 4, 14, 10, 1, 8 etc.</pre> Interim tamen etsi secundum lineas horizontales et verticales ordo magis est abstrusus, tamen in ulti-	6. Let us set out, in the same manner, the series of removal for counting-number = 3, and a law of progression far more hidden will emerge: number of marks — series of removal for counting-number 3 <pre> 1 1 2 1, 2 3 3, 1, 2 4 3, 2, 4, 1 5 3, 1, 5, 2, 4 6 3, 6, 4, 2, 5, 1 7 3, 6, 2, 7, 5, 1, 4 8 3, 6, 1, 5, 2, 8, 4, 7 9 3, 6, 9, 4, 8, 5, 2, 7, 1 10 3, 6, 9, 2, 7, 1, 8, 5, 10, 4 11 3, 6, 9, 1, 5, 10, 4, 11, 8, 2, 7 12 3, 6, 9, 12, 4, 8, 1, 7, 2, 11, 5, 10 13 3, 6, 9, 12, 2, 7, 11, 4, 10, 5, 1, 8, 13 14 3, 6, 9, 12, 1, 5, 10, 14, 7, 13, 8, 4, 11, 2 15 3, 6, 9, 12, 15, 4, 8, 13, 2, 10, 1, 11, 7, 14, 5 16 3, 6, 9, 12, 15, 2, 7, 11, 16, 5, 13, 4, 14, 10, 1, 8 etc.</pre> Meanwhile, although the order along the horizontal and vertical lines is more obscure, nevertheless in the last	6. 同様の仕方で、数え上げの数=3 に対する除去の数列を示してみよう。すると、はるかに隠された進行の法則が現れる。 印の数 — 数え上げの数 3 に対する除去の数列 <pre> 1 1 2 1, 2 3 3, 1, 2 4 3, 2, 4, 1 5 3, 1, 5, 2, 4 6 3, 6, 4, 2, 5, 1 7 3, 6, 2, 7, 5, 1, 4 8 3, 6, 1, 5, 2, 8, 4, 7 9 3, 6, 9, 4, 8, 5, 2, 7, 1 10 3, 6, 9, 2, 7, 1, 8, 5, 10, 4 11 3, 6, 9, 1, 5, 10, 4, 11, 8, 2, 7 12 3, 6, 9, 12, 4, 8, 1, 7, 2, 11, 5, 10 13 3, 6, 9, 12, 2, 7, 11, 4, 10, 5, 1, 8, 13 14 3, 6, 9, 12, 1, 5, 10, 14, 7, 13, 8, 4, 11, 2 15 3, 6, 9, 12, 15, 4, 8, 13, 2, 10, 1, 11, 7, 14, 5 16 3, 6, 9, 12, 15, 2, 7, 11, 16, 5, 13, 4, 14, 10, 1, 8 等々</pre> とはいえ、水平方向や垂直方向に沿った秩序はより難解であるが、それでも最後の

p. 129		
mis iterum progressio arithmetica se prodit secundum ternarium crescens; haecque eadem lex quoque in penultimis et antepenultimis ut ante deprehenditur, ex quo et has series facillime continuare licet.	terms an arithmetic progression again presents itself, increasing by three; and this same rule likewise holds, as before, for the second-to-last and third-to-last terms, from which fact these series too can very easily be continued.	項においては、公差 3 で増加する等差数列が再び現れる。この同じ規則は、最後から 2 番目, 3 番目の項についても先と同様に見出されるので、これらの数列もまた容易に続けることができる。
7. Circa hanc legem in terminis ultimis locum habentem dubitare amplius non poterimus, dum ea adhuc pro numeratore 4 observetur. Pari ergo modo series eiectionis inde erectas repraesentemus numerus notarum — series eiectionis pro numeratore 4 <pre> 1 1 2 2, 1 3 1, 3, 2 4 4, 1, 3, 2 5 4, 3, 5, 2, 1 6 4, 2, 1, 3, 6, 5 7 4, 1, 6, 5, 7, 3, 2 8 4, 8, 5, 2, 1, 3, 7, 6 9 4, 8, 3, 9, 6, 5, 7, 2, 1 10 4, 8, 2, 7, 3, 10, 9, 1, 6, 5 11 4, 8, 1, 6, 11, 7, 3, 2, 5, 10, 9 12 4, 8, 12, 5, 10, 3, 11, 7, 6, 9, 2, 1 13 4, 8, 12, 3, 9, 1, 7, 2, 11, 10, 13, 6, 5 14 4, 8, 12, 2, 7, 13, 5, 11, 6, 1, 14, 3, 10, 9 15 4, 8, 12, 1, 6, 11, 2, 9, 15, 10, 5, 3, 7, 14, 13 16 4, 8, 12, 16, 5, 10, 15, 6, 13, 3, 14, 9, 7, 11, 2, 1 etc.</pre> Hinc ergo lex illa in seriebus oblique descendentibus	7. Concerning this rule holding for the last terms we shall no longer be able to have any doubt, once it has also been observed for counting-number 4. Let us, then, in the same way, set out the series of removal derived from it: number of marks — series of removal for counting-number 4 <pre> 1 1 2 2, 1 3 1, 3, 2 4 4, 1, 3, 2 5 4, 3, 5, 2, 1 6 4, 2, 1, 3, 6, 5 7 4, 1, 6, 5, 7, 3, 2 8 4, 8, 5, 2, 1, 3, 7, 6 9 4, 8, 3, 9, 6, 5, 7, 2, 1 10 4, 8, 2, 7, 3, 10, 9, 1, 6, 5 11 4, 8, 1, 6, 11, 7, 3, 2, 5, 10, 9 12 4, 8, 12, 5, 10, 3, 11, 7, 6, 9, 2, 1 13 4, 8, 12, 3, 9, 1, 7, 2, 11, 10, 13, 6, 5 14 4, 8, 12, 2, 7, 13, 5, 11, 6, 1, 14, 3, 10, 9 15 4, 8, 12, 1, 6, 11, 2, 9, 15, 10, 5, 3, 7, 14, 13 16 4, 8, 12, 16, 5, 10, 15, 6, 13, 3, 14, 9, 7, 11, 2, 1 etc.</pre> Hence, then, this rule, in the series descending obliquely,	7. 最後の項に成り立つこの規則について、数え上げの数 4 の場合を観察すれば、もはや疑う余地はなくなるであろう。そこで同様の仕方で、これより得られる除去の数列を示そう。 印の数 — 数え上げの数 4 に対する除去の数列 <pre> 1 1 2 2, 1 3 1, 3, 2 4 4, 1, 3, 2 5 4, 3, 5, 2, 1 6 4, 2, 1, 3, 6, 5 7 4, 1, 6, 5, 7, 3, 2 8 4, 8, 5, 2, 1, 3, 7, 6 9 4, 8, 3, 9, 6, 5, 7, 2, 1 10 4, 8, 2, 7, 3, 10, 9, 1, 6, 5 11 4, 8, 1, 6, 11, 7, 3, 2, 5, 10, 9 12 4, 8, 12, 5, 10, 3, 11, 7, 6, 9, 2, 1 13 4, 8, 12, 3, 9, 1, 7, 2, 11, 10, 13, 6, 5 14 4, 8, 12, 2, 7, 13, 5, 11, 6, 1, 14, 3, 10, 9 15 4, 8, 12, 1, 6, 11, 2, 9, 15, 10, 5, 3, 7, 14, 13 16 4, 8, 12, 16, 5, 10, 15, 6, 13, 3, 14, 9, 7, 11, 2, 1 等々</pre> したがって、この規則は、斜めに下降する数列においても

p. 130		
prorsus confirmatur, quae scilicet hic sunt arithmeticae quaternario crescentes, dum termini numerum nostrum superantes infra eum deprimuntur. In seriebus autem horizontalibus et verticalibus ordo fit continuo intricatior. Quin etiam ipsa rei natura in seriebus horizontalibus nullam progressionis legem patitur, propterea quod eae, cum omnes numeros notarum numero non maiores fuerint complexae, ulteriori continuationi adversantur, ita ut continuatio tanquam imaginaria sit spectanda.	thoroughly confirmed — these [oblique series], namely, are here arithmetic progressions increasing by four, provided the terms which exceed our number [of marks] are reduced below it. In the horizontal and vertical series, however, the order becomes ever more entangled. Indeed, the very nature of the matter allows no law of progression in the horizontal series, because these, once they have included all the numbers not exceeding the number of marks, are averse to any further continuation, so that any continuation of them must be regarded as, so to speak, merely imaginary.	まったく裏付けられる。すなわちこれらは公差 4 で増加する等差数列であり、ただし私たちの数（印の数）を超える項はそれ以下に引き下げねばならない。しかし水平方向・垂直方向の数列においては、秩序はますます込み入ったものとなる。実際、事柄の本質そのものが、水平方向の数列にはいかなる進行の法則も許さない。なぜならこれらの数列は、印の数を超えない数をすべて含み終えた時点で、それ以上続けることに逆らうからであり、それゆえその継続は、いわば想像上のものとみなさざるを得ない。

Latin (original)	English translation	日本語訳
8. En ergo insignem legem, cuius ope pro quovis numeratore et notarum numero, nota ultimo eiicienda assignari potest. Existente scilicet numeratore = n, si pro notarum numero ν ultima eiicienda sit z, seu indici z respondeat, tum pro numero notarum $\nu + 1$, ultima eiicienda erit $z + n$, siquidem non sit $z + n > \nu + 1$; at si $z + n > \nu + 1$, ultima erit $z + n - \nu - 1$ vel $z + n - 2(\nu + 1)$ vel $z + n - 3(\nu + 1)$, vel generatim dividendo $z + n$ per $\nu + 1$, residuum ex divisione relictum dabit indicem ultimae notae eiiciendae. Ubi notetur, si divisio nihil relinquat, tum pro residuo 0 scribi notarum numerum $\nu + 1$. Cum ergo pro numero notarum n cognita fuerit ultimo eiecta, pro omnibus notarum numeris maioribus ultimo eiecta facile per hanc regulam assignabitur. Perpetuo autem si unica fuerit nota, eadem quoque erit ultimo eiecta, seu si fuerit $\nu = 1$, erit $z = 1$, unde sequentes omnes sine ullo negotio reperiuntur. Quae regula eo magis est notatu digna, quod sine iectionis or- dine	8. Here, then, is a remarkable rule, by whose aid the mark last to be removed can be assigned for any counting-number and number of marks whatsoever. Namely, let the counting-number be = n; if, for a number of marks ν, the last to be removed is z — that is, if it corresponds to the index z — then for a number of marks $\nu + 1$, the last to be removed will be $z + n$, provided $z + n$ is not $> \nu + 1$; but if $z + n > \nu + 1$, the last will be $z + n - \nu - 1$, or $z + n - 2(\nu + 1)$, or $z + n - 3(\nu + 1)$; or, in general, dividing $z + n$ by $\nu + 1$, the remainder left over from the division will give the index of the last mark to be removed. Here it should be noted that, if the division leaves nothing over, then in place of the remainder 0 one should write the number of marks $\nu + 1$. Since, therefore, once the last-removed [mark] is known for a number of marks n, the last-removed for all larger numbers of marks can easily be assigned by this rule. Always, moreover, if there is but a single mark, that same one will of course also be the last removed, that is, if $\nu = 1$, then $z = 1$, whence all subsequent [values] can be found without any trouble. This rule deserves to be noted all the more, because without the order of removal	8. さてここに、注目すべき規則がある。この規則によって、任意の数え上げの数と印の数について、最後に除かれる印を割り当てることができる。すなわち、数え上げの数を n とし、印の数 ν に対して最後に除かれるのが z、つまり指標 z に対応するとする。このとき、印の数が $\nu + 1$ のとき、最後に除かれるのは $z + n$ である。ただし、$z + n$ が $\nu + 1$ を超えない場合に限る。もし $z + n$ が $\nu + 1$ を超えるならば、最後に除かれるのは $z + n - \nu - 1$、あるいは $z + n - 2(\nu + 1)$、あるいは $z + n - 3(\nu + 1)$ である。一般に言えば、$z + n$ を $\nu + 1$ で割ったときの余りが、最後に除かれる印の指標を与える。ここで注意すべきは、割り切れて余りが出ない場合には、余り 0 の代わりに印の数 $\nu + 1$ を書くということである。したがって、印の数 n について最後に除かれるものがひとたびわかれば、それより大きいすべての印の数についても、この規則によって最後に除かれるものを容易に割り当てることができる。また常に、印がただ一つしかない場合には、その一つがそのまま最後に除かれるものとなる。つまり $\nu = 1$ ならば $z = 1$ であり、これによって以降のすべての値は何の苦労もなく求められる。この規則は特に注目に値する。なぜなら
p. 131		
dine cognito statim ultimo eiiciendam exhibeat, etiamsi ea manifesto ab ordine ante eiectarum pendeat. Quamobrem haec regula merito tanquam insigne Theorema spectari debet, in cuius demonstrationem inquirere omnino operae erit pretium.	being known, it at once exhibits the one to be finally removed — even though this manifestly depends on the order of those removed before it. For this reason this rule deserves rightly to be regarded as a remarkable theorem, one whose demonstration is entirely worth investigating.	除去の順序を知らなくても、最後に除かれるものを直ちに示してくれるからである。もっともそれは、それ以前に除かれたものの順序に明らかに依存しているのであるが。この理由から、この規則はまさに注目すべき定理とみなされるにふさわしく、その証明を探索することは大いに価値のある仕事であろう。
9. Sequenti modo autem eius demonstratio commodissime adstrui videtur. Consideretur notarum numerus $\nu + 1$, unde secundum numeratorem n prima fiat iectio, quae cadet in notam n, siquidem fuerit $n < \nu + 1$, vel in notam $n - \alpha(\nu + 1)$, qui indices autem omnes indici n aequivalent. Expungatur ergo haec nota, ut haec punctorum series A indicat	9. The demonstration of it seems most conveniently to be established in the following way. Let the number of marks $\nu + 1$ be considered, from which, according to the counting-number n, the first removal takes place, which will fall upon mark n, provided $n < \nu + 1$, or upon mark $n - \alpha(\nu + 1)$; these indices, however, are all equivalent to the index n. Let this mark, then, be struck out, as this series of points, A, indicates:	9. その証明は、次のような仕方で最も都合よく組み立てられるように思われる。印の数 $\nu + 1$ を考え、これより数え上げの数 n に従って最初の除去が行われるとする。それは、$n < \nu + 1$ であるならば印 n に、あるいは印 $n - \alpha(\nu + 1)$ に当たる（これらの指標はすべて指標 n と等価である）。そこでこの印を消すと、次の点の列 A が示す通りになる。
A; 1 2 3 n n+1 n+2 $\nu + 1$ (n marked as eiected)	A; 1 2 3 n n+1 n+2 $\nu + 1$ (n marked as removed)	A; 1 2 3 n n+1 n+2 $\nu + 1$ (n が除去されたものとして印がつく)
ac notae praecedentes 1, 2, 3 $\cdots$, $(n - 1)$ ad finem adiungantur indicibus numero $\nu + 1$ auctis, ut prodeat ista punctorum series	and let the preceding marks 1, 2, 3, $\cdots$, $(n - 1)$ be appended at the end, with their indices increased by the number $\nu + 1$, so that this series of points results:	そして先行する印 1, 2, 3, $\cdots$, $(n - 1)$ を末尾に付け加え、それらの指標に $\nu + 1$ を加えると、次の点の列が得られる。
B n+1 n+2 n+3 $\nu + 1$ $\nu + 2$ $\nu + n$	B n+1 n+2 n+3 $\nu + 1$ $\nu + 2$ $\nu + n$	B n+1 n+2 n+3 $\nu + 1$ $\nu + 2$ $\nu + n$
in qua notarum numerus est ν, quaeque series ab ea, ubi numerus notarum est ν, quam ita repraesento,	in which the number of marks is ν; and let the series obtained from this, where the number of marks is ν, be represented thus:	ここで印の数は ν である。そして、印の数が ν であるときに得られるこの数列を、次のように表そう。
C 1 2 3 4 $\nu - 1$ ν	C 1 2 3 4 $\nu - 1$ ν	C 1 2 3 4 $\nu - 1$ ν
aliter non differt, nisi quod ibi indices numeratore n sunt aucti. Utrinque ergo iectiones secundum numeratorem n factae in easdem ordine notas cadent, ac si iectio ultima in serie C incidat in notam cuius index est z, ea in serie B incidet in notam cu-	which differs from the former in no respect, except that there the indices are increased by the counting-number n. On both sides, therefore, the removals made according to the counting-number n will fall upon the marks in the same order; and if the last removal in series C falls upon the mark whose index is z, then in series B it will fall upon the mark whose	これは前者と何ら異ならない。ただし前者では指標に数え上げの数 n が加えられている点だけが異なる。したがって、数え上げの数 n に従って行われる除去は、両者において同じ順序で印に当たることになる。もし数列 C において最後の除去が指標 z の印に当たるならば、数列 B においてはそれは指標が 次の
p. 132		
ius index est $n + z$; id quod etiam in serie notarum A, quarum numerus est $\nu + 1$ eveniet. Quo ipso veritas nostri Theorematis evincitur. Simul autem inde patet, quod hic de notis ultimo eiectis est demonstratum, idem de penultimis, antepenultimis, omnibusque ordinibus ab ultimis aequidistantibus valere.	$n + z$; which will likewise occur in the series of marks A, whose number is $\nu + 1$. By this very fact the truth of our theorem is established. At the same time it follows from this that, what has here been demonstrated concerning the marks last removed, holds equally for the second-to-last, the third-to-last, and indeed for all ranks equidistant from the last.	$n + z$ である印に当たる。これは印の数が $\nu + 1$ である数列 A においても同様に起こる。まさにこのことによって、私たちの定理の真理性が証明される。同時にこのことから、最後に除かれる印について証明されたことは、最後から 2 番目、3 番目、そして一般に最後から等距離にあるすべての順位についても同様に成り立つことがわかる。
10. Huius igitur regulae ope statim pro quovis numeratore series iectionis formare poterimus, cuius specimen pro numeratore 5 hic appono	10. By the aid of this rule, then, we shall at once be able to form the series of removal for any counting-number whatsoever; of which I append here a specimen for counting-number 5:	10. したがって、この規則の助けを借りれば、任意の数え上げの数に対する除去の数列を直ちに作ることができる。その例として、数え上げの数 5 についての例をここに示す。
numerus notarum — series iectionis pro numeratore 5	number of marks — series of removal for counting-number 5	印の数 — 数え上げの数 5 に対する除去の数列

Latin (original)	English translation	日本語訳
1 1	1 1	1 1
2 1, 2	2 1, 2	2 1, 2
3 2, 3, 1	3 2, 3, 1	3 2, 3, 1
4 1, 3, 4, 2	4 1, 3, 4, 2	4 1, 3, 4, 2
5 5, 1, 3, 4, 2	5 5, 1, 3, 4, 2	5 5, 1, 3, 4, 2
6 5, 4, 6, 2, 3, 1	6 5, 4, 6, 2, 3, 1	6 5, 4, 6, 2, 3, 1
7 5, 3, 2, 4, 7, 1, 6	7 5, 3, 2, 4, 7, 1, 6	7 5, 3, 2, 4, 7, 1, 6
8 5, 2, 8, 7, 1, 4, 6, 3	8 5, 2, 8, 7, 1, 4, 6, 3	8 5, 2, 8, 7, 1, 4, 6, 3
9 5, 1, 7, 4, 3, 6, 9, 2, 8	9 5, 1, 7, 4, 3, 6, 9, 2, 8	9 5, 1, 7, 4, 3, 6, 9, 2, 8
10 5, 10, 6, 2, 9, 8, 1, 4, 7, 3	10 5, 10, 6, 2, 9, 8, 1, 4, 7, 3	10 5, 10, 6, 2, 9, 8, 1, 4, 7, 3
11 5, 10, 4, 11, 7, 3, 2, 6, 9, 1, 8	11 5, 10, 4, 11, 7, 3, 2, 6, 9, 1, 8	11 5, 10, 4, 11, 7, 3, 2, 6, 9, 1, 8
12 5, 10, 3, 9, 4, 12, 8, 7, 11, 2, 6, 1	12 5, 10, 3, 9, 4, 12, 8, 7, 11, 2, 6, 1	12 5, 10, 3, 9, 4, 12, 8, 7, 11, 2, 6, 1

12.[原文ママ, §11 は本文に見当たらない] Etsi autem series notarum ultimo loco eiectarum tam simplicem ac facilem legem sequitur: tamen hoc maxime mirabile usu venit, quod in genere hanc seriem nullo modo exhibere liceat. Velu-ti

§12.[*as printed — §11 does not appear in the text*] Although the series of marks removed last follows so simple and easy a rule, it is nevertheless a most remarkable circumstance that this series can in no way be exhibited in general. As, for

§12. [原文ママ, §11 は本文中に見当たらない] 最後に除かれる印の数列がこれほど単純で容易な規則に従うにもかかわらず、この数列を一般に示すことがまったくできないという事実は、きわめて注目すべきことである。例えば

p. 133		
ti si pro numeratore series ultimo eiectorum ita repraesentetur	instance, if for the counting-number the series of those removed last is represented thus:	数え上げの数に対して、最後に除かれるものの数列を次のように表すでしょう。
num. notarum series 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ν 1 A B C D E F G H I N	no. of marks series 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ν 1 A B C D E F G H I N	印の数 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ν 数列 1 A B C D E F G H I N
novimus quidem fore A vel 1 vel 2, seu $A = n - 2i$	we do indeed know that A will be 1 or 2, that is, $A = n - 2i$;	私たちは確かに、A は1か2のいずれかであること、すなわち $A = n - 2i$ であることを知っている。
vero	and further	さらに
$B = A + n - 3i$, $C = B + n - 4i$, $D = C + n - 5i$ etc.	$B = A + n - 3i$, $C = B + n - 4i$, $D = C + n - 5i$, etc.	$B = A + n - 3i$, $C = B + n - 4i$, $D = C + n - 5i$, 等々
verum tamen hinc generaliter terminum N assignare non valemus, propterea quod in singulis littera i determinatum numerum denotat, tantum scilicet, ut terminus indicem supra scriptum non superet. Hinc etsi determinatio $D = C + n - 5i$ nihil habet difficultatis, tamen si velimus pro C suum valorem $B + n - 4i$ ponere, ut prodeat $D = B + 2n - 4i - 5i$ hinc nihil concludere possumus, quandoquidem geminae litterae <i>i</i> valores non innotescunt. Causa igitur, cur in genere circa hanc seriem nihil definire liceat, in hoc consistit, quod continuo terminorum reductio ad alios numeros sit instituenda. Facilius hoc intelligetur, si perpendamus, nullum terminum ex praecedente absolute determinari, sed ad plures interdum conditiones esse respiciendum: Scilicet si quartus detur C, quintus erit vel $C + n$ nisi $C + n > 5$;	Nevertheless we cannot from this in general assign the term N, because in each case the letter <i>i</i> denotes some definite number, only large enough that the term not exceed the index written above it. Hence, although the determination $D = C + n - 5i$ presents no difficulty, if we should wish to substitute for C its value $B + n - 4i$, so that $D = B + 2n - 4i - 5i$ results, we can conclude nothing from this, since the values of the two occurrences of the letter <i>i</i> are not known to us. The reason, then, why nothing can be determined in general about this series consists in this, that the reduction of terms to other numbers must continually be freshly instituted. This will be understood more easily if we consider that no term is determined absolutely from the preceding one, but that several conditions must sometimes be attended to: namely, if the fourth term C is given, the fifth will be either $C + n$, unless $C + n > 5$;	しかしながら、これから一般に項 N を求めることはできない。なぜなら、それぞれの場合において文字 <i>i</i> はある特定の数を表しているのだが、それは項が上に書かれた指標を超えない程度の大きさにすぎないからである。したがって、 $D = C + n - 5i$ という決定にはそれ自体何の困難もないのだが、もし C の値として $B + n - 4i$ を代入し、 $D = B + 2n - 4i - 5i$ という式を得ようとしても、これから何も結論することはできない。というのも、二つの文字 i の値がそれぞれ何であるかわからないからである。それゆえ、一般にこの数列について何も定めることができない理由は、次の点にある。すなわち、項の帰着（還元）を、その都度新たに他の数へと行わねばならないということである。このことは、次のように考えればより容易に理解できるであろう。すなわち、いかなる項も先行する項から絶対的に定まるのではなく、時にはいくつかの条件を考慮しなければならないということである。すなわち、もし第4項 C が与えられたなら、第5項は $C + n$ であるが、ただし $C + n > 5$ でない場合に限る。
vel erit $C + n - 5$ nisi $C + n > 10$ vel erit $C + n - 10$ nisi $C + n > 15$ etc.	or it will be $C + n - 5$, unless $C + n > 10$; or it will be $C + n - 10$, unless $C + n > 15$; etc.	$C + n > 10$ でなければ $C + n - 5$ となり、 $C + n > 15$ でなければ $C + n - 10$ となる、等々。

p. 134		
quemlibet autem terminum ad suam debitam formam deprimi oportet, antequam ex eo sequentem ope regulae demonstratae eliciamus.	Each term must be reduced to its proper form before we can, by the rule demonstrated, derive the next one from it.	いずれの項も、それ本来のあるべき形に引き下げてから、証明された規則によって次の項をそこから導かねばならない。
13. Pro casibus autem particularibus ad terminos valde remotos per saltus progredi licet, ut non sit opus omnes intermedios evoluisse. Scilicet si pro numeratore <i>n</i> , indici <i>ν</i> , qui hic notarum numerum significat, respondeat terminus <i>a</i> , tum indici <i>ν</i> + <i>x</i> respondebit terminus <i>a</i> + <i>nx</i> , dum sit <i>a</i> + <i>nx</i> < <i>ν</i> + <i>x</i> seu <i>x</i> < (<i>ν</i> − <i>a</i>)/(<i>n</i> − 1): quin adhuc hic terminus recte se habet, si <i>x</i> unitate augeatur, hoc est si <i>x</i> > (<i>ν</i> − <i>a</i>)/(<i>n</i> − 1), ut excessus unitate sit minor, tumque indici <i>ν</i> + <i>x</i> respondebit terminus (<i>n</i> − 1) <i>x</i> − <i>ν</i> + <i>a</i> . Simili modo ab hoc per saltum ad remotiorem terminum pervenire licet, saltus autem continuo fiunt maiores: per singulos autem saltus termini in progressionе arithmeticа secundum numeratorem <i>n</i> crescente procedunt. Ab initio quidem singuli termini seorsim sunt definiendi, statim autem atque ad indices numeratore maiores pervenitur, calculus per saltus commodius instituitur, cuius specimen pro numeratore 9 opponam, ubi perpetuo numerum <i>ν</i> − <i>a</i> per 8 ita dividi oportet, ut quotus nimis magnus accipiatur: tum enim ipse quotus dabit valorem ipsius <i>x</i> , et residuum erit terminus per hunc saltum sequens:	13. For particular cases, however, one may proceed by jumps to terms lying far off, so that it is not necessary to work through all the intermediate ones. Namely, if for the counting-number <i>n</i> , the index <i>ν</i> (which here denotes the number of marks) corresponds to the term <i>a</i> , then to the index <i>ν</i> + <i>x</i> will correspond the term <i>a</i> + <i>nx</i> , as long as <i>a</i> + <i>nx</i> < <i>ν</i> + <i>x</i> , that is, <i>x</i> < (<i>ν</i> − <i>a</i>)/(<i>n</i> − 1); indeed, this term still holds correctly if <i>x</i> is increased by one, that is, if <i>x</i> > (<i>ν</i> − <i>a</i>)/(<i>n</i> − 1), so that the excess is less than unity, in which case to the index <i>ν</i> + <i>x</i> will correspond the term (<i>n</i> − 1) <i>x</i> − <i>ν</i> + <i>a</i> . In like manner one may proceed by <i>a</i> [further] jump from this to a more distant term, the jumps continually becoming larger; and with each successive jump the terms proceed in an arithmetic progression increasing according to the counting-number <i>n</i> . At the outset, indeed, each term must be determined separately, but as soon as one reaches indices larger than the counting-number, the calculation is more conveniently carried out by jumps, a specimen of which I shall set out for counting-number 9, where one must continually divide the number <i>ν</i> − <i>a</i> by 8 in such a way that the quotient obtained is taken too large: for then the quotient itself will give the value of <i>x</i> , and the remainder will be the term corresponding to the next jump:	13. しかし特定の場合については、遠く離れた項へと飛び越しながら進むことができ、すべての中間項をたどる必要はない。すなわち、数え上げの数 <i>n</i> に対して、指標 <i>ν</i> （ここでは印の数を表す）が項 <i>a</i> に対応するとしよう。このとき指標 <i>ν</i> + <i>x</i> には項 <i>a</i> + <i>nx</i> が対応する。ただし <i>a</i> + <i>nx</i> < <i>ν</i> + <i>x</i> , すなわち <i>x</i> < (<i>ν</i> − <i>a</i>)/(<i>n</i> − 1) である間はそうである。もっとも、 <i>x</i> を1だけ増やしても、すなわち <i>x</i> > (<i>ν</i> − <i>a</i>)/(<i>n</i> − 1) であっても、その超過分が1未満である限り、この項はなお正しく成り立つ。その場合、指標 <i>ν</i> + <i>x</i> には項 (<i>n</i> − 1) <i>x</i> − <i>ν</i> + <i>a</i> が対応する。同様の仕方で、ここからさらに遠い項へと飛び越しによって進むことができ、飛び幅は次第に大きくなっていく。そして飛び越しのたびごとに、項は数え上げの数 <i>n</i> に従って増加する等差数列をなして進む。最初のうちは各項を個別に定めなければならないが、数え上げの数より大きな指標に達するとすぐに、計算は飛び越しによって行うほうが便利になる。その例を数え上げの数9について示そう。ここでは、数 <i>ν</i> − <i>a</i> を常に8で割るのだが、その商をわざと大きめに取るようにする。そうすれば、その商自体が <i>x</i> の値を与え、余りが次の飛び越しに対応する項となる。

p. 135		
Series pro numeratore 9	Series for counting-number 9	数え上げの数9に対する数列
Indices 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18	Indices 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18	指標 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
termini 1 2 2 3 2 5 7 8 8 7 5 2 11 6 15 8 17 8	terms 1 2 2 3 2 5 7 8 8 7 5 2 11 6 15 8 17 8	項 1 2 2 3 2 5 7 8 8 7 5 2 11 6 15 8 17 8
Saltus 2 3 3 4 4 4 5 6 6 7 8 9	Jumps 2 3 3 4 4 4 5 6 6 7 8 9	飛び幅 2 3 3 4 4 4 5 6 6 7 8 9

Latin (original)				English translation				日本語訳			
1000				1000				1000			
Index proximus	964	terminus	5	Nearest index	964	term	5	直前の指標	964	項	5
	36	per 9 dat	324		36	times 9 gives	324		36	かける 9 は	324
-----				-----				-----			
		terminus quaesitus	329			term sought	329			求める項	329
V. Quaeratur terminus 5000 ^{mus} :				V. Let the 5000th term be sought:				V. 第 5000 項を求めよう.			
5000				5000				5000			
Index proximus	4456	terminus	1	Nearest index	4456	term	1	直前の指標	4456	項	1
	544	per 9 dat	4896		544	times 9 gives	4896		544	かける 9 は	4896
-----				-----				-----			
		terminus quaesitus	4897			term sought	4897			求める項	4897
17. [原文ママ, §16 は本文に見当たらない] Consideratio huiusmodi serierum tam facili negotio formandarum non solum est iucunda,				§17. [<i>as printed</i> — <i>§16 does not appear in this position; see note</i>] The consideration of series of this sort, so easily formed, is not only pleasant,				§17. [原文ママ. この位置に §16 はなく, 注記を参照] このような数列がこれほど容易に作られるということ を考察するのは, 楽しいだけでなく,			
p. 138											
sed etiam non parum ad numerorum naturam tantopere nobis adhuc absconditam felicius perscrutandam conferre quicquam posse videtur. Eximium certe hoc est exemplum, et omni attentione dignum, quod series tam levi opera non solum formari sed etiam quousque libuerit continuari possit, cum tamen eius natura et vera indoles nobis maneat prorsus incognita, neque ut aliae ad terminum generalem revocari possit.				but also seems capable of contributing not a little to the more successful investigation of the nature of numbers, hitherto so much hidden from us. This is certainly an outstanding example, and worthy of all attention, that a series can not only be formed with so little effort, but can also be continued as far as one pleases, even though its nature and true character remain entirely unknown to us, nor, like other [series], can it be reduced to a general term.				私たちににとってこれまで大いに隠されてきた数の本質 をより首尾よく探究するのに, 少なからず貢献しうる ように思われる. これは確かに際立った例であり, 大 いに注目に値する. すなわち, ある数列がこれほど僅 かな労力で作られるだけでなく, 望むだけいくらでも 続けることができるにもかかわらず, その本質と真の 性格は私たちににとってまったく未知のままであり, 他 の数列のように一般項に帰着させることもできないの である.			
II. Simili modo etiam pro numeratore 6 ordines eiectionis subiungimus				II. In like manner, for counting-number 6 also, we append the orders of removal:				II. 同様の仕方で, 数え上げの数 6 についても除去の 順序を付け加えよう.			
Numerus notarum — Series eiectionis pro numeratore 6				Number of marks — Series of removal for counting-number 6				印の数 — 数え上げの数 6 に対する除去の数列			
1. 1 2. 2. 1 3. 3. 2. 1 4. 2. 1. 4. 3 5. 1. 3. 2. 5. 4 6. 6. 1. 3. 2. 5. 4 7. 6. 5. 7. 2. 1. 4. 3 8. 6. 4. 3. 5. 8. 7. 2. 1 9. 6. 3. 1. 9. 2. 5. 4. 8. 7 10. 6. 2. 9. 7. 5. 8. 1. 10. 4. 3 11. 6. 1. 8. 4. 2. 11. 3. 7. 5. 10. 9				1. 1 2. 2. 1 3. 3. 2. 1 4. 2. 1. 4. 3 5. 1. 3. 2. 5. 4 6. 6. 1. 3. 2. 5. 4 7. 6. 5. 7. 2. 1. 4. 3 8. 6. 4. 3. 5. 8. 7. 2. 1 9. 6. 3. 1. 9. 2. 5. 4. 8. 7 10. 6. 2. 9. 7. 5. 8. 1. 10. 4. 3 11. 6. 1. 8. 4. 2. 11. 3. 7. 5. 10. 9				1. 1 2. 2. 1 3. 3. 2. 1 4. 2. 1. 4. 3 5. 1. 3. 2. 5. 4 6. 6. 1. 3. 2. 5. 4 7. 6. 5. 7. 2. 1. 4. 3 8. 6. 4. 3. 5. 8. 7. 2. 1 9. 6. 3. 1. 9. 2. 5. 4. 8. 7 10. 6. 2. 9. 7. 5. 8. 1. 10. 4. 3 11. 6. 1. 8. 4. 2. 11. 3. 7. 5. 10. 9			
16. [原文ママ, §16 と §17 の順序が原書の誤植と思われ る] Vicissim autem si detur ordo eiectionum, qui ab ultimo regrediendo fit:				§16. [<i>as printed; the section numbers 16 & 17 appear transposed, evidently a printer's error in the original</i>] Conversely, if the order of those removed is given, taken in reverse starting from the last, thus:				§16. [原文ママ. 16 と 17 の順序が入れ替わっている ように見える. 原書の誤植と思われる] 逆に, 最後か ら遡って得られる除去された者たちの順序, すなわち			
z, y, x, v, u, t, s, r etc.				z, y, x, v, u, t, s, r, etc.,				z, y, x, v, u, t, s, r 等々			
ex eo pro quovis numeratore et quolibet notarum numero, initialis ordo notarum investigari poterit. Quod				then from this, for any counting-number whatsoever and any number of marks, the initial order of the marks can be investigated. Which				が与えられているならば, これより, 任意の数え上げ の数と任意の印の数について, 印の初期の並び順を探 究することができる. この			
p. 139											
Quod quo clarius appareat, sit numerator = 4 et pro quolibet notarum numero ordo notarum sequenti modo se habebit:				so that this may appear more clearly, let the counting-number be = 4, and for any number of marks the initial order of the marks will be found to behave as follows:				ことがより明瞭になるように, 数え上げの数を 4 とし て, 任意の印の数について, 印の初期の並び順が次の ようになることを示そう.			
multitudo notarum — ordo notarum initialis				number of marks — initial order of the marks				印の総数 — 印の初期の並び順			
1 z z 2 z y z y 3 x z y 4 x z y v 5 z y v u x 6 v u x t z y 7 t z y s v u x 8 v u x r t z y s 9 z y s q v u x r t 10 x r t p z y s q v u 11 q v u o x r t p z y s 12 z y s n q v u o x r t p 13 r t p m z y s n q v u o x 14 u o x l r t p m z y s n q v 15 n q v k u o x l r t p m z y s 16 z y s i n q v k u o x l r t p m 17 t p m k z y s i n q v k u o x l r 18 x l r g t p m k z y s i n q v k u o.				1 z z 2 z y z y 3 x z y 4 x z y v 5 z y v u x 6 v u x t z y 7 t z y s v u x 8 v u x r t z y s 9 z y s q v u x r t 10 x r t p z y s q v u 11 q v u o x r t p z y s 12 z y s n q v u o x r t p 13 r t p m z y s n q v u o x 14 u o x l r t p m z y s n q v 15 n q v k u o x l r t p m z y s 16 z y s i n q v k u o x l r t p m 17 t p m k z y s i n q v k u o x l r 18 x l r g t p m k z y s i n q v k u o.				1 z z 2 z y z y 3 x z y 4 x z y v 5 z y v u x 6 v u x t z y 7 t z y s v u x 8 v u x r t z y s 9 z y s q v u x r t 10 x r t p z y s q v u 11 q v u o x r t p z y s 12 z y s n q v u o x r t p 13 r t p m z y s n q v u o x 14 u o x l r t p m z y s n q v 15 n q v k u o x l r t p m z y s 16 z y s i n q v k u o x l r t p m 17 t p m k z y s i n q v k u o x l r 18 x l r g t p m k z y s i n q v k u o.			
Consideratio horum ordinum non solum eorum naturam satis luculenter declarat, sed etiam plures insignes speculationes suppeditare poterit.				The consideration of these orders not only sufficiently clearly reveals their nature, but will also be able to supply several remarkable speculations.				これらの並び順を考察することは, それらの本質を十 分に明瞭に示すだけでなく, いくつもの注目すべき考 察の材料をも提供しうるであろう.			

以上である.