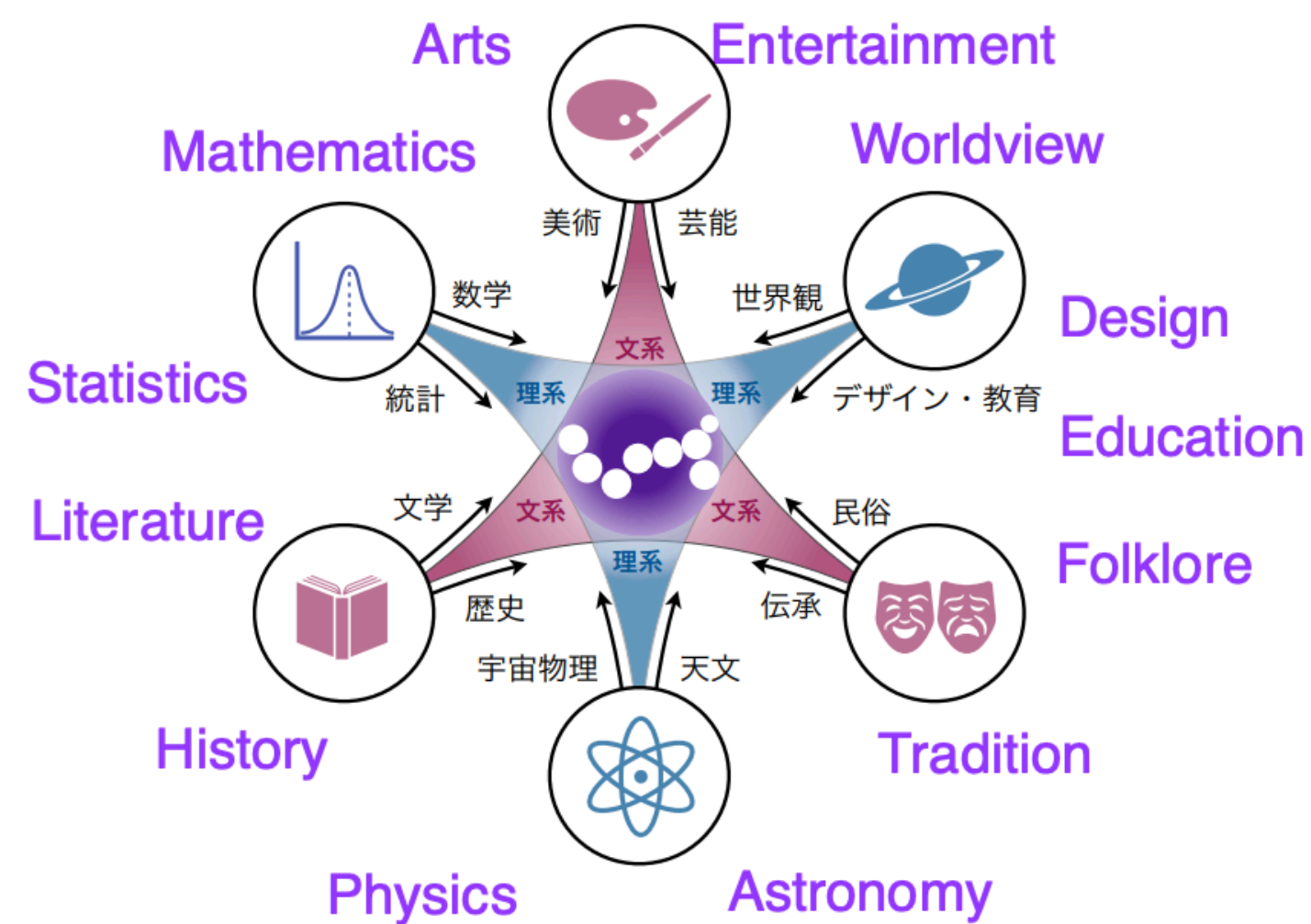


継子立て問題とヨセフスの問題



<https://www.oit.ac.jp/labs/is/system/shinkai/>

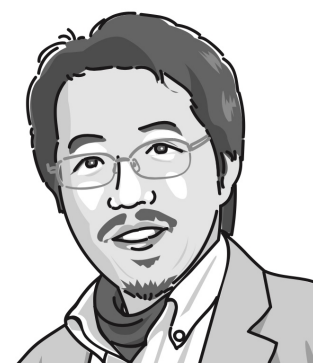
Mamakodate problem & Josephus problem

継子立て問題とヨセフスの問題

My favorite phrase since I started to study history of science...

管見の限り, 先行研究は見つからない

To the best of my knowledge, no prior research has been found.



Hisaaki Shinkai (Osaka Institute of Technology)

真貝寿明(大阪工業大学 情報科学部)

hisaaki.shinkai@oit.ac.jp

<https://www.oit.ac.jp/labs/is/system/shinkai/>

Mamakodate problem & Josephus problem

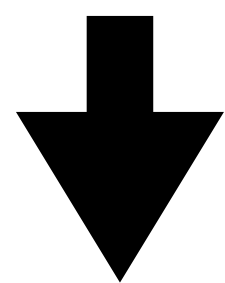
継子立て問題とヨセフスの問題

継子立て問題



吉田光由『塵劫記』 (after 1631 ed.)

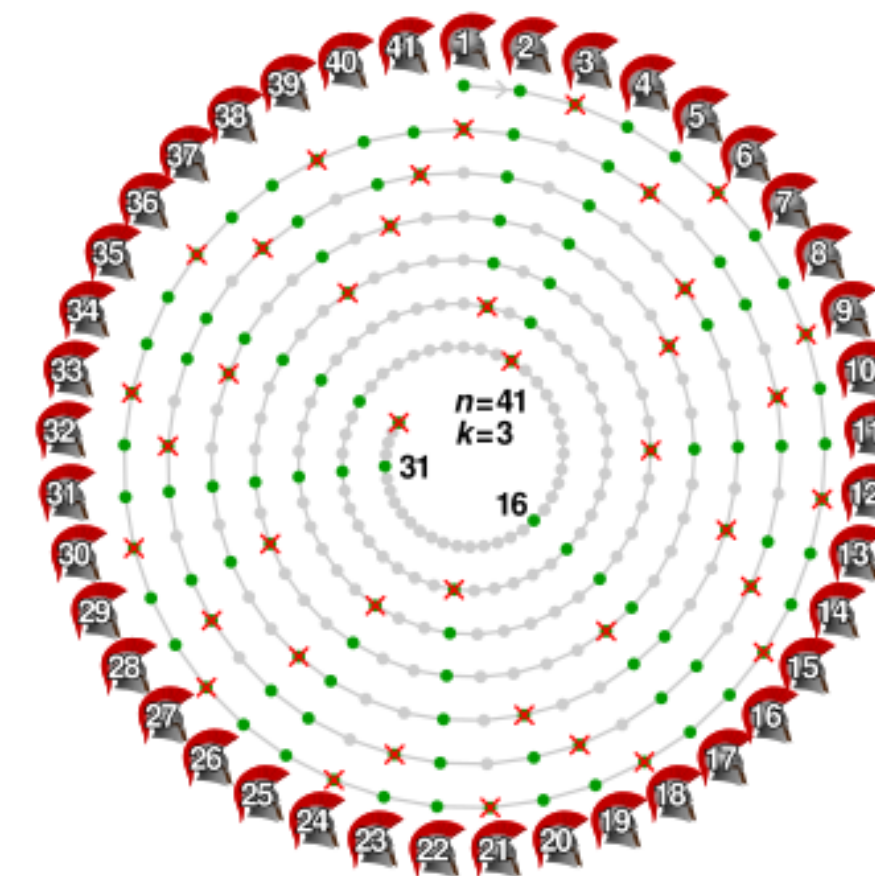
YOSHIDA Mitsuyoshi 『Jinkouki』



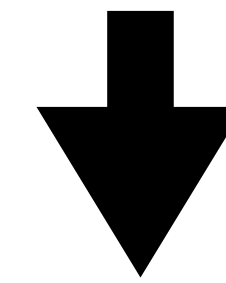
関孝和編 『算脱之法』 (1683)

SEKI Takakazu ed. 『Sandatsu no hou』

Josephus problem



Flavius Josephus at Siege of Yodfat, 67



オイラー 『新しく発見された特異な数列』 (1776)

Euler 『a New and Singular kind of Progression』

Mamakodate-problem 継子立ての問題

実子(children)を●, 継子(stepchildren)を●

A man died, leaving behind fifteen children by his first wife and fifteen children by his second wife. It was decided that one of them would inherit the estate, and the second wife wanted her own child to be chosen. So the thirty children were arranged in a circle in a certain order, and every tenth child was to be removed.

Once they began, only the children of the first wife (the stepchildren) were removed one after another. When the fifteenth stepchild remained, he pleaded, "This is unfair, please let me start the counting over from myself."

The second wife agreed, and when the count restarted from that child, all fifteen of her own children were removed, and the fifteenth stepchild was the one left at the end.

第一 まゝ子だての事

子三十人有内、十五人は先腹せんはら、残る十五人は当腹たうはらの子也。右みぎのごとく立たてならべて十にあたるをのけて、又二十にあたるをのけ、二十九人までのけて、残る一人にあとをゆづり可レ申と云時、まゝ母かくのごとく立たてたる也。さて、かぞへ候へば、先腹の子十四人までのき申候時、今一たびかぞへれば先腹の子みな三のき申候ゆへに、一人残たるまゝ子のいふやうは、あまり片三一三双三に三のき申候間、いまよりはわれよりかぞへられ候へといへば、ぜひにをよばずして、一人残りたる先腹の子よりかぞへ候へば、当腹の子皆のき、先腹の子一人のこりてあとをとるとなり。

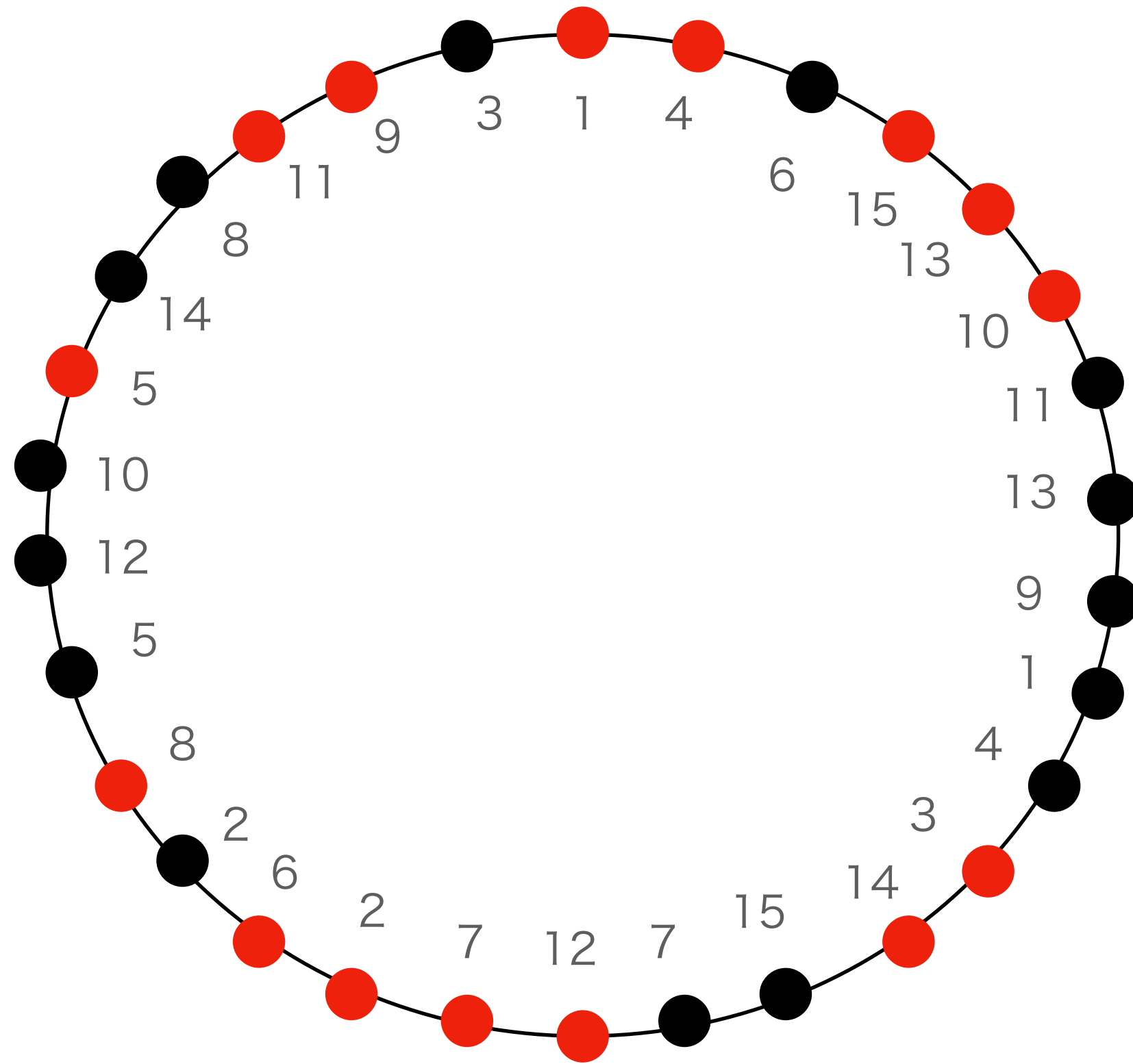
(二) 『徒然草』第百三十七段「花は盛りに」の条に、



岩波文庫より

Mamakodate-problem 継子立ての問題

実子(children)を●, 継子(stepchildren)を●



A man died, leaving behind fifteen children by his first wife and fifteen children by his second wife. It was decided that one of them would inherit the estate, and the second wife wanted her own child to be chosen. So the thirty children were arranged in a circle in a certain order, and every tenth child was to be removed.

Once they began, only the children of the first wife (the stepchildren) were removed one after another. When the fifteenth stepchild remained, he pleaded, ``This is unfair, please **start counting over from me.**'' The second wife agreed, and when the count restarted from that child, all fifteen of her own children were removed, and the fifteenth stepchild was the one left at the end.

The Great Comeback game! 大逆転!



すけたか
藤原資隆『簾中抄』

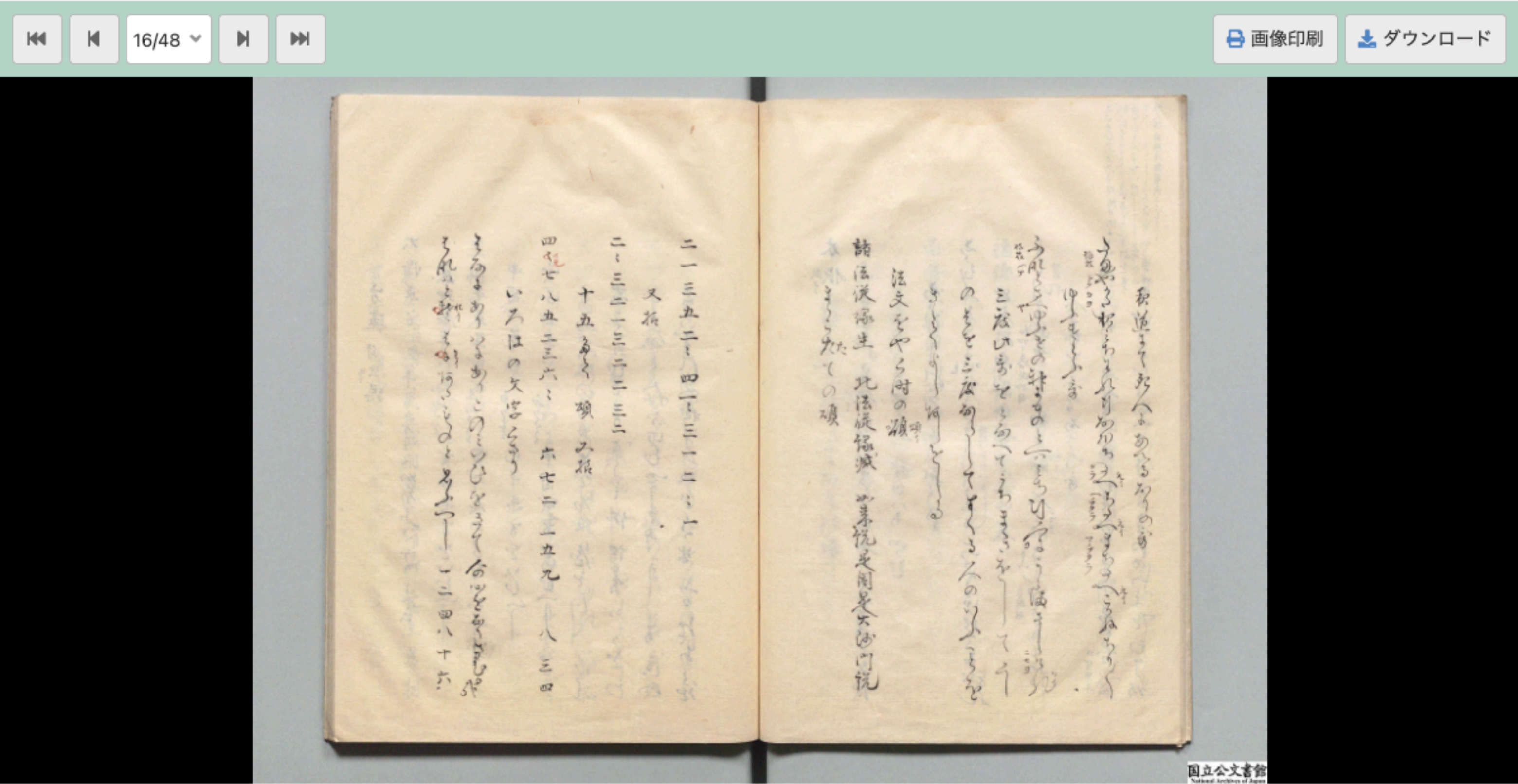
12世紀

簿冊標題： 簾中抄

件名： 簾中抄 4

<< 先頭
 < 前の件名
 No.4
 (全4件中)

簿冊詳細を開く
 PDF
 JPEG

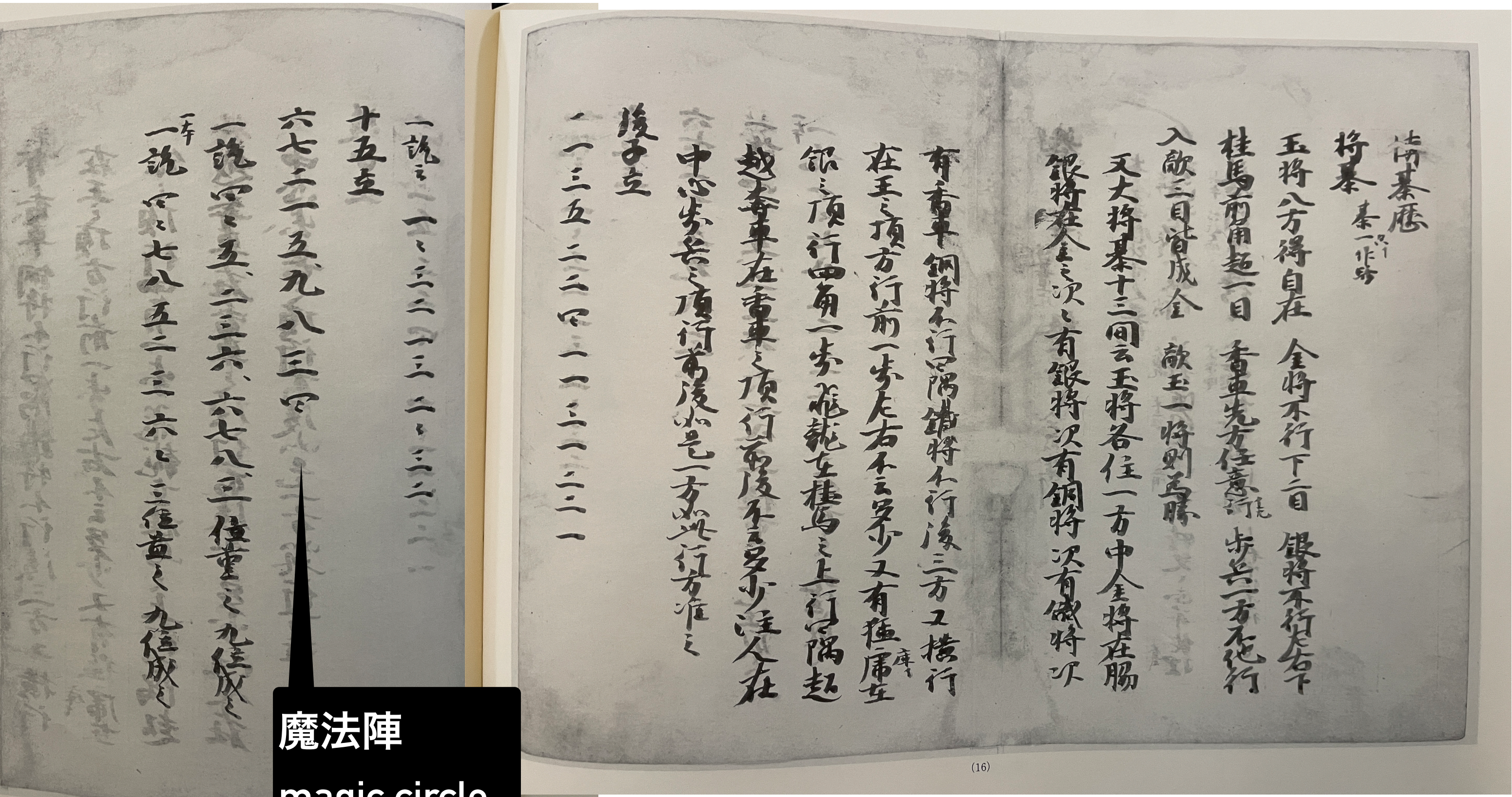


URI : <https://www.digital.archives.go.jp/img/4432755>

画像等データの二次利用について

Copyright © 2021 NATIONAL ARCHIVES OF JAPAN. All Rights Reserved.

又様
 一三二五二二二三二
 ままこだての頌
 10+10 case
 15+15 case



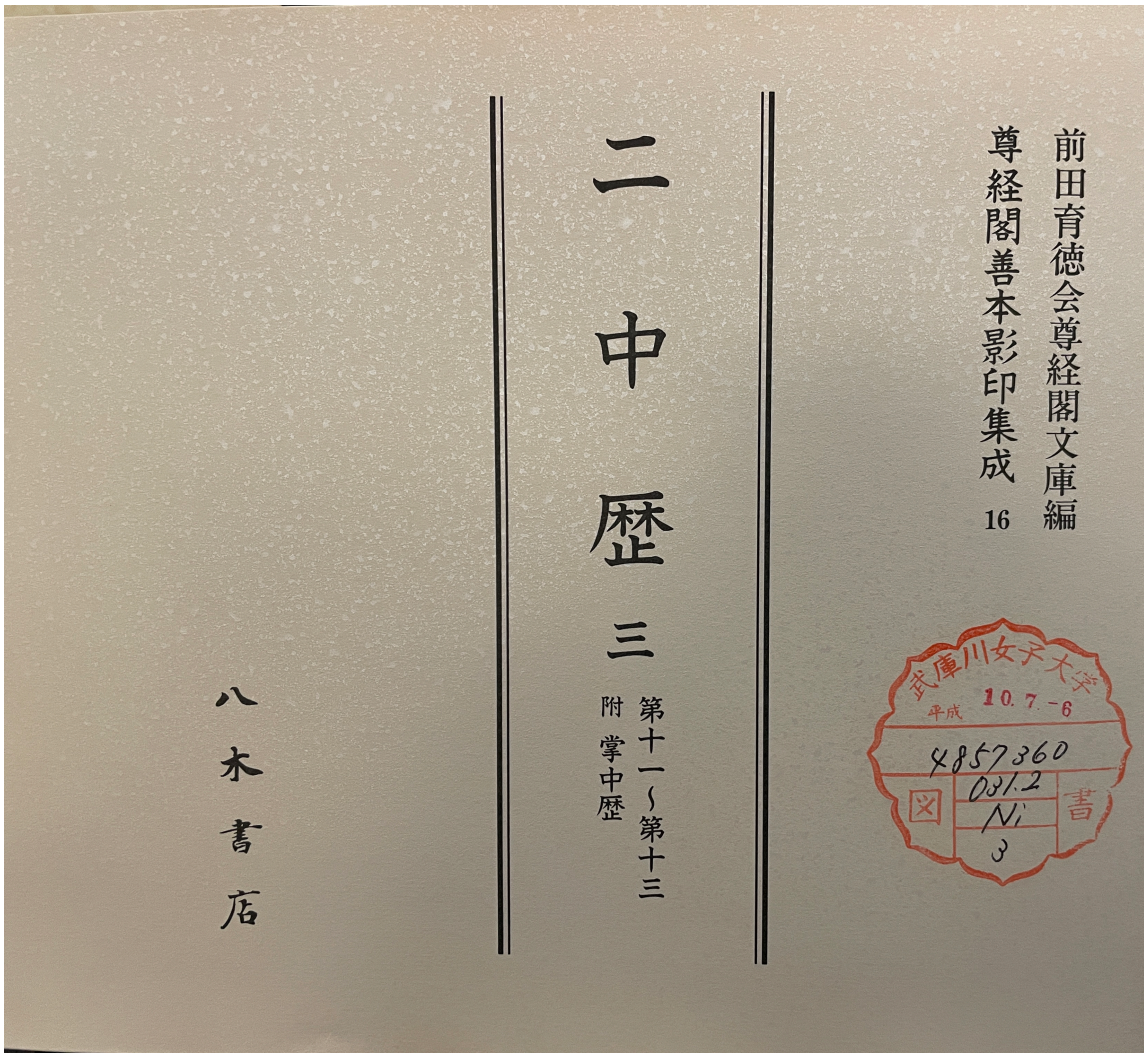
魔法陣
magic circle

8	1	6
3	5	7
4	9	2

10+10 case

- 一 一 二 繼
- 一 說 子
- 一 云 立
- 一 一 三 五 二 一 四 一 一 三 二 一 二 三 二 一 二 一 二 一 一

15+15 case



寄珍抄振藪卓子礫石竹鳥
馳編本撰文字諸文字書云
石河直宿世諸宿無燒祖父
祖母之地同日比之藤授指

也。修短不一。被誓古力。又相撲
有田十八。取手所謂入相
撲。然相撲。踢相撲。内結。外結
等也。手足不固者。不可修之
也。又子熊力。均水。練死鐵
早乞者。力弱。力重。中々。不思

張^セ弓也^コ弓^コ箭^サ也^コ藝^ハ名^ナ馬^バ上^ウ位^イ
 立^タ矢^ヤ涿^ゾ鑄^サ馬^メ望^メ縣^{ケン}大^{ダイ}追^{ツイ}物^{ブツ}車^{シャ}
 鹿^カ園^{エン}也^コ是^コ若^ニ為^ス武^ブ藝^イ也^コ興^{キョウ}域^{イキ}

馬に進退難辨王に運否を
而十ふは百五減望人隱脚
木打継子立石杭入金要重
重敵小童數婆死に双六一
居去鳴立虎と立有卦立毫
お局とて遊尤容易者也下

門聖人^ノ依^リ也立^テ教^ヲ誠^ニ以^テ應^ズ
 痛^ク某^ノ也雖^モ終^ニ石^ノ生^キ死^ス簣^ヲ
 之^ノ廢^レ作^ル不^レ存^ス如^ク勢^ノ不^レ可^ク向^ス
 王^ノ局^ヲ將^ス某^ノ則^チ合^ス戰^ス切^ニ也小^ニ
 象^ノ三^十六^ノ禽^ノ列^ス位^ス多^ク
 則^チ法^ヲ三^十六^ノ旬^ノ甲^ノ子^ノ不^レ祓^ス

憐^レ之^ニ子^ヲ富^ニ於^テ丹^ニ朱^ニ之^ニ通^ニ仁^ニ
 之^レ教^ヲ也^{ナリ}所^レ謂^ル乃^ハ戒^ニ終^ニ日^ニ飽^ニ食^ニ
 与^テ憂^ニ者^{ナリ}也^{ナリ}此^レ偏^ニ好^ニ戲^ニ謔^ニ一

《異制庭訓往来》には、〈十不足〉〈百五減〉〈盗人隠〉〈左々立（ささだて）〉などの碁石を使って遊べる遊戯が並べられている。

十不足，百五減，盜人隱，郎等打
繼子立，石抓，入金，要金，
▲ 重賄，小童敷，双六

『往来物大系 第10巻』（大空社）平成4年

<https://kokusho.nijl.ac.jp/biblio/100263958/>

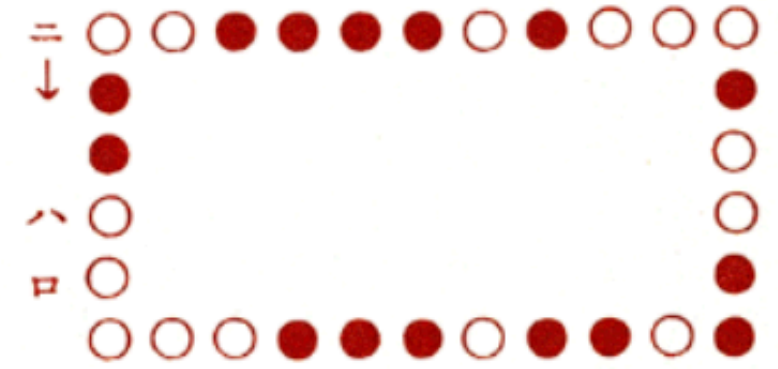
List of Board games on January 6.

継子立ての歴史 徒然草137段

impermanence of the world...
世の無常についてのエッセイ集

兼行法師 1330年頃

を表す係助詞。九 継子立ての遊戯。黒白の石各十五個を、一定の順に配列し、その中の一つ(図のイの石)を起点として数えはじめ、まず第十番目にあたる石(図のロ)を取り除く。次に、その隣(図のハ)の石から、また第十番目にあたる石を起点として、白は(図のニ)の石だけが残る。さて今度は、残った白(図のニ)の石を起点に順々に、十ずつ反対の方向に数えて間引いてゆくと、ついに白(図のニ)の石一つだけが残る仕組みである。二〇 十番目、十番目と数えあてて。二二 そのほかの石は助かった。二三 間をおいて抜き取る。二三 どの石も。二四 俗世間を隠遁した。



るべからず。一日に一人、二人のみならんや。鳥部野・舟岡、さらぬ野山にも、送る数多かる日はあれど、送らぬ日はなし。されば、棺をひさくもの、作りてうち置くほどなし。若きにもよらず、強きにもよらず、思ひかけぬは死期なり。今日まで遁れ来にけるは、ありがたき不思議なり。しばしも世をのどかには思ひなんや。ままとだてといふものを双六の石にて作りて、立て並べたるほどは、取られん事いづれの石とも知らねども、数へあてて一つを取りぬれば、その外は遁れぬと見れど、又々数ふれば、彼是間抜き行くほどに、いづれも遁れざるに似たり。兵の軍に出づるは、死に近きことを知りて、家をも忘れ、身をも忘る。世をそむける草の庵には、閑かに水石をもてあそびて、これを余所に聞かんと思へるは、いとかなし。閑かなる山の奥、無常の敵競ひ来らざらんや。その死に臨める事、軍の陳に進めるにおなじ。

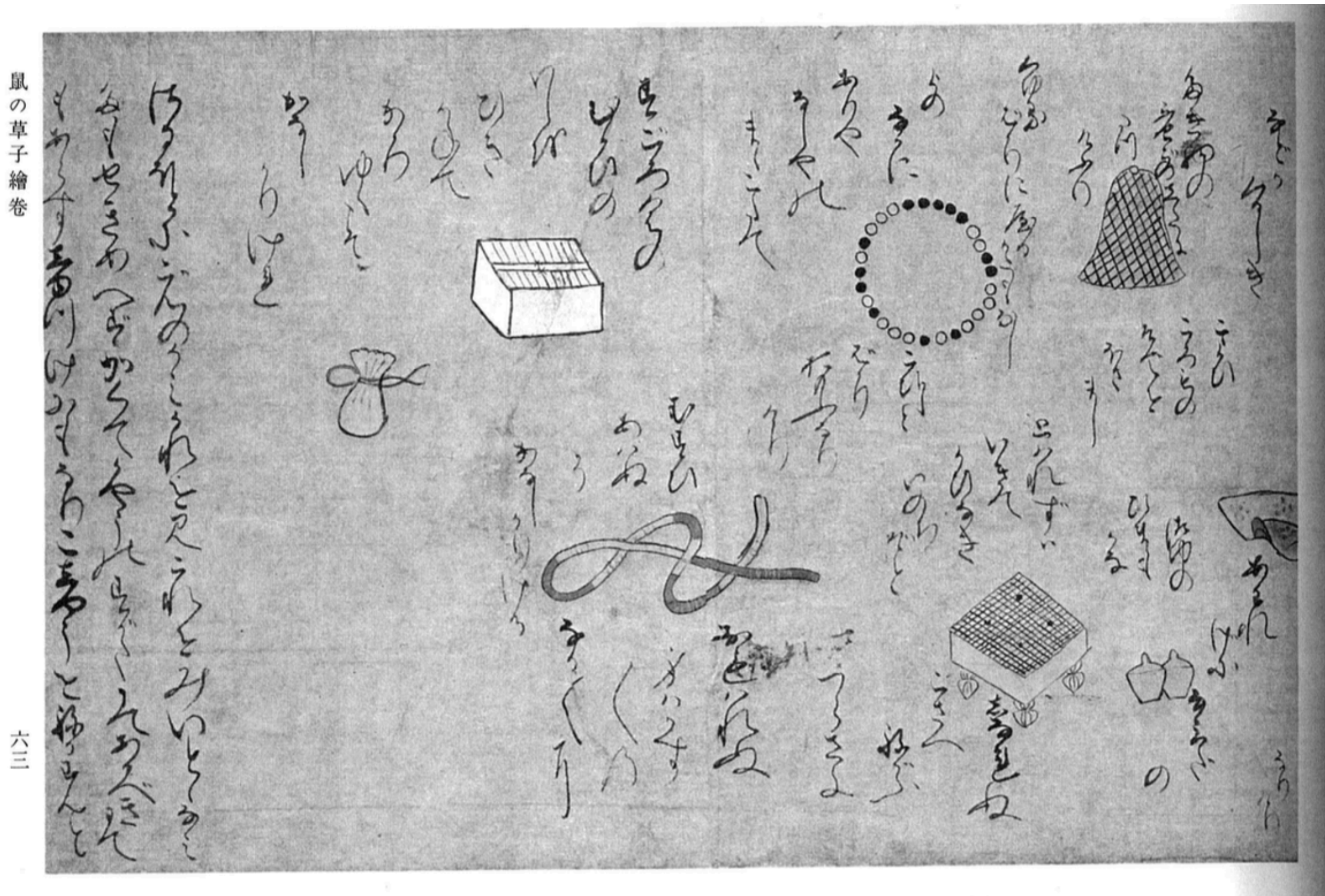
今日まで死からまぬかれてきたということ、は、珍しい不思議なことなのである。しばらくでも、この世をのんびりしたものと思えようか。継子立てというものを、双六の石で作って、置き並べてあるうちは、取られるであろうのは、どの石であるともわからないが、数えあてて一つの石を取ってしまえば、その他の石はまぬかれたように見えるが、さらにまた数えたと、あれこれと間引いてゆくうちに、どの石も遁れられないのと、人間の運命は似ている。武士の戦

... we all will be removed sometime in future...

『鼠の草子絵巻』(天理図書館所蔵版)

室町期

よのなかにありや
なしやのまゝこたて
こひしとばかり
おもふなりけり



『天理図書館善本叢書 和書之部 第八巻 古奈良繪本集一』
(八木書店) 昭和47年

まず継子立の石の絵であるが、このままでは継子立にならない。絵師はおそらく絵ではなく『簾中抄』などにあるような数字列を見ながらこの絵を描いたと思われる。そのとき絵師が見た写本の数字列がすでに誤っていたか、それとも絵師がそれを見誤ったかのどちらかであるが、いずれにせよこの絵は、『簾中抄』などの正しい並べ方の数字列に次のような四つの変形、(a), (b), (c), (d), が加わった結果と思われる。

	(a)	(b)	(c)
正:	二 一 三 五 二 二 四 一 一	三 一 二 二 一	二 二 一
鼠:	欠 一 三 五 二 二 四 一 一	一 三 一 一 二 一	一 一 二 一
(d)→	・ 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇 〇	・ 〇 〇 〇 〇 〇	・ 〇 〇 〇 〇

林隆夫, 数学史研究 173/174合併号(2002) 1

List of Mamakodate problem

<平安時代>

[1106 -1159 藤原通憲 (村井中漸によれば, 継子立の考案または伝授者)]

[1127 『懷中歷』 (『二中歷』の博基歷が基づく)]

1151-1156 頃『簾中抄』 (「まゝこたての略頌」の項で数字列 2 つを列举)

<鎌倉-南北朝 時代>

1210-1221 頃『二中歷』 (博基歷の「後子立」の項で数字列 2 つを列举)

1310-1331 頃『徒然草』 (死を免れぬ身をまゝ子立の石にたとえる)

1278-1346 頃『異制庭訓往来』 (「継子立」に言及)

?-1372 『新撰遊覚往来』 (「三十二十之継子立」に言及)

<室町-戦国-安土桃山 時代>

1500 頃『十二段草子』 (「ありやなしやのまゝこたて」に言及)

1500 頃 天理図書館蔵『鼠の草子絵巻』 (「ありやなしやのまゝこたて」を含む歌と基石の図)

<江戸時代>

1604 『徒然草寿命院抄』 (数字列 1 つを列举し, 10 番目を除くことに言及)

1624 『徒然草野槌』 (数字列 1 つを列举し, 10 番目を除くことに言及)

1627-1631 頃『塵劫記』刊年未詳の 5 巻本 (継子立の具象的な絵と文章説明を載せる)

[1644-1652? 『姫百合のさうし』 (「まま子だて」に言及)]

1693 『男重宝記』 (「三十二十之継子立」に言及)

林隆夫, 数学史研究 173/174合併号(2002) 1

The Great Comeback game was appeared
only after 塵劫記

いずれも大逆転はない.

大逆転は, 吉田光由が気づいたか?

探筭略之法 第八

黑白ノ棋子三十、一平ハ黒子ヲ交備テ順算シテ
十ノ数ニ當ルヲ腕云テ、既ニ黒子十四ヲ腕シテ
一黒子ヲ止於此其所止一黒子ヨリ逆算シテ十
ノ数ニ當ルヲ腕云トキハ却テ白子減リ腕盡シ
テ黒子一ヲ止ム、是ヲ古ヨリ總子立ト號ス、今其
術ヲ探會シテ別隊ヲ求ム、
棋子ヲ並ヘ布テ、黒子ハ他ハ其整不整ヲ驗スニ
腕ハ白子ヲ止ル、一、三七十九、三十一等ニ整ス
三腕ハ白子ヲ止ル、一、三五、八、三十等ニ整ス、四腕
ハ白子ヲ止ル、一、四、八、十一、十五等ニ整ス、五腕

ハ白子ヲ止ル^ル一、二、五、十、一、十四、三十六等ニ整ス
六腕ハ一、二、七、十三等ノ數ニ整ス、其驗^ヲテ性返
シ探ル^ニ、必不整ノ限有^リ、又可整限有^リ、其可整
限ニ於^テ又整不整有^ル一^ヲ探ル^ハ、卽是據ト爲^テ
本術ヲ會セリ、

本術置一子、擬黑於法實者法一實脫數名累加之矣
 濁法除去之實盡者法減一子、擬黑餘爲適限數也
 右算脫ノ法ハ兄賢明力探會スル所ナリ賢明
 ノ生知利和ニ亞ル其稟受ノ氣情虛弱ニシテ
 常ニ病日多シ會テ五斜ノ括術ヲ爲シト欲シ

テ其繁雜^ハ假^ニ萬位^ニ及^トトモ、一日^ニ百
位ヲ造^サハ徐^リ百日^ニシテ畢^ラント言^フテ果
シテ月餘^ニシテ悉^ク成^{セリ}賢明^ノ没^{シテ}後^ニ吾
般^ノ成^シ得^{タル}ヲ意^テ始^テ實^ニ昔^{スル}ヲ得
タリ旬日^{ナラ}スシテ黃^ニ赤^ニ道^ニ立^テ成^リノ原^ノ數^ヲ造
リ^テ中^ニ報^上右^ニ衛^門ニ授^ク于^テ時^五十^有七^歳也
又^ニ姓^歲吾^サク壯^{ナリ}シ時^宣明^曆天^正ノ氣^相
轉^ス支^ノ分^ノ數^ヲ以^テ積^年ヲ求^ル數^ヲ造^リ畢^ラ
以^テ爲^ス多^ク位^ニシテ甚^ニ難^ク爲^ス者^ト今^衰老^{スル}ニ及
ビ^テ精^氣徐^ク一^半ヲ損^シテ^テ許^多ト數^ヲ

造ルヲ壯ナリシ時ニ倍セリ是乃算法我カ心
ニ從フニ、難シト不思知シ心ニ不從者ハ必
難シト意フナリ其我心ニ從フト不從トノ實
意ヲ識者ハ賢明一人半凡ソ思慮ノ慧利ナル
ニ依ルヲナリ又氣積ノ壯盛ナルヲ用ルヲナ
ク恭ニ居テ常ニ爲テ不止者ハ即柔ミシテ甚
堅キヲ碎キ、寡ヲ以衆多ヲ量ルノカナリ、學ヲ
者實ニ得テ知スニハ敢テ綴術ノ本旨ヲ理會
スヘカラス、

探圓數 第九

假如有圓徑一尺問周幾何、答曰周三尺一寸四
 分一厘九忽二微五纖八沙七塵三渺三八四六強、
 徑一尺ノ圓ヲ截テ四角ト造テ截周冪ヲ求ム又
 截テ八角ト造テ截周冪ヲ求ム又截テ十六角ト
 造テ截周冪ヲ求ム又截テ三十二角ト造テ又六
 十四角ト造テ又百二十八角ト造テ以テ逐テ角數
 ヲ倍シテ皆截周冪ヲ求テ其數ヲ視ルニ角數倍
 スルニ隨テ徐ク真ニ近シト雖モ敢テ真數ヲ宛
 ルルナシ故ニ増約ノ術ヲ以テ真數ヲ盡スヘキ

右**算脱ノ法ハ兄賢明力探會スル所ナリ**賢明力生知孝和二亜リ、其稟受ノ氣情虛弱ニシテ、常ニ病日多シ會テ五斜ノ括術ヲ為ント欲シテ其繁雜セリ、假に萬位ニ及フトモ、一日二百位ヲ造サハ、徐リ百日ニシテ畢ラント言テ果シテ月餘ニシテ、悉ク成セリ、

『The low of Sandatsu』 was first discovered by TAKEBE Kataakira.

In what case, the first person remains as the last?

「算脱之法」に記載されている正限数の表（漢数字を算用数字に直し、列は左から並べた）

m	脱数	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	正限数	1	3	1	2	1	22	1	90	1
N	同	3	5	4	5	2	49	4	145	15
	同	7	8	8	11	7	92	9	207	21
	同	15	30	11	14	13	234	19	233	70
	同	31	69	15	36	73	319	29	474	226

removal number; remove every m -th person

of people N who are removed when the first person remains as the last;
(The # of total game player is $n=N+1$.)

Procedure to derive N .

1. 最初の法（原法）を1，実を0（空）とする。

2. 法には1を加え，実には脱数を加えてその数から法を引けるだけ引いた残りを実とせよ。

3. 実が0となるとき，法から1を引いたものが正限数である。

4. これを続けて次の実が0になるときも，法から1を引いたものが正限数である。
1. Set the initial modulus (the “original modulus”) to 1, and the dividend (実) to 0 (empty).

2. Add 1 to the modulus, add the removal number to the dividend, and let the dividend become the remainder after subtracting the modulus from it as many times as possible.

3. When the dividend becomes 0, the modulus minus 1 is a survivor number.

4. Continuing this process, whenever the dividend next becomes 0, the modulus minus 1 is again a survivor number.

十	九	八	七	六
一	九十	一	二十一	一
十五	百四十五	四	四十九	二
二十一	二百〇七	九	九十二	七
七十	二百三十三	十九	二百三十四	十三
二百二十六	四百七十四	二十九	三百十九	七十三

五	四	三	二	脱数
二	一	三	一	正限諸数
五	四	五	三	
十一	八	八	七	
十四	十一	三十	十五	
三十六	十五	六十九	三十一	

In what cases, the first person remains at the end?

「算脱之法」に記載されている正限数の表（漢数字を算用数字に直し，列は左から並べた）

m	脱数	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	正限数	1	3	1	2	1	22	1	90	1
N	同	3	5	4	5	2	49	4	145	15
	同	7	8	8	11	7	92	9	207	21
	同	15	30	11	14	13	234	19	233	70
	同	31	69	15	36	73	319	29	474	226

Example

表 2 「算脱之法」の計算例. 脱数 m が 3 の場合で, $J_n = 1$ となる $n = 4, 6, 9, \dots$ となることから, 正限数は, $N = n - 1 = 3, 5, 8, \dots$ と求められる.

total player	法	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
removal number	脱数	m	3	3	3	3	3	3	3	3	3
dividend	実 +1	J _n	1	2	2	1	4	1	4	7	1

◀ finalist

Procedure to derive N.

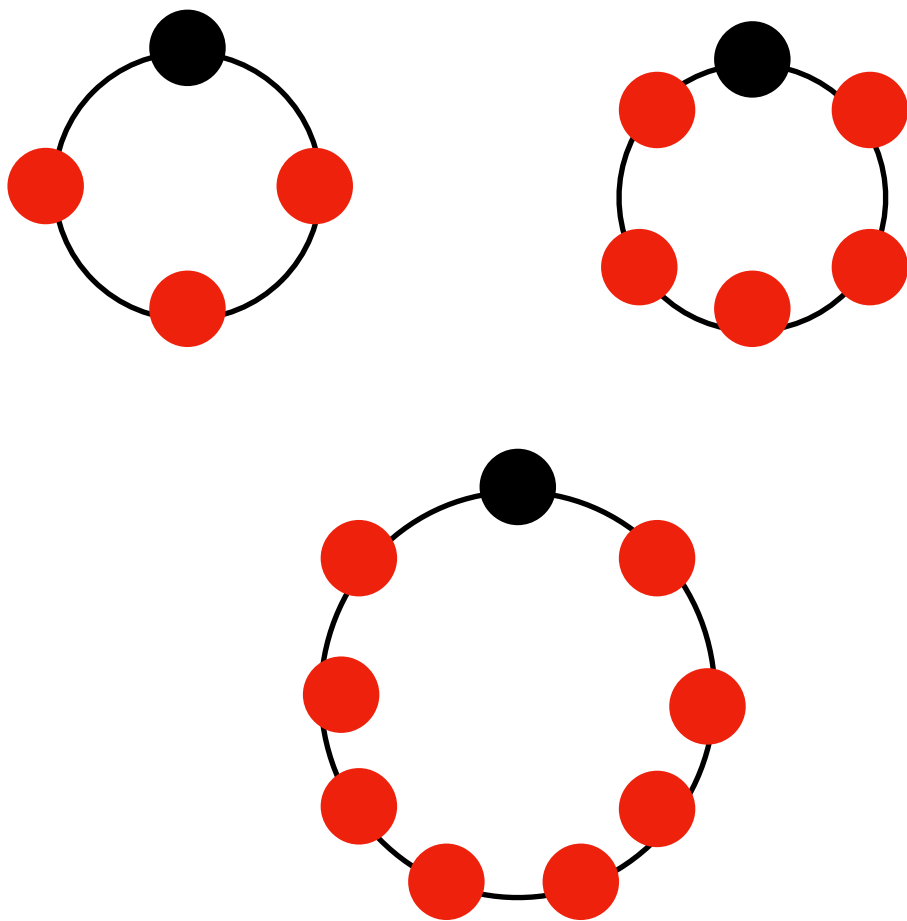
1. (法とよぶ数) $n = 1, 2, 3, \dots$ を 1 行目に, 脱数 m を 2 行目の各列に記せ.
2. (実とよぶ数 +1) J_n とする数を 3 行目のはじめに, $J_1 = 1$ と記入せよ.
3. $n \geq 2$ の J_n は, $J_n = \text{mod}(m + J_{n-1}, n)$ である. この値がゼロのときは, $J_n = n$ とせよ.
4. $J_n = 1$ となるときの n より, $N = n - 1$ とすればそれが正限数である.

1. Write the number called the modulus, $n = 1, 2, 3, \dots$, in the first row, and the removal number m in each column of the second row.
2. Write the number called the dividend +1, denoted J_n , in the third row, entering $J_1 = 1$ at the start.
3. For $n \geq 2$, $J_n = \text{mod}(m + J_{n-1}, n)$. When this value is zero, set $J_n = n$.
4. For the n at which $J_n = 1$, setting $N = n - 1$ gives a survivor number.

mod(3+1, 2)

mod(3+2, 3)

mod(3+2, 4)



例えば, $m = 3$ のときは, 次の表になり, 正限数は, $N = 3, 5, 8, \dots$ ということになる.

- $n = 1$ のとき、 $J_1 = 1$ は明らかである。
- $n = 2$ のとき、人の並びを円状に名前をつけて、 $a, b, a, b, \dots$ とすれば、 $m = 3$ 人目を取り除くと、 $a, b, \cancel{a}, b, \dots$ となり、2 番目の b が残る。したがって、 $J_2 = 2$ となる。
- $n = 3$ のとき、同様に、 $a, b, c, a, b, c, \dots$ とすれば、3 人目を取り除くと、 $a, b, \cancel{c}, a, b, \cancel{c}, \dots$ となり、残りは、 a, b の順で二人。二人の場合、 $J_2 = 2$ であるから、2 番目の b が残る。したがって、 $J_3 = 2$ となる。
- $n = 4$ のとき、同様に、 $a, b, c, d, a, b, c, d, \dots$ とすれば、3 人目を取り除くと、 $a, b, \cancel{c}, d, a, b, \cancel{c}, d, \dots$ となり、残りは d, a, b の順で三人。三人の場合、 $J_3 = 2$ であるから、2 番目の a が残る。 a は 1 番目の人なので、 $J_4 = 1$ となる。

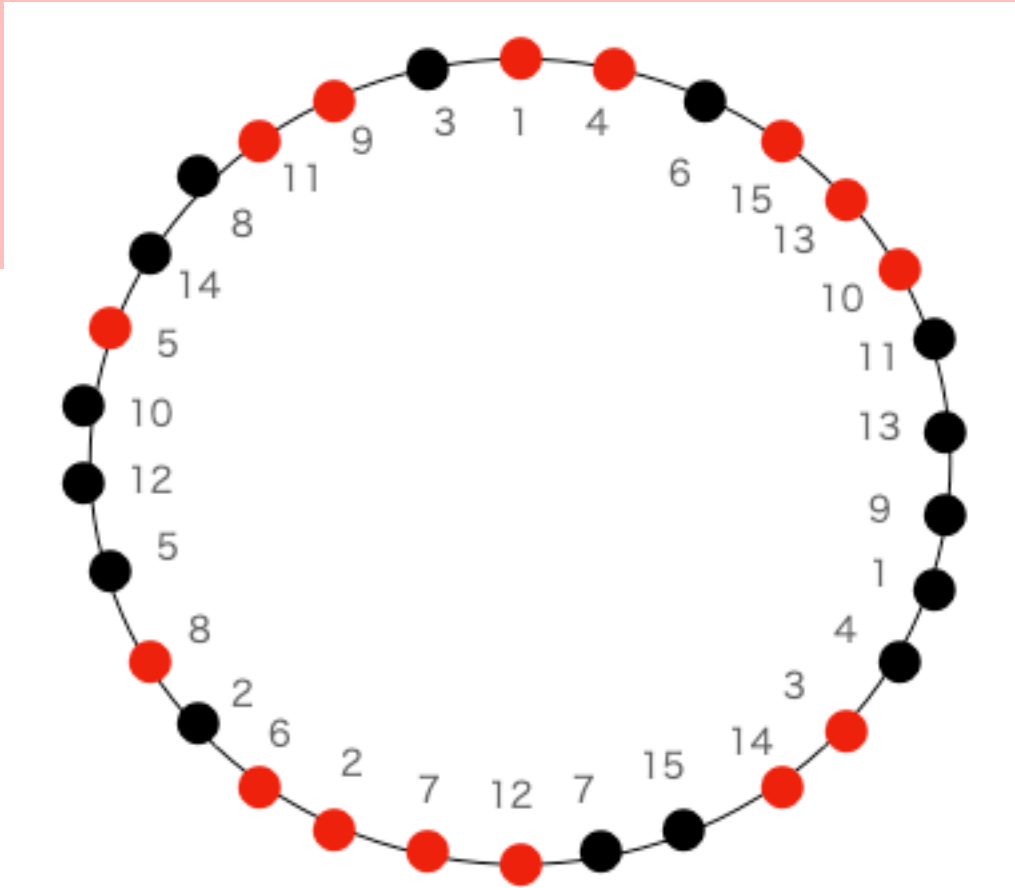
このようにして、残された列の何番目が最後まで残るか、と再帰的な形式で考えることができる。

1. (法とよぶ数) $n = 1, 2, 3, \dots$ を 1 行目に、脱数 m を 2 行目の各列に記せ。
2. (実とよぶ数+1) J_n とする数を 3 行目のはじめに、 $J_1 = 1$ と記入せよ。
3. $n \geq 2$ の J_n は、 $J_n = \text{mod}(m + J_{n-1}, n)$ である。この値がゼロのときは、 $J_n = n$ とせよ。
4. $J_n = 1$ となるときの n より、 $N = n - 1$ とすればそれが正限数である。

例えば、 $m = 3$ のときは、次の表になり、正限数は、 $N = 3, 5, 8, \dots$ ということになる。

法	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
脱数	m	3	3	3	3	3	3	3	3	3
実+1	J_n	1	2	2	1	4	1	4	7	1

再帰的方法を使わない J_n の導出



n 人が円形に並べられていて、 m 人ごとに取り除くとき、それぞれの人々がどの順で取り除かれるかを考えることで、漸化式を用いずに J_n を求めることができる。 $n = 6$ として $\{a, b, c, d, e, f\}$ としよう。 $m = 3$ の場合を考えよう。

- 3 人目を取り除くと、 $\{a, b, \cancel{c}, d, e, f\}$ となる。 c は 1 番目に取り除かれたので、 $c = 1$ とする。
- 残りの順 $\{d, e, f, a, b\}$ から 3 人目を取り除くと、 $\{d, e, \cancel{f}, a, b\}$ となる。 $f = 2$ とする。
- 残りの順 $\{a, b, d, e\}$ から 3 人目を取り除くと、 $\{a, b, \cancel{d}, e\}$ となる。 $d = 3$ とする。
- このような操作を続けると，

a	b	c	d	e	f
6	4	1	3	5	2

と対応する。 この 2 行目が $E_i^{(6,3)}$ である。
- 得られた順を入れ替える (inverse permutation) と、 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ に対応して $\{c, f, d, b, e, a\}$ となるので、最後に残されるのは a 。 したがって、 $J_6 = 1$ となる。

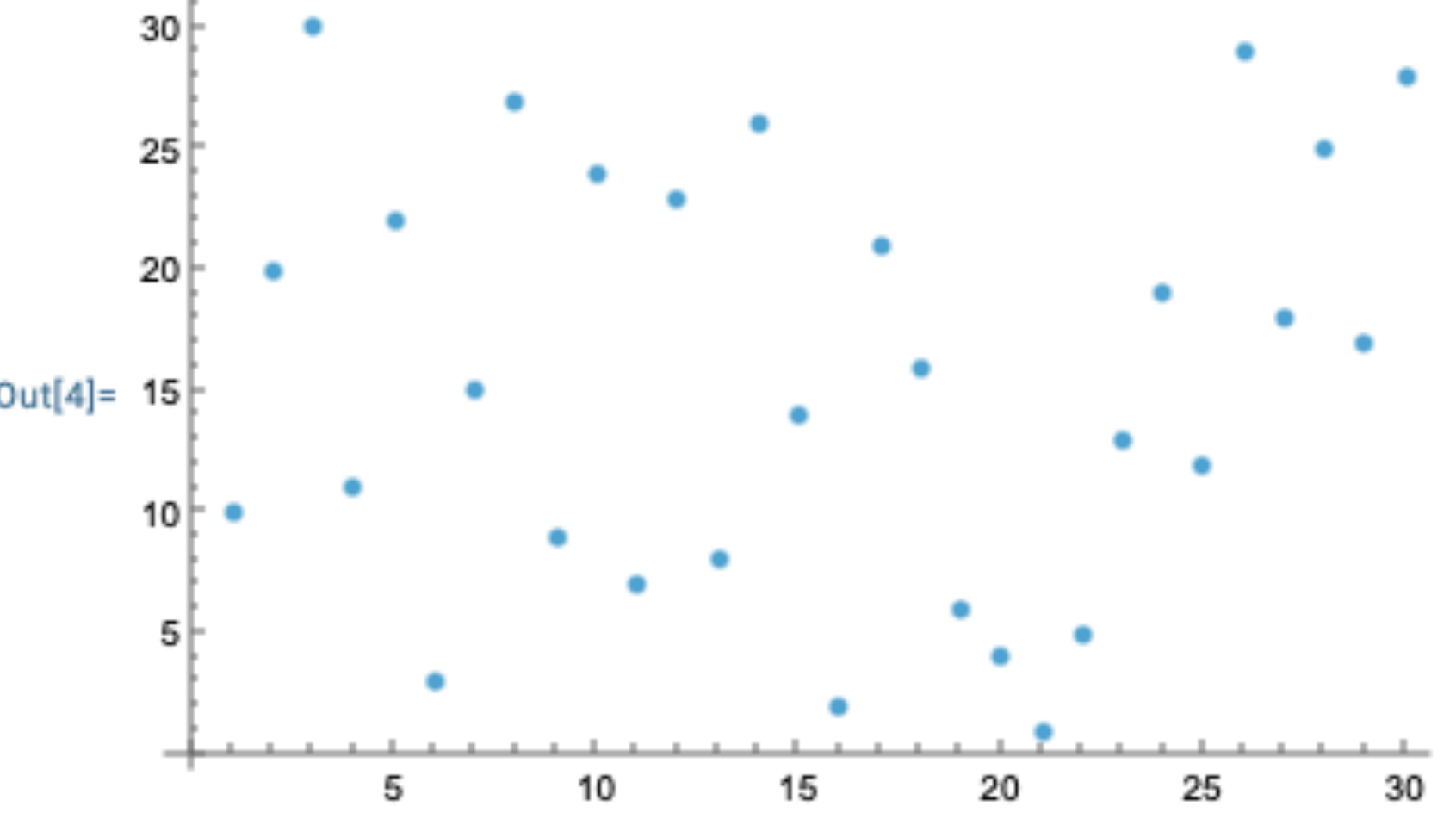
order of removal

```
In[2]:= Josephus[n_Integer, m_Integer] :=  
Block[{live = Range[n], next},  
InversePermutation[  
Table[  
next = RotateLeft[live, m - 1];  
live = Rest[next];  
First[next],  
{n}]]]
```

```
In[3]:= Josephus[30, 10]
```

```
Out[3]= {21, 16, 6, 20, 22, 19, 11, 13, 9, 1, 4, 25, 23,  
15, 7, 18, 29, 27, 24, 2, 17, 5, 12, 10, 28, 14, 8, 30, 26, 3}
```

```
In[4]:= ListPlot[InversePermutation[Josephus[30, 10]]]
```



S. スキエナ著, 植野義明訳『Mathematica 組み合わせ論とグラフ理論』
(アジソン ウェスレイ・トッパン, 1992)

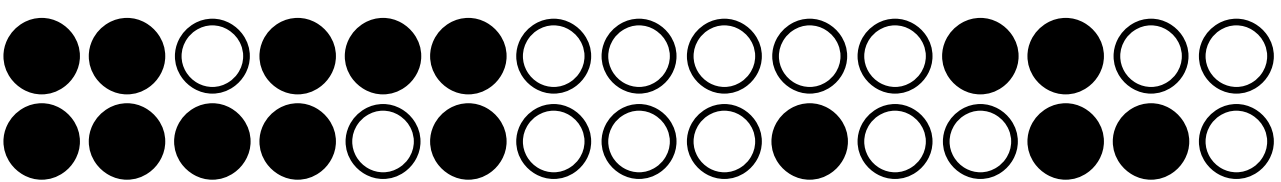
継子立て なぜ10脱か？ なぜ15+15人か



「算脱之法」に記載されている正限数の表（漢数字を算用数字に直し，列は左から並べた）

脱数	2	3	4	5	6	7	8	9	10
正限数	1	3	1	2	1	22	1	90	1
同	3	5	4	5	2	49	4	145	15
同	7	8	8	11	7	92	9	207	21
同	15	30	11	14	13	234	19	233	70
同	31	69	15	36	73	319	29	474	226

15+15人で10脱



$E_i^{(30,10)} = \{21, 16, 6, 20, 22, 19, 11, 13, 9, 1, 4, 25, 23, 15, 7, 18, 29, 27, 24, 2, 17, 5, 12, 10, 28, 14, 8, 30, 26, 3\}$

5+5人で3脱

$E_i^{(10,3)} = \{6, 4, 1, 10, 8, 2, 5, 7, 3, 9\}$ より
○●●○●●○●○ {1, 2, 2, 2, 1, 1, 1}

5+5人で5脱

$E_i^{(10,5)} = \{7, 4, 10, 8, 1, 3, 9, 6, 5, 2\}$ より
○●○●●○●● {1, 1, 2, 2, 2, 2}

4+5人で3脱

$E_i^{(9,3)} = \{9, 7, 1, 4, 6, 2, 8, 5, 3\}$ より
○●●○●○●○● {2, 2, 1, 1, 2, 1}

5+4人で4脱

$E_i^{(9,4)} = \{9, 8, 3, 1, 6, 5, 7, 2, 4\}$ より
○●●○●○●● {2, 2, 1, 1, 1, 2}

3+3人で3脱

$E_i^{(6,3)} = \{6, 4, 1, 3, 5, 2\}$ より
○●●○● {2, 2, 1, 1}

4+4人で4脱

$E_i^{(8,4)} = \{5, 4, 6, 1, 3, 8, 7, 2\}$ より
○●○●●○● {1, 1, 1, 2, 2, 1}

ヨセフスの問題 (Josephus problem)

ローマ時代の内乱期, ユダヤ人の反乱グループ41人は洞窟に閉じ込められ, 敗北が明らかになったので自害することにした. 当時の監修により, 全員が円形に並び, 3人ごとに処刑することになった. そのうちの一人ヨセフスは, 腹心の部下とともにどこに立てば最後の二人になるかを素早く計算した.

Josephus, The Jewish War??

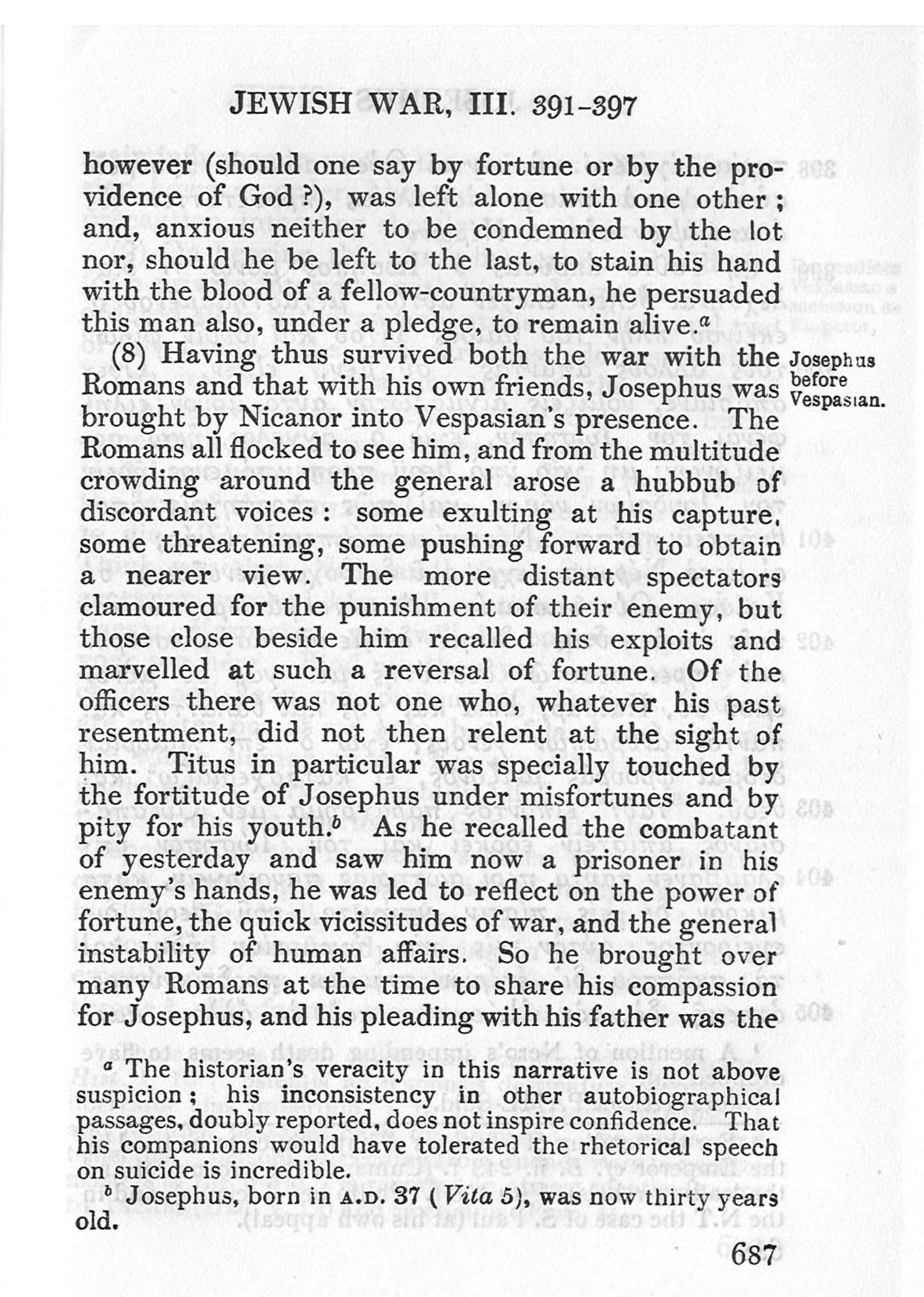
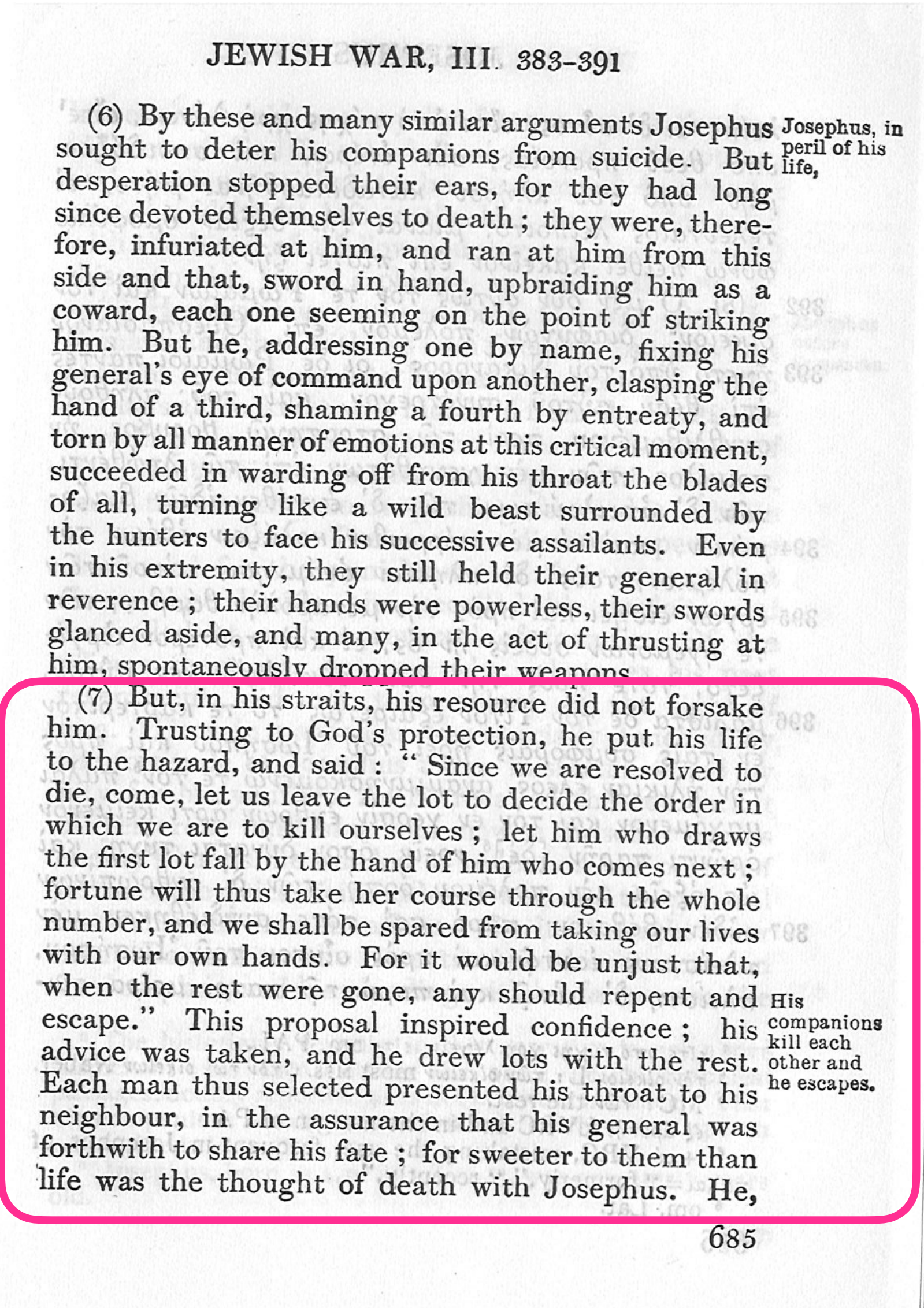
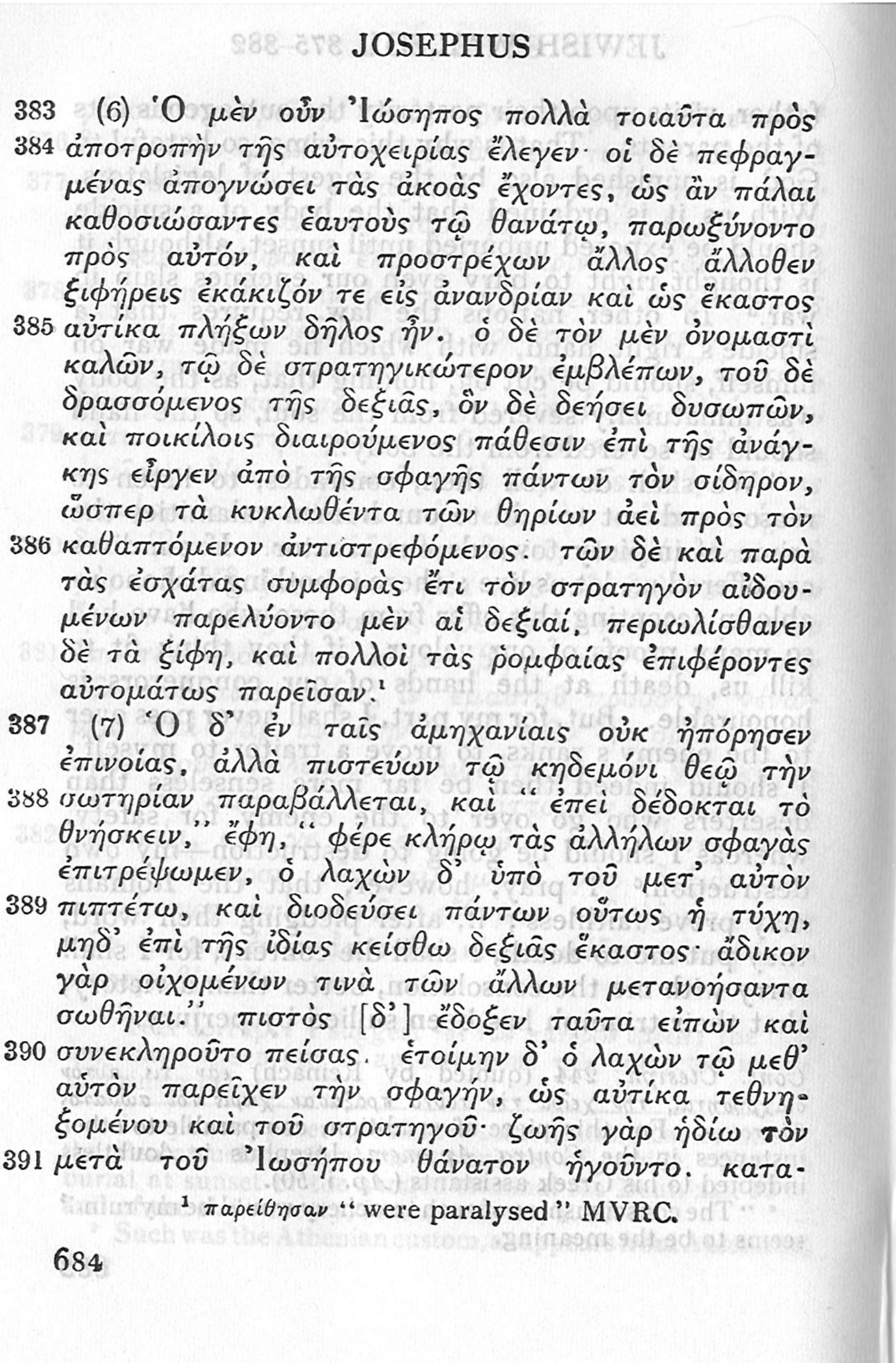
41人の3脱

During the Roman civil wars, a group of **forty-one** Jewish rebels found themselves trapped in a cave; realizing defeat was inevitable, they resolved to take their own lives. According to the agreed-upon procedure, they arranged themselves in a circle and executed **every third person**. One of them, Josephus, quickly calculated—along with his trusted lieutenant—exactly where they needed to stand to be the last two remaining.

出典不明

ヨセフスの問題 (Josephus problem)

Josephus, The Jewish War



ヨセフス問題を扱った西洋の書 Variations of Josephus problem

表 2: ヨセフス問題の設定の例. 三浦 [14] を参考に作成. n は総人数, m は脱数 (何人おきに取り除くか), C/J/T/M はキリスト教徒, ユダヤ人, トルコ人, イスラム教徒を示す. 「C15+J15」はキリスト教徒 15 人とユダヤ人 15 人がいるとき, キリスト教徒のみ残る問題, という意味.

		n	m
1150 頃	エズラ (Rabbi Abraham ben Ezra, 1546 年出版)	学生 15+ 怠け者 15	9
1363	サファディ (Salah al-Din al-Safadi)	M15+C15	9
15c	カランドリ (Filippo Calandri)	C15+J15	
1465 頃	フィレンツェ (Benedetto da Firenze)	C15+J15	9
1484 頃	シュケ (Nicolas Chuquet)	C15+J15	9
1485 頃	カランドリ	修道士 15+15	9
1500 頃	パチョーリ (Luca Pacioli)	C2+J30	9
1500 頃	パチョーリ	C2+J18	7
1500 頃	パチョーリ	C2+J30	7
1500 頃	パチョーリ	C15+J15	9
1539	カルダーノ (Gerolamo Cardano)	黒 + 白	
1556	タルターリャ (Niccolo Fontana Tartaglia)	C+T, 黒 + 白	
1559	ブテオ (Johannes Buteo)	C15+J15	10
1612	バシエ (Claude-Gasper Bachet)	C15+T15	
1624	エッテン (Hendrik van Etten)	C15+T15	9
1678	ヴィンゲイト (Edmund Wingate)	C15+T15	
1725	オザナム (Jacques Ozanam)	C15+T15	9

by Nobuo Miura
2023



ヨセフスの問題 (Josephus problem)

15人のキリスト教徒と15人のトルコ人が同じ船で航海していた。激しい嵐に遭遇したため、水先案内人は船に乗っていた人々の半分を海に投げ込み、残りの人々を救う必要があると言った。これは力づくでしかできない。そこで、全員を順番に配置し、9ずつ数えて9人目を海に投げ込むことで合意した。30人のうち15人だけが残るようにする。キリスト教徒を一人も失うことなくトルコ人を全員投げ込むにはどのように並べるべきか。

Fifteen Christians and fifteen Turks were sailing on the same ship. When they encountered a violent storm, the pilot declared that half of the people on board had to be thrown into the sea to save the rest. Since this had to be done by force, they agreed to arrange everyone in a sequence, count off by nines, and throw the ninth person into the sea. The goal was to ensure that only fifteen of the thirty people remained. How should they be arranged so that all the Turks are thrown overboard without losing a single Christian?

15 + 15 人の 9 脱であり、取り除かれる順は、

$$E_i^{(30,9)} = \{23, 20, 28, 24, 14, 4, 7, 12, 1, 19, 16, 10, 26, 27, 25, 5, 18, 2, 8, 29, 30, 13, 15, 11, 22, 6, 3, 21, 17, 9\}$$

となるから、トルコ人を●、キリスト教徒を○とすれば、

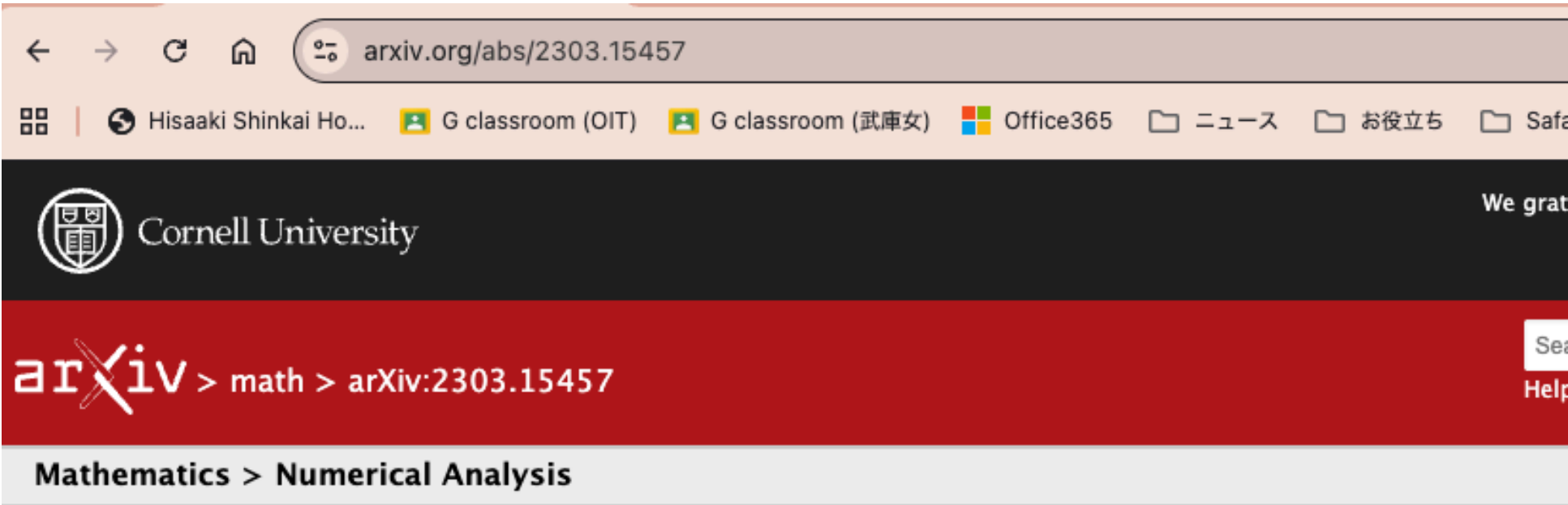
○○○○●●●●●○○●○○○●○●●
○○●●●○●●○○●となり、並べ順は
 $\{4, 5, 2, 1, 3, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 1\}$ となる⁹。

母音a,e,i,o,u をそれぞれ1,2,3,4,5 と対応させて、

“From numbers' aid and art, never will fame depart” (数の助けと技術によって名誉は去らない)。
4 5 2 1 3 1 1 2 2 3 1 2 2 1

Claude-Gasper Bachet (1581-1638) による『Problemes plaisants et d'electables qui se font par les nombres. 2nd ed.』(1624)

Josephus problem



Analytical Study and Efficient Evaluation of the Josephus Function

Yunier Bello-Cruz, Roy Quintero-Contreras

A new approach to analyzing intrinsic properties of the Josephus function, J_k , is presented in this paper. The linear structure between extreme points of J_k is fully revealed, leading to the design of an efficient algorithm for evaluating $J_k(n)$. Algebraic expressions that describe how recursively compute extreme points, including fixed points, are derived. The existence of consecutive extreme and also fixed points for all $k \geq 2$ is proven as a consequence, which generalizes Knuth result for $k = 2$. Moreover, an extensive comparative numerical experiment is conducted to illustrate the performance of the proposed algorithm for evaluating the Josephus function compared to established algorithms. The results show that the proposed scheme is highly effective in computing $J_k(n)$ for large inputs.

Subjects: Numerical Analysis (math.NA)
MSC classes: 65Q30, 11Y55, 11B50
Cite as: arXiv:2303.15457 [math.NA]
(or arXiv:2303.15457v2 [math.NA] for this version)
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.15457>

は、最後に残る人 (survivor) を $J_m(n)$ とする (例えば [12])。オイラーが扱ったのは、もう一人追加したときに、その人が最後に残る場合は何か、という設定である。最後の一人を含めて n 人とすれば、

$$J_m(n) = n$$

となる (m, n) は何か、という問題になる。現在では、この n を J_m の fixed point と呼んでいる。

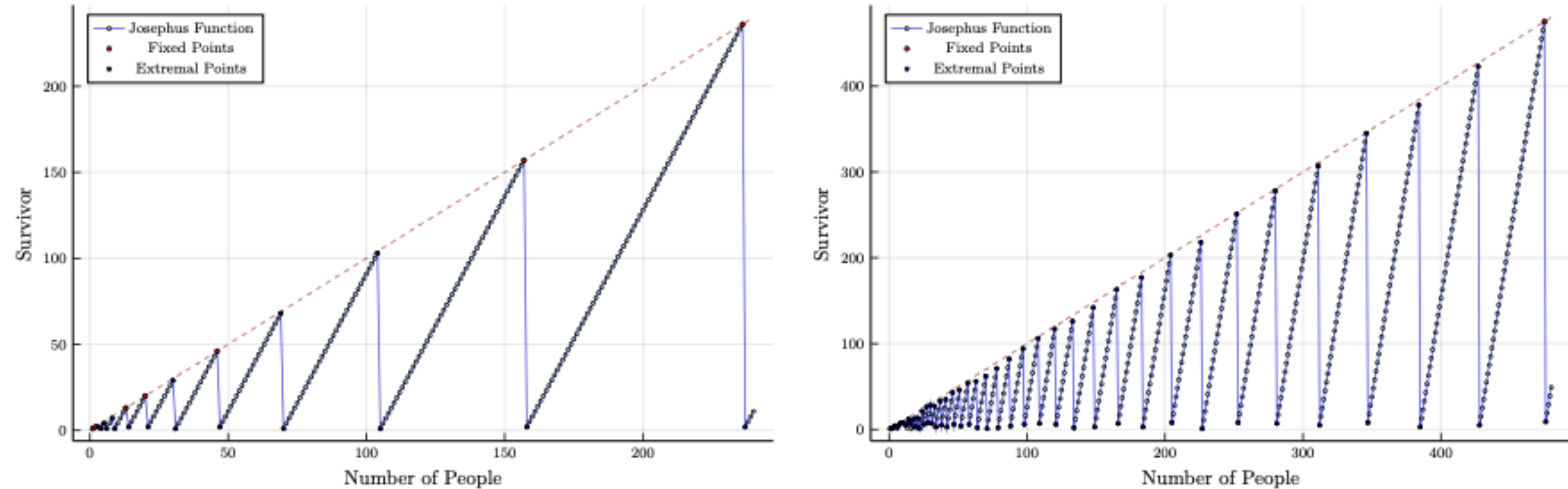
Definition 1 (Fixed and Extremal points). A *fixed point* of J_k is a value n_p such that $n_p = J_k(n_p)$. Additionally, an *extremal point* n_e is defined as a point that satisfies either $J_k(n_e) \in [[1, k - 1]]$ or $J_k(n_e) \in [[n_e - k + 2, n_e]]$. If $J_k(n_e) \in [[1, k - 1]]$, we refer to n_e as a *low extremal point*. On the other hand, if $J_k(n_e) \in [[n_e - k + 2, n_e]]$, we refer to n_e as a *high extremal point*.

Note that, a fixed point n_p is also a high extremal point because $J_k(n_p) = n_p$. However, there are high extremal points that are not fixed points; see Figure 1 below.

2 Properties of the Josephus Function

In this section, we begin by recalling a recursive formula, which first appeared in Euler’s paper [6, & 8, pp. 130-131] and establishes a way of determining $J_k(n + 1)$ in terms of $J_k(n)$.

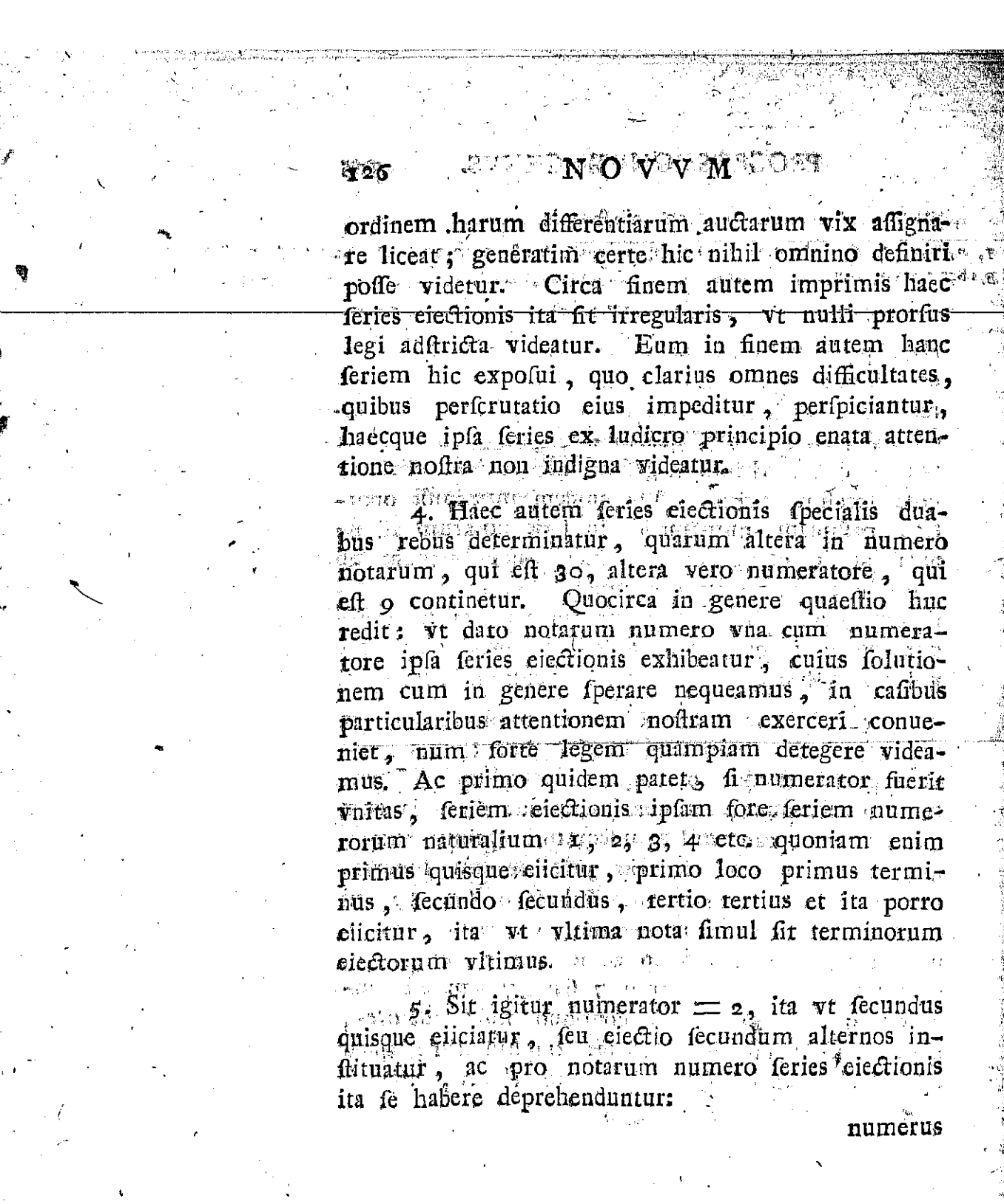
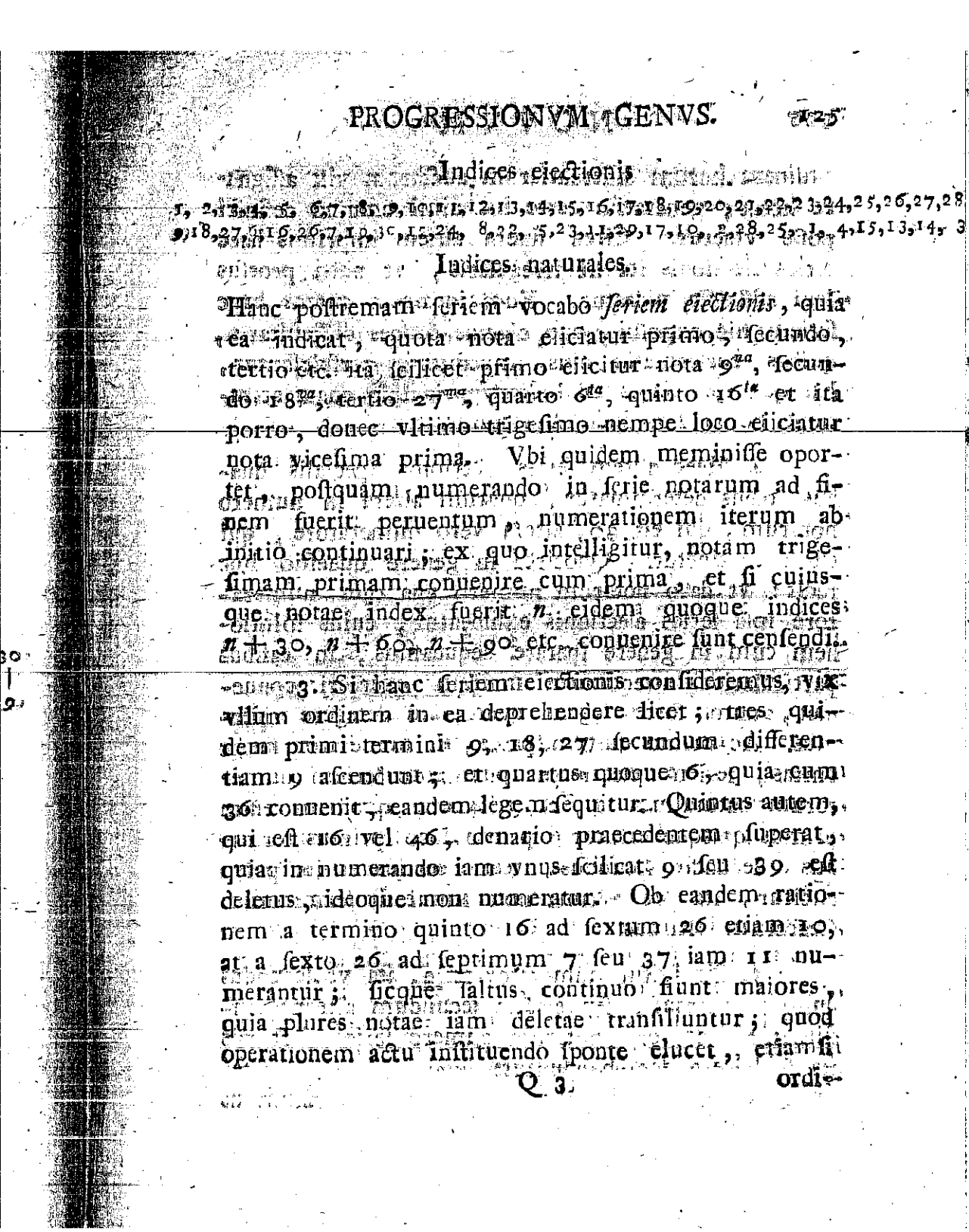
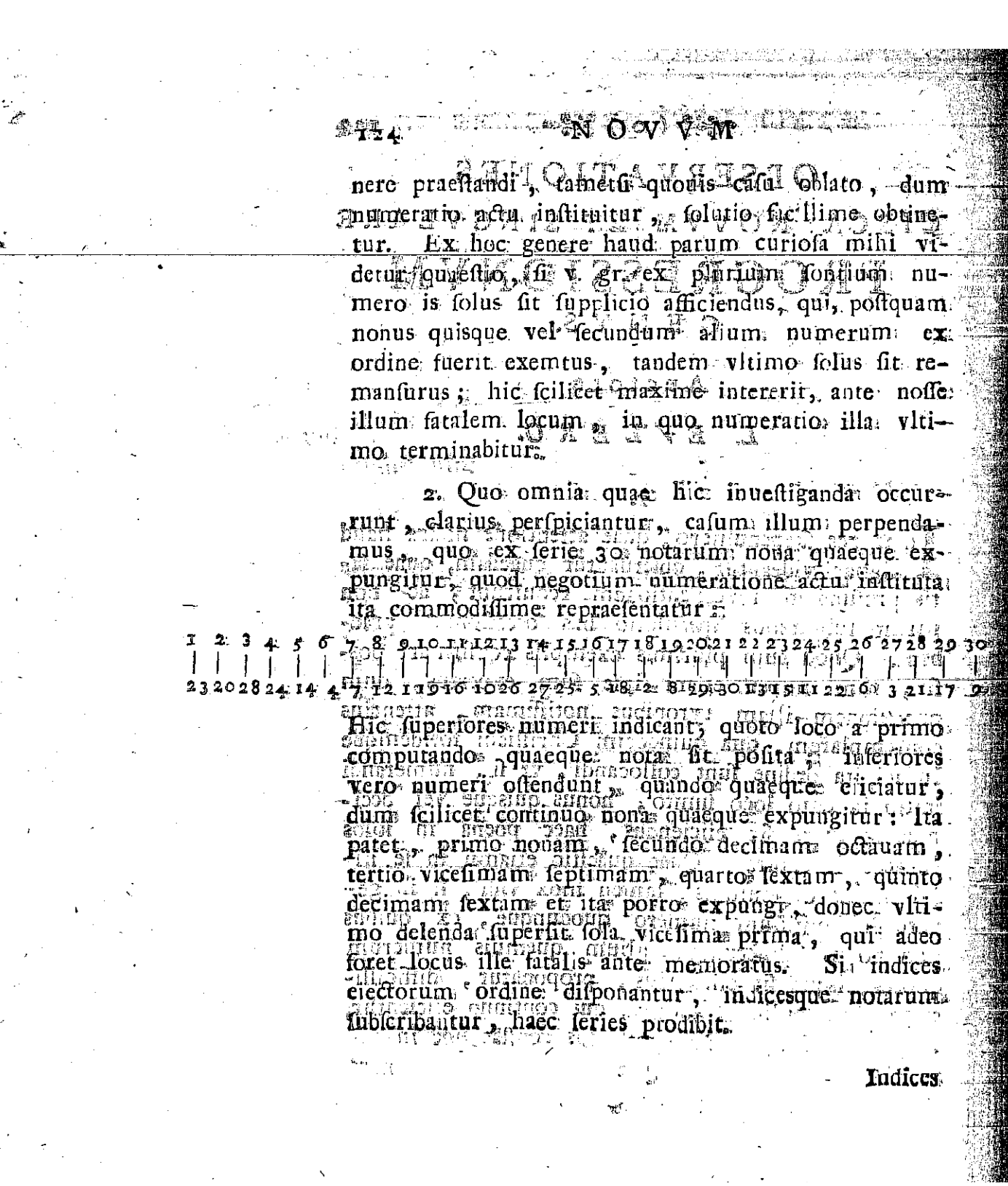
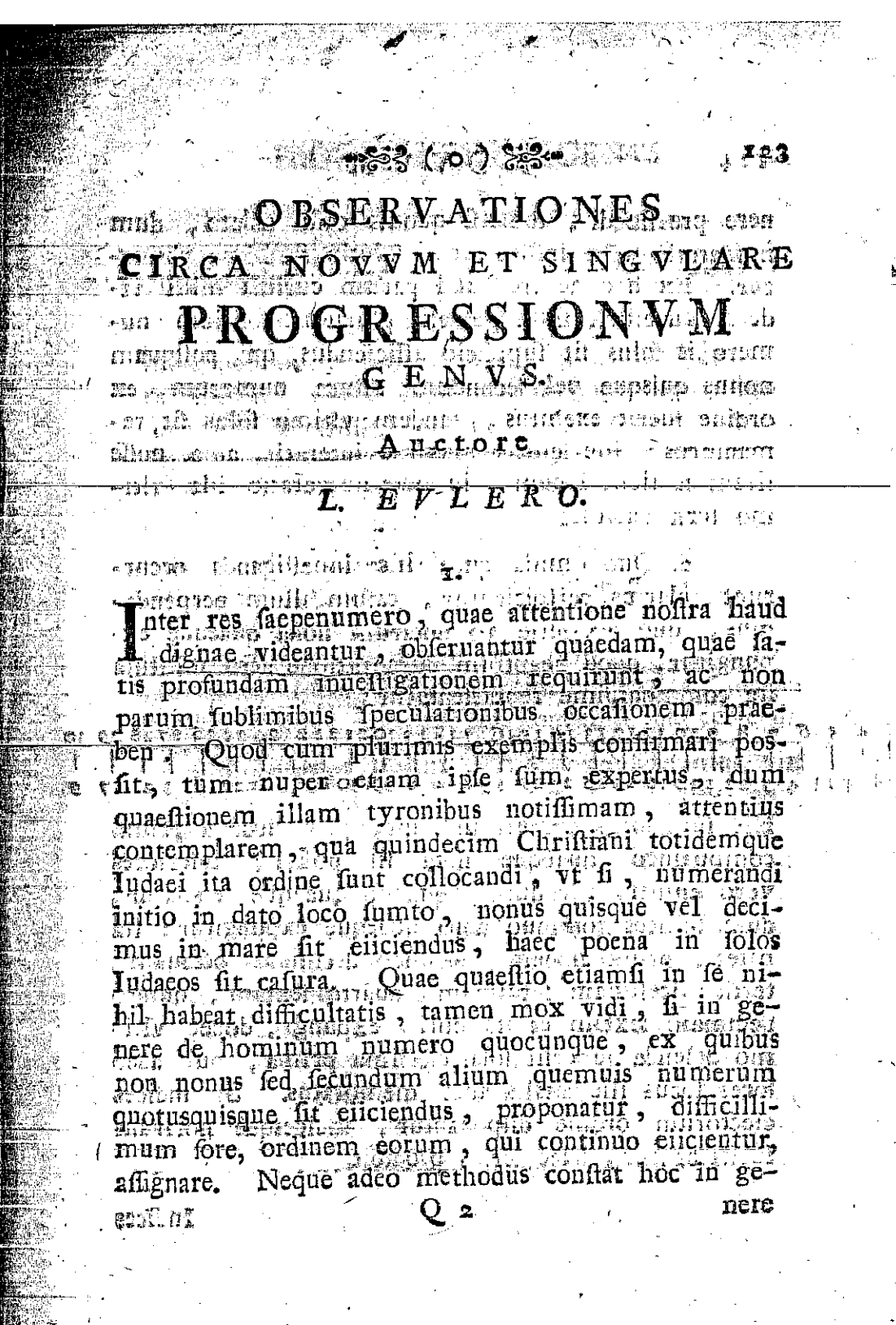
Theorem 2 (Euler’s formula). *Let $k \geq 2$ and denote $p := J_k(n)$. Then, $J_k(n + 1) = p + k - \ell(n + 1)$, if $p + k \in [[\ell(n + 1) + 1, (\ell + 1)(n + 1)]]$ for some non-negative integer ℓ .*



(a) Graph of $J_3(n)$ for $n \leq 240$

(b) Graph of $J_{10}(n)$ for $n \leq 480$

Figure 1: Graphs of the Josephus functions J_3 and J_{10}



Latin (original)	English translation	日本語訳
Title / Header		
OBSERVATIONES CIRCA NOVUM ET SINGVLARE PROGRESSIONVM GENVS	Observations on a New and Singular Kind of Progression	新奇にして特異な数列の一種についての観察
Auctore L. EVLERO.	By L. Euler	著者 L. オイラー
(Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Vol. 20 (1775), 1776, pp. 123-139. Eneström E476.)	(Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Vol. 20 (1775), 1776, pp. 123-139. Eneström E476. English translation of the Latin original.)	(『ペテルブルク帝国科学アカデミー新紀要』第 20 巻 (1775 年), 1776 年刊, pp. 123-139. エネストレム 番号 E476. ラテン語原文からの日本語訳.)
p. 123		
1. Inter res saepenumero, quae attentione nostra haud dignae videantur, observantur quaedam, quae satis profundam investigationem requirunt, ac non parum sublimibus speculationibus occasionem praebent. Quod cum plurimis exemplis confirmari possit, tum nuper etiam ipse sum expertus, dum quaestionem illam tyronibus notissimam, attentius contemplerer, qua quindecim Christiani totidemque Iudaei ita ordine sunt collocandi, ut si, numerandi initio in dato loco sumto, nonus quisque vel decimus in mare sit eiciendus, haec poena in solos Iudaeos sit casura. Quae quaestio etiamsi in se nihil habeat difficultatis, tamen mox vidi, si in genere de hominum numero quocunque, ex quibus non nonus sed secundum alium quemvis numerum quotusquisque sit eiciendus, proponatur, difficillimum fore, ordinem eorum, qui continuo eicientur, assignare. Neque adeo methodus constat hoc in ge-	1. Among the things which, though they often seem unworthy of our attention, are nevertheless observed to require rather profound investigation and to offer no small occasion for lofty speculation — that this can be confirmed by very many examples I myself have lately experienced, when I looked more closely at that question, well known to beginners, in which fifteen Christians and as many Jews are to be arranged in a circle in such an order that, if the counting begins at a given place, every ninth (or every tenth) person is to be thrown into the sea, this penalty falling only upon the Jews. Although this question in itself presents no difficulty, I soon saw that if, in general, for any number of people whatsoever, it is proposed that not every ninth but every some-other given number be removed in turn, it would be extremely difficult to assign the order of those who are successively removed. Nor indeed is any method available in this	1. 私たちの注意を引くに値しないと思われがちな事 柄の中にも, かなり深い考察を要し, かつ高尚な思索 の機会を少なからず与えてくれるものが見出されるこ とがある. このことは実に多くの例によって裏付けら れるが, 私自身も最近, 初学者によく知られたあの問 題 — すなわち, 15 人のキリスト教徒と同数のユダ ヤ教徒を円形に並べ, ある場所から数え始めて 9 番目 (あるいは 10 番目) ごとに海に投げ込むとき, この罰 が必ずユダヤ教徒だけに当たるように配置する, とい う問題 — を注意深く検討していたときに, これを痛 感した. この問題自体には何ら難しいところはないの だが, 私はすぐに気づいた. もし一般に, 任意の人数 について, 9 番目ごとではなく他の任意に定めた数ご とに順次除いていくとするならば, 順次除かれていく 者たちの順序を求めることは極めて困難であろう, と. しかもこの種の

L. Euler, "a New & Singular Kind of Progression"

表2 「算脱之法」の計算例. 脱数 m が 3 の場合で, $J_n = 1$ となる $n = 4, 6, 9, \dots$ となることから, 正限数は, $N = n - 1 = 3, 5, 8, \dots$ と求められる.

法	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
脱数	m	3	3	3	3	3	3	3	3	3
実+1	J_n	1	2	2	1	4	1	4	7	1

◀ finalist

numerus notarum	series electionis pro numeratore 2
1	1
2	2, 1
3	2, 1, 3
4	2, 4, 3, 1
5	2, 4, 1, 5, 3
6	2, 4, 6, 3, 1, 5
7	2, 4, 6, 1, 5, 3, 7
8	2, 4, 6, 8, 3, 7, 5, 1
9	2, 4, 6, 8, 1, 5, 9, 7, 3
10	2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, 5
11	2, 4, 6, 8, 10, 1, 5, 9, 3, 11, 7
12	2, 4, 6, 8, 10, 12, 3, 7, 11, 5, 1, 9
13	2, 4, 6, 8, 10, 12, 1, 5, 9, 13, 7, 3, 11
14	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 3, 7, 11, 1, 9, 5, 13
15	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 1, 5, 9, 13, 3, 11, 7, 15
16	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 3, 7, 11, 15, 5, 13, 9, 1

the order to be picked up.

the case for $m=2$

numerus notarum	series electionis pro numeratore 3
1	1
2	1, 2
3	3, 1, 2
4	3, 2, 4, 1
5	3, 1, 5, 2, 4
6	3, 6, 4, 2, 5, 1
7	3, 6, 2, 7, 5, 1, 4
8	3, 6, 1, 5, 2, 8, 4, 7
9	3, 6, 9, 4, 8, 5, 2, 7, 1
10	3, 6, 9, 2, 7, 1, 8, 5, 10, 4
11	3, 6, 9, 1, 5, 10, 4, 11, 8, 2, 7
12	3, 6, 9, 12, 4, 8, 1, 7, 2, 11, 5, 10
13	3, 6, 9, 12, 2, 7, 11, 4, 10, 5, 1, 8, 13
14	3, 6, 9, 12, 1, 5, 10, 14, 7, 13, 8, 4, 11, 2
15	3, 6, 9, 12, 15, 4, 8, 13, 2, 10, 1, 11, 7, 14, 5
16	3, 6, 9, 12, 15, 2, 7, 11, 16, 5, 13, 4, 14, 10, 1, 8

the order to be picked up.

the case for $m=3$

n 人を円形にならべ, 2脱していくとき, 取り除かれる順は?

n 人を円形にならべ, 3脱していくとき, 取り除かれる順は?

最後が1になる場合が, 継子立て設定(算脱之法)になる.

オイラー 再帰的方法

L. Euler, Observationes circa novum et singulare progressionum genus. Euler Archive -- All Works. 476, 1776.

numerus notarum	series electionis pro numeratore 4
1	1
2	2, 1
3	1, 3, 2
4	4, 1, 3, 2
5	4, 3, 5, 2, 1
6	4, 2, 1, 3, 6, 5
7	4, 1, 6, 5, 7, 3, 2
8	4, 8, 5, 2, 1, 3, 7, 6
9	4, 8, 3, 9, 6, 5, 7, 2, 1
10	4, 8, 2, 7, 3, 10, 9, 1, 6, 5
11	4, 8, 1, 6, 11, 7, 3, 2, 5, 10, 9
12	4, 8, 12, 5, 10, 3, 11, 7, 6, 9, 2, 1
13	4, 8, 12, 3, 9, 1, 7, 2, 11, 10, 13, 6, 5
14	4, 8, 12, 2, 7, 13, 5, 11, 6, 1, 14, 3, 10, 9
15	4, 8, 12, 1, 6, 11, 2, 9, 15, 10, 5, 3, 7, 14, 13
16	4, 8, 12, 16, 5, 10, 15, 6, 13, 3, 14, 9, 7, 11, 2, 1
	etc.

8. En ergo insignem legem, cuius ope pro quouis numeratore et notarum numero, nota ultimo eiicienda assignari potest. Existente scilicet numeratore = n , si pro notarum numero ν ultima eiicienda sit z , seu indici z respondeat, tum pro numero notarum $\nu + 1$, ultima eiicienda erit $z + n$, siquidem non sit $z + n > \nu + 1$; at si $z + n > \nu + 1$, ultima erit $z + n - \nu - 1$ vel $z + n - 2(\nu + 1)$ vel $z + n - 3(\nu + 1)$, vel generatim diuidendo $z + n$ per $\nu + 1$, residuum ex diuisione relictum dabit indicem ultimae notae eiiciendae. Vbi notetur, si diuisio nihil reliquat, tum pro residuo 0 scribi notarum numerum $\nu + 1$. Cum ergo pro numero notarum n cognita fuerit ultimo eiecta, pro omnibus notarum numeris maioribus ultimo eiecta facile per hanc regulam assignabitur. Perpetuo autem si vnica fuerit nota, eadem quoque erit ultimo eiecta, seu si fuerit $\nu = 1$, erit $z = 1$, vnde sequentes omnes sine vilo negotio reperiuntur. Quae regula eo magis est notatu digna, quod sine electionis or-

n人を円形にならべ, 4脱していくとき, 取り除かれる順は？

最後が1になる場合が, 継子立て設定(算脱之法)になる.

最後に残る人 (survivor) を $J_m(n)$ とする

$$J_m(n) = p \text{ とする.}$$

$$J_m(n + 1) = \begin{cases} p + m, & \text{if } p + m \leq n + 1 \\ p + m - (n + 1), & \text{if } p + m > n + 1 \end{cases}$$

$J_m(n)$ の求め方として, オイラーは, 次のように考えた.

オイラー 再帰的方法

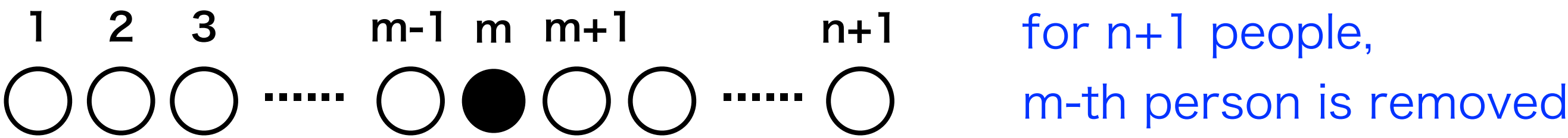
L. Euler, Observationes circa novum et singulare progressionum genus. Euler Archive -- All Works. 476, 1776.

$J_m(n)$ の求め方として、オイラーは、次のように考えた。

- (1) $n + 1$ 人に対して m 人ごとの取り除きをすることを考える。まず、一人目を取り除いたとする。 $m < n + 1$ であれば、

$$i = \{1, 2, 3, \dots, m - 1, \cancel{m}, m + 1, \dots, n + 1\}$$

の取り除きが行われる。



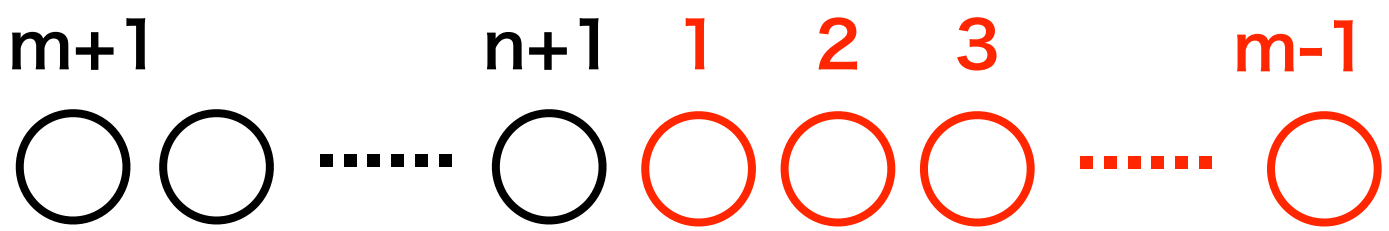
- (2) $i = 1, \dots, m - 1$ を取り除き、順の最後に移行する。その際に連番となるように $n + 1$ を加算して再度番号づけをする。すなわち

$$i = \{m + 1, \dots, n + 1, n + 2, n + 3, \dots, n + m\}$$

これは、 n 人に対して m 人ごとの取り除きをする問題

$$i = \{1, \dots, n\}$$

と同じになる。



8. En ergo insignem legem, cuius ope pro quouis numeratore et notarum numero, nota ultimo eiicienda assignari potest. Existente scilicet numeratore $= n$, si pro notarum numero ν ultima eiicienda sit z , seu indici z respondeat, tum pro numero notarum $\nu + 1$, ultima eiicienda erit $z + n$, siquidem non sit $z + n > \nu + 1$; at si $z + n > \nu + 1$, ultima erit $z + n - \nu - 1$ vel $z + n - 2(\nu + 1)$ vel $z + n - 3(\nu + 1)$, vel generatim diuidendo $z + n$ per $\nu + 1$, residuum ex diuisione relictum dabit indicem ultimae notae eiiciendae. Vbi notetur, si diuisio nihil reliquat, tum pro residuo 0 scribi notarum numerum $\nu + 1$. Cum ergo pro numero notarum n cognita fuerit ultimo eiecta, pro omnibus notarum numeris maioribus ultimo eiecta facile per hanc regulam assignabitur. Perpetuo autem si unica fuerit nota, eadem quoque erit ultimo eiecta, seu si fuerit $\nu = 1$, erit $z = 1$, vnde sequentes omnes sine vilo negotio reperiuntur. Quae regula eo magis est notatu digna, quod sine electionis or-

最後に残る人 (survivor) を $J_m(n)$ とする

$J_m(n) = p$ とする。

$$J_m(n + 1) = \begin{cases} p + m, & \text{if } p + m \leq n + 1 \\ p + m - (n + 1), & \text{if } p + m > n + 1 \end{cases}$$

Mamakodate problem & Josephus problem

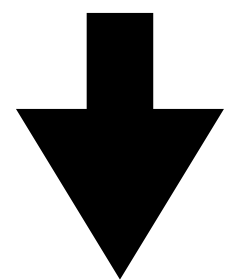
継子立て問題とヨセフスの問題

継子立て問題



吉田光由『塵劫記』 (after 1631 ed.)

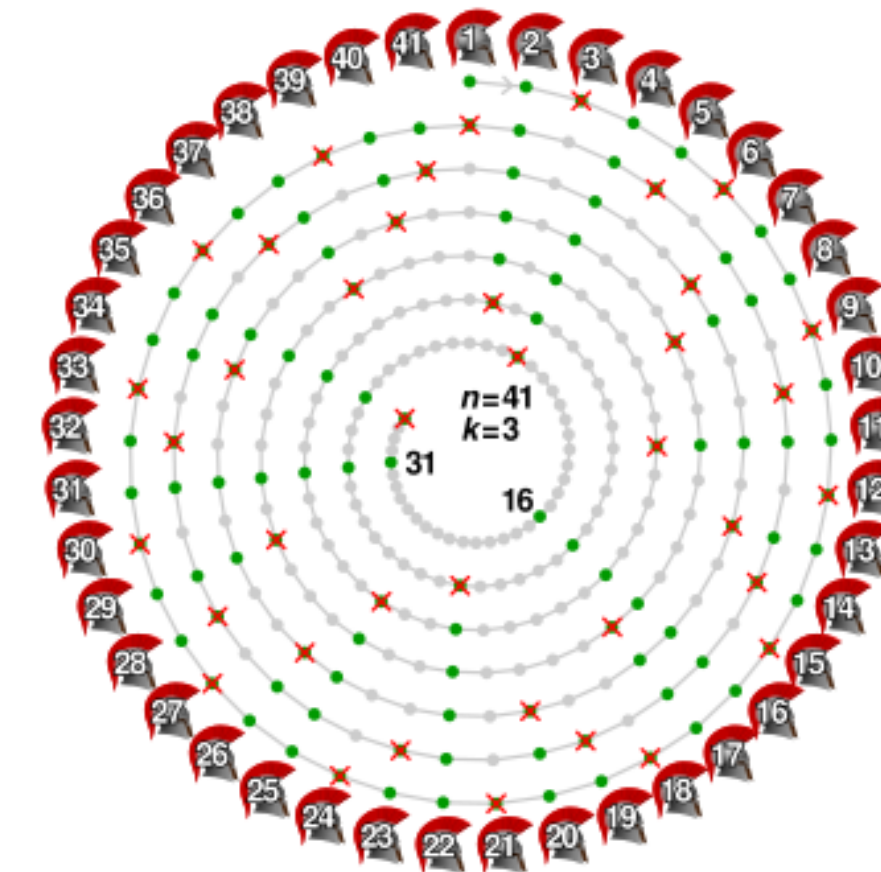
YOSHIDA Mitsuyoshi 『Jinkouki』



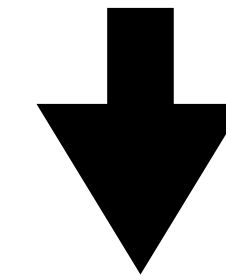
関孝和編 『算脱之法』 (1683)

SEKI Takakazu ed. 『Sandatsu no hou』

Josephus problem



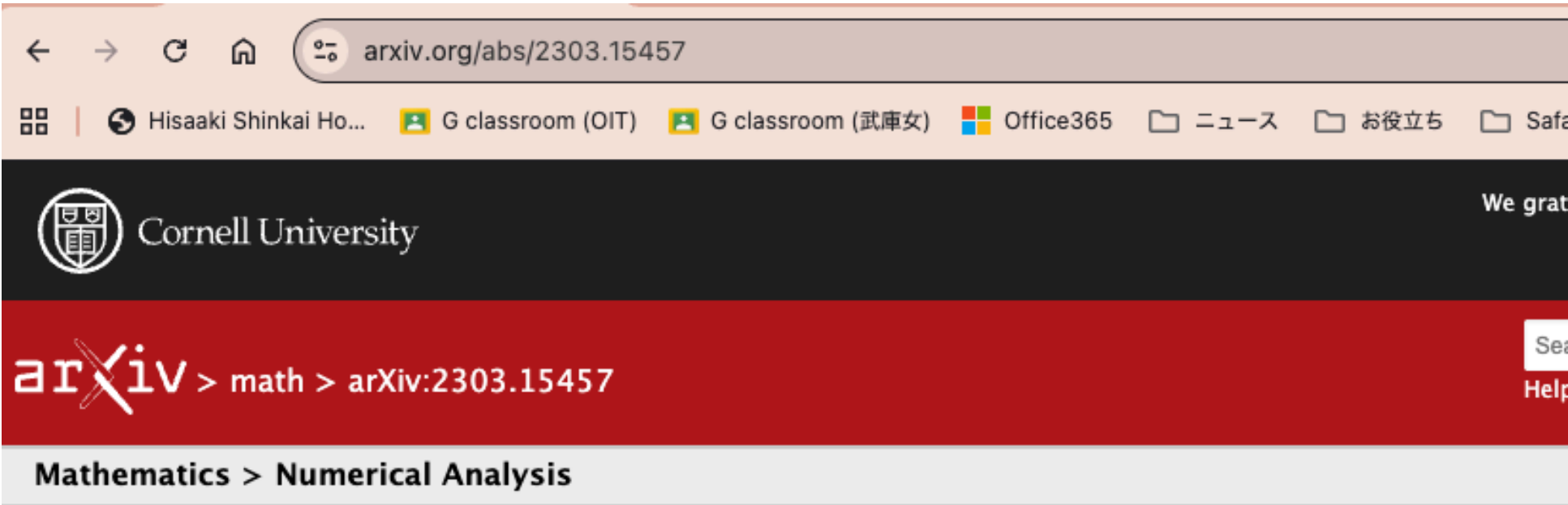
Flavius Josephus at Siege of Yodfat, 67



オイラー 『新しく発見された特異な数列』 (1776)

Euler 『a New and Singular kind of Progression』

Josephus problem



Analytical Study and Efficient Evaluation of the Josephus Function
Yunier Bello-Cruz, Roy Quintero-Contreras

A new approach to analyzing intrinsic properties of the Josephus function, J_k , is presented in this paper. The linear structure between extreme points of J_k is fully revealed, leading to the design of an efficient algorithm for evaluating $J_k(n)$. Algebraic expressions that describe how recursively compute extreme points, including fixed points, are derived. The existence of consecutive extreme and also fixed points for all $k \geq 2$ is proven as a consequence, which generalizes Knuth result for $k = 2$. Moreover, an extensive comparative numerical experiment is conducted to illustrate the performance of the proposed algorithm for evaluating the Josephus function compared to established algorithms. The results show that the proposed scheme is highly effective in computing $J_k(n)$ for large inputs.

Subjects: Numerical Analysis (math.NA)
MSC classes: 65Q30, 11Y55, 11B50
Cite as: arXiv:2303.15457 [math.NA]
(or arXiv:2303.15457v2 [math.NA] for this version)
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.15457>

は、最後に残る人 (survivor) を $J_m(n)$ とする (例えば [12])。オイラーが扱ったのは、もう一人追加したときに、その人が最後に残る場合は何か、という設定である。最後の一人を含めて n 人とすれば、

$$J_m(n) = n$$

となる (m, n) は何か、という問題になる。現在では、この n を J_m の fixed point と呼んでいる。

Definition 1 (Fixed and Extremal points). A *fixed point* of J_k is a value n_p such that $n_p = J_k(n_p)$. Additionally, an *extremal point* n_e is defined as a point that satisfies either $J_k(n_e) \in [[1, k - 1]]$ or $J_k(n_e) \in [[n_e - k + 2, n_e]]$. If $J_k(n_e) \in [[1, k - 1]]$, we refer to n_e as a *low extremal point*. On the other hand, if $J_k(n_e) \in [[n_e - k + 2, n_e]]$, we refer to n_e as a *high extremal point*.

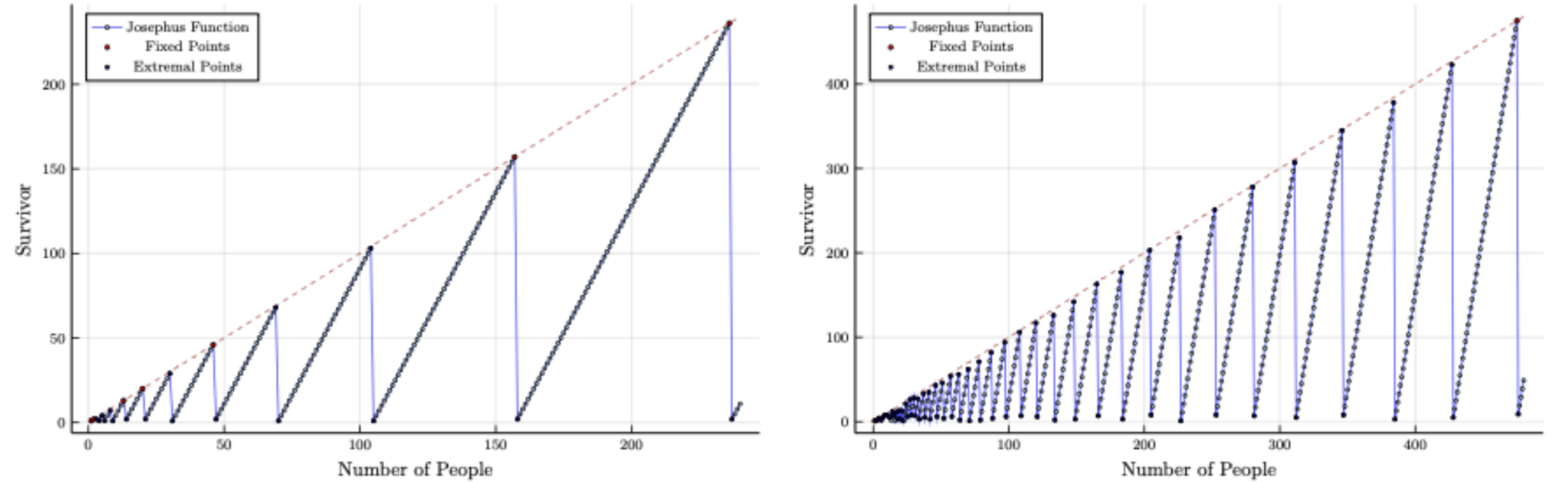
Note that, a fixed point n_p is also a high extremal point because $J_k(n_p) = n_p$. However, there are high extremal points that are not fixed points; see Figure 1 below.

2 Properties of the Josephus Function

In this section, we begin by recalling a recursive formula, which first appeared in Euler’s paper [6, & 8, pp. 130-131] and establishes a way of determining $J_k(n + 1)$ in terms of $J_k(n)$.

Theorem 2 (Euler’s formula) Let $k \geq 2$ and denote $p := J_k(n)$. Then, $J_k(n + 1) = p + k - \ell(n + 1)$, if $p + k \in [[\ell(n + 1) + 1, (\ell + 1)(n + 1)]]$ for some non-negative integer ℓ .

Euler-Seki-Takebe Formula



(a) Graph of $J_3(n)$ for $n \leq 240$ (b) Graph of $J_{10}(n)$ for $n \leq 480$

Figure 1: Graphs of the Josephus functions J_3 and J_{10}

Connection between Mamakodate & Josephus?

15+15の9脱 {4,5,2,1,3,1,1,2,2,3,1,2,2,1}

		<i>n</i>	<i>m</i>
1150 頃	エズラ (Rabbi Abraham ben Ezra, 1546 年出版)	学生 15+ 怠け者 15	9
1363	サファディ (Salah al-Din al-Safadi)	M15+C15	9
15c	カランドリ (Filippo Calandri)	C15+J15	
1465 頃	フィレンツェ (Benedetto da Firenze)	C15+J15	9
1484 頃	シュケ (Nicolas Chuquet)	C15+J15	9
1485 頃	カランドリ	修道士 15+15	9
1500 頃	パチョーリ (Luca Pacioli)	C2+J30	9
1500 頃	パチョーリ	C2+J18	7
1500 頃	パチョーリ	C2+J30	7
1500 頃	パチョーリ	C15+J15	9
1539	カルダーノ (Gerolamo Cardano)	黒 + 白	
1556	タルターリヤ (Niccolo Fontana Tartaglia)	C+T, 黒 + 白	
1559	ブテオ (Johannes Buteo)	C15+J15	10
1612	バシェ (Claude-Gasper Bachet)	C15+T15	
1624	エッテン (Hendrik van Etten)	C15+T15	9
1678	ヴィンゲイト (Edmund Wingate)	C15+T15	
1725	オザナム (Jacques Ozanam)	C15+T15	9

Euler 1776

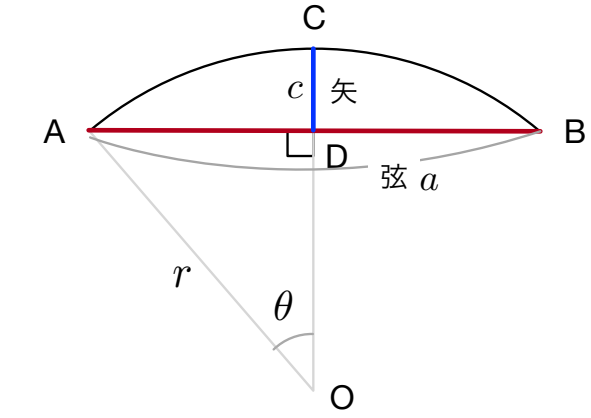


15+15の10脱 {2,1,3,5,2,2,4,1,1,3,1,2,2,1}
10+10の10脱 {1,1,3,2,1,3,2,2,3,2}

- <平安時代>
 - [1106 -1159 藤原通憲 (村井中漸によれば, 継子立の考案または伝授者)]
 - [1127 『懷中歷』 (『二中歷』の博基歴に基づく)]
 - 1151-1156 頃『簾中抄』 (「まゝこたての略頌」の項で数字列 2 つを列举)
- <鎌倉-南北朝 時代>
 - 1210-1221 頃『二中歷』 (博基歴の「後子立」の項で数字列 2 つを列举)
 - 1310-1331 頃『徒然草』 (死を免れぬ身をまゝ子立の石にたとえる)
 - 1278-1346 頃『異制庭訓往来』 (「継子立」に言及)
 - ?-1372『新撰遊覚往来』 (「三十二十之継子立」に言及)
- <室町-戦国-安土桃山 時代>
 - 1500 頃『十二段草子』 (「ありやなしやのまゝこたて」に言及)
 - 1500 頃 天理図書館蔵『鼠の草子絵巻』 (「ありやなしやのまゝこたて」を含む)
- <江戸時代>
 - 1604『徒然草寿命院抄』 (数字列 1 つを列举し, 10 番目を除くことに言及)
 - 1624『徒然草野槌』 (数字列 1 つを列举し, 10 番目を除くことに言及)
 - 1627-1631 頃『塵劫記』刊年未詳の 5 巻本 (継子立の具象的な絵と文章説明を
 - [1644-1652?『姫百合のさうし』 (「まま子だて」に言及)]
 - 1693『男重宝記』 (「三十二十之継子立」に言及)

関孝和編 1683

No same game in China (Needham, 1959;『中国の科学と文明4』p71).
Needham cited Smith & Mikami (1914), Smith(1925).



Seki 1683

5 澁川春海
 5 関孝和
 5 建部賢弘
 5 中根元五郎

盤上遊戯の伝播

正倉院の時代, すでにシルクロードは陸路と海路があった



中国の盤上遊戯 囲碁

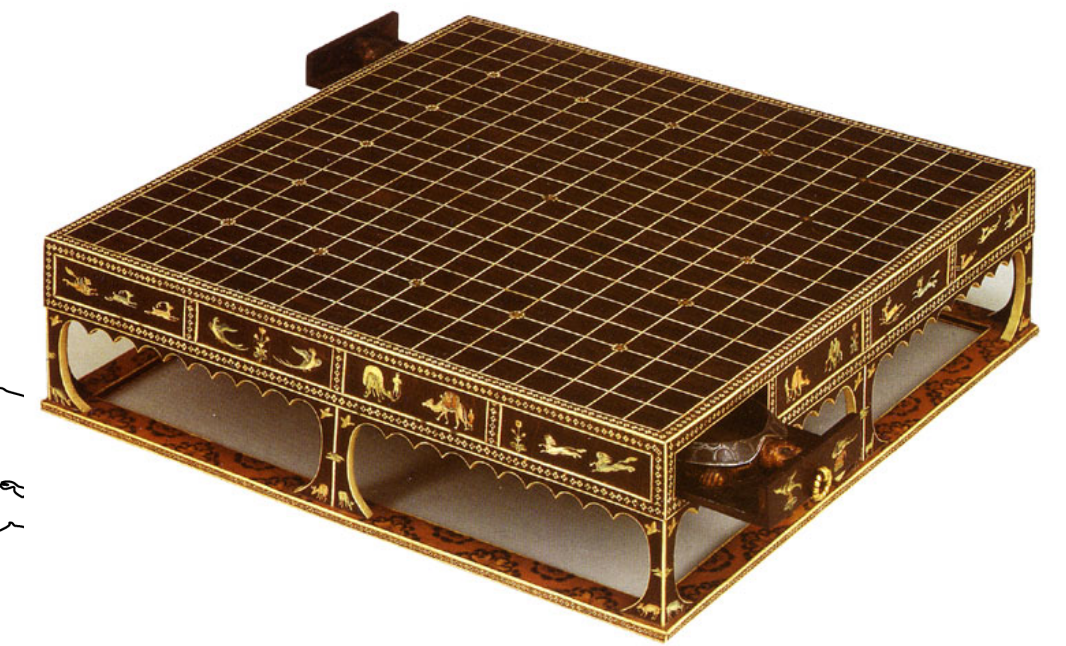
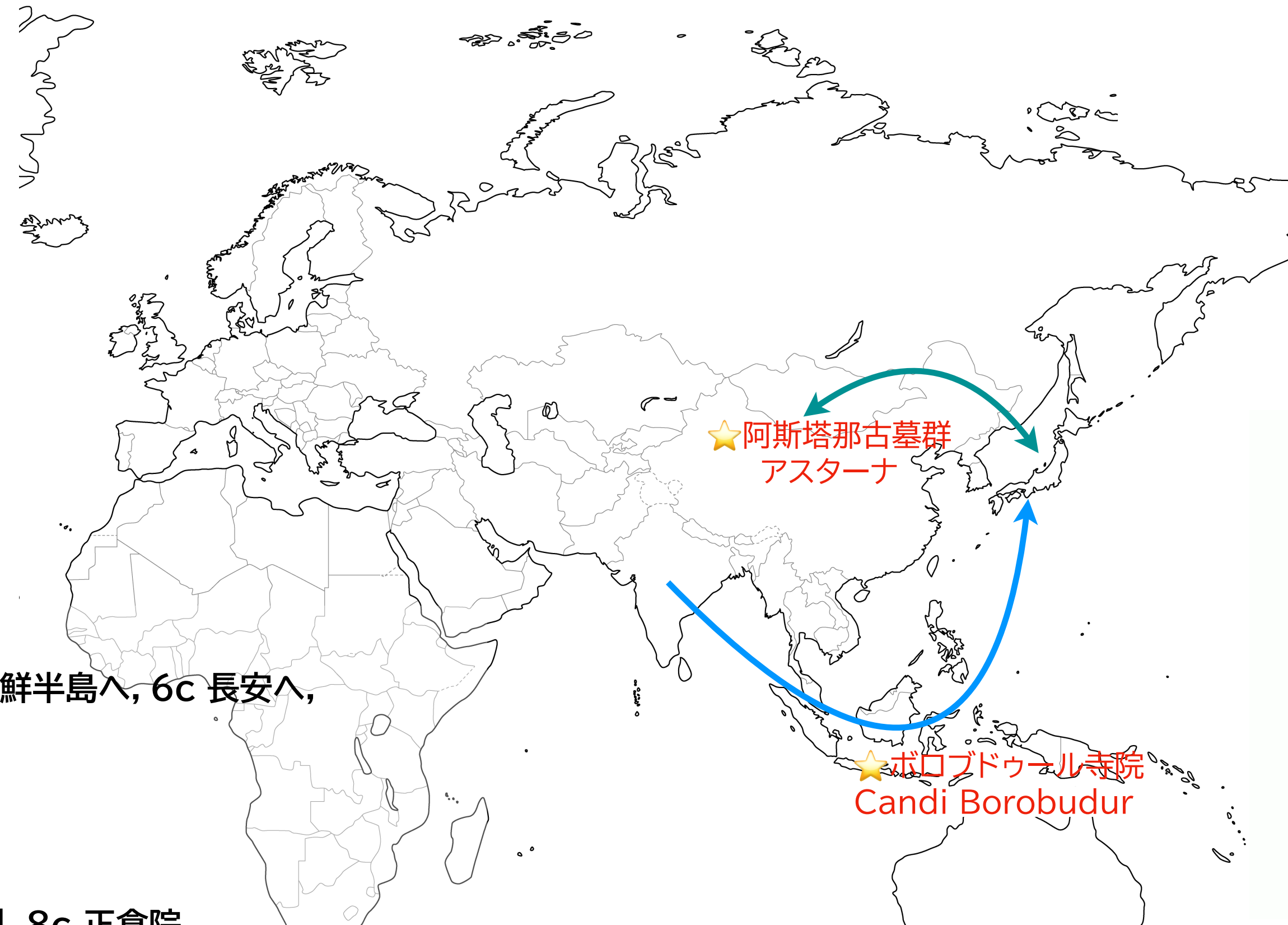
文献上はBC3cから. 出土品はAD3cから. 4cには朝鮮半島へ, 6c 長安へ,
7c トルファン唐墓, 8c 正倉院

西方の盤上遊戯 ナルド・双六(双陸)・バグギャモン

西方 → 4-5c ナルド【中央アジア】 → 7c 双陸【中国】, 8c 正倉院
→ 16c バグギャモン【欧州】
→ 【インド】 → 8c 正倉院, ボロブドール【インドネシア】

南方の盤上遊戯 将棋・象棋・チェス

6c インド北西部 -> 1100 象棋【中国】

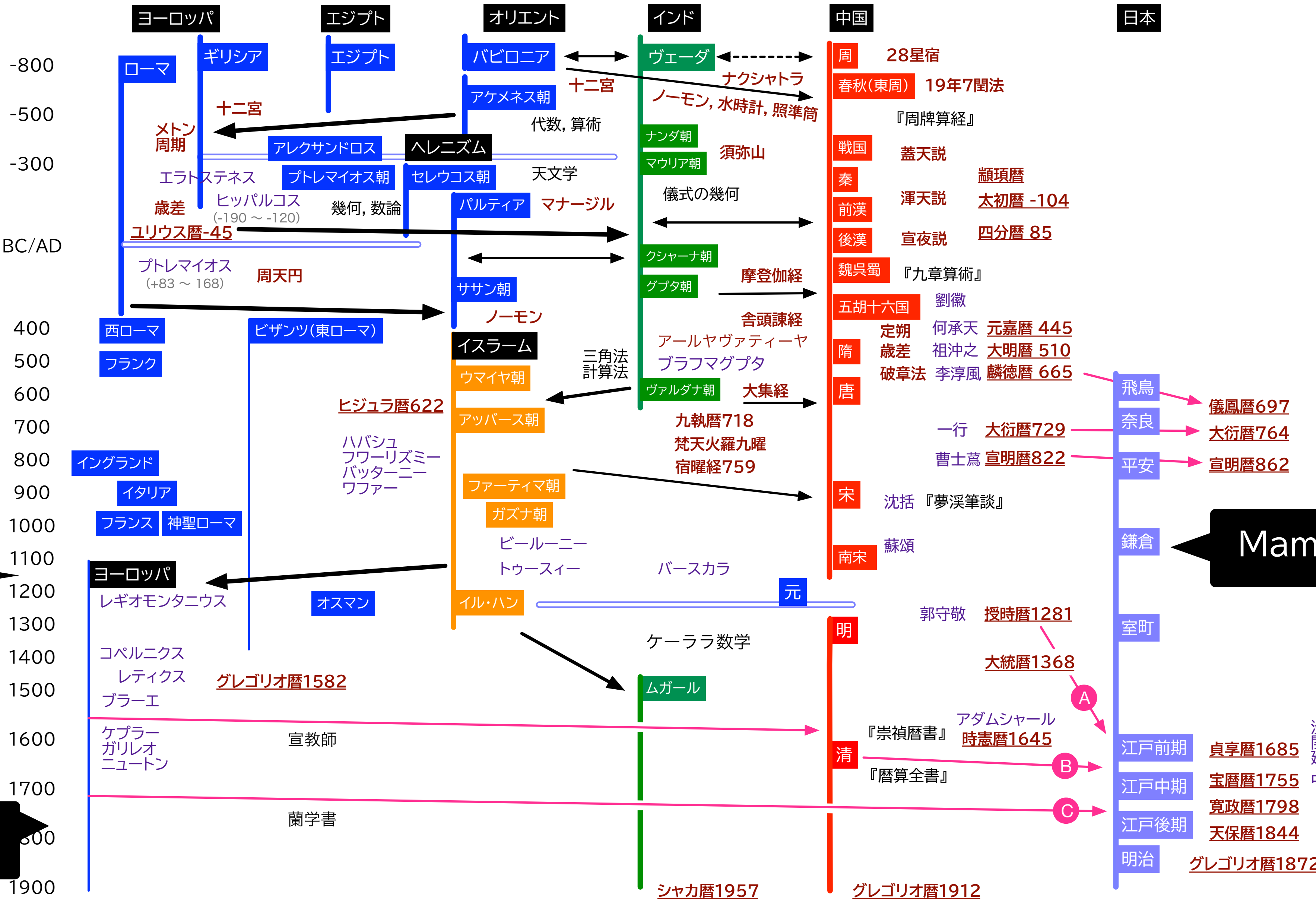
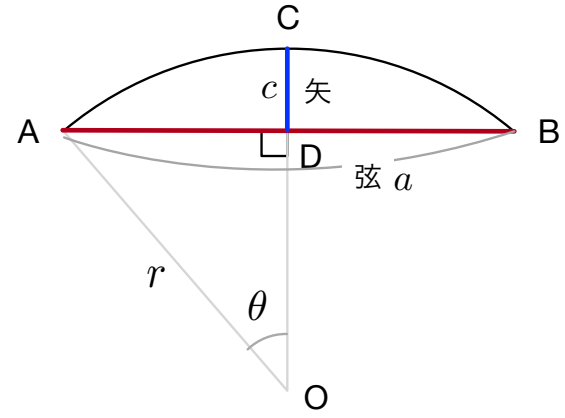
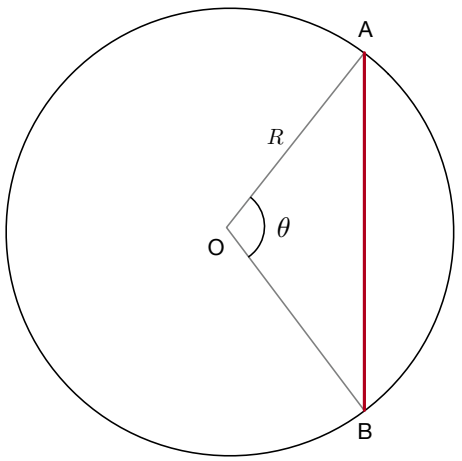


「木画紫檀碁局」



「木画紫檀双六局」

天文学史・数学文化交流史から俯瞰する日本の位置



Josephus problem

Mamakodate

Seki 1683

Euler 1776

D.E. Smith & Y.Mikami, A History of Japanese Math.(1914)

published his *Tengen Shinan* or Treatise on the Celestial Element Method. In this his method of finding the area of a circle is distinctly Western (Fig. 31), although it is so simple as to claim no particular habitat.

This list is rather meaningless in itself, without further description of the works and a statement of their influence upon Japanese mathematics, and hence it may be thought to be of no value. It is inserted, however, for two purposes: first, that it might be seen that the Seki period, whether through Seki's influence or not, whether through the incipient influx of Western ideas or because of a spontaneous national awakening, was a period of special activity; and second, that it might be shown that out of a considerable list of contemporary writers, only those who in some way came under Seki's influence attained to any great prominence.

We now turn to the second and more important question, did Seki and his contemporaries receive an impetus from the West? Did the Dutch traders, who had a monopoly of the legitimate intercourse with mercantile Japan, carry to the scholars of Nagasaki and vicinity, where the Dutch were permitted to trade, some knowledge of the great advance in mathematics then taking place in the countries of Europe? Did the Jesuit missionaries in China, who had followed Matteo Ricci in fostering the study of mathematics in Peking, succeed in transmitting some inkling of their knowledge across the China Sea? Or did some adventurous scholar from Japan risk death at the order of the Shogun,¹ and venture westward in some trading ship bound homewards to the Netherlands? These are some of the questions that arise, and which there are legitimate reasons for asking, but they are questions that future research will have more definitely to answer. Some material for a reply exists, however, and the little knowledge that we have may properly be mentioned as a basis for future investigation.

It has for some time been known, for instance, that there

¹ Even the importation of foreign books was suppressed in 1630.

was a Japanese student of mathematics in Holland during Seki's time,¹ doubtless escaping by means of one of the Dutch trading vessels from Nagasaki. We know nothing of his Japanese name, but the Latin form adopted by him was Petrus Hartsingius, and we know that he studied under Van Schooten at Leyden. That he was a scholar of some distinction is seen in the fact that Van Schooten makes mention of him in his *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico* in one of his editions of Descartes's *La Géométrie*,² as follows: "placuit majoris certitudinis ergo idem Theorema Syntheticè verificare, procendo à concessis ad quaesita, prout ad hoc me instigavit praestantissimus ac undequaque doctissimus juvenis D. Petrus Hartsingius, Iaponensis, quondam in addiscendis Mathematis, discipulus meus solertissimus."³ The passage in Van Schooten was first noticed by Giovanni Vacca, who communicated it to Professor Moritz Cantor.

Some further light upon the matter is thrown by a record in the *Album Studiosorum Academiae Lugduno Batavae*,⁴ as follows:

"Petrus Hartsingius Japonensis, 31, M. Hon. C." with the date May 6, 1669. Here the numeral stands for the age of the student, M. for medicine, his major subject, and Hon. C. for *Honoris Causa*, his record having been an honorable one.

¹ HARZER, P., *Die exacten Wissenschaften im alten Japan, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 14, 1905, Heft 6; MIKAMI, Y., *Zur Frage abendländischer Einflüsse auf die japanische Mathematik am Ende des siebzehnten Jahrhunderts*, *Bibliotheca Mathematica*, Bd. VII (3), Heft 4.

² HARZER quotes from the 1661 edition, p. 413. We have quoted from the Amsterdam edition of 1683, p. 413.

³ T. HAYASHI remarks that the same words appear in a posthumous work of Van Schooten's, but this probably refers to the above *editio tertia* of 1683. See HAYASHI, T., *On the Japanese who was in Europe about the middle of the seventeenth century* (in Japanese), *Journal of the Tokyo Physics School*, May, 1905; MIKAMI, Y., *Hatono Sōha and the mathematics of Seki*, in the *Nieuw Archief voor Wiskunde*, tweede Reeks, Negende Deel, 1910.

⁴ Hague, 1875. It gives a list of students and professors from 1575 to 1875.

Mathematics, his first pursuit, had therefore given place to medicine, and in this subject, as in the other, he had done noteworthy work. Possibly the death of Van Schooten in 1661 may have influenced this change, but it is more likely that the common union of mathematics and medicine, as indeed of all the sciences in those days,¹ led him to combine his two interests. Moreover certain other records inform us that Hartsingius lived in the house of one Pieter van Nieucasteel by the Langebrugge, a bit of information that adds a touch of reality to the picture. This record would therefore lead to the belief that he was only twenty-two years old when he was mentioned in the year of Van Schooten's death (1661), or probably only twenty-one when he, a *doctissimus juvenis*, and *quondam in addiscendis*, verified the theorem for his teacher.

A careful examination of the Leyden records as set forth in the *Album Studiosorum* throws a good deal more light on the matter than has as yet appeared. In the first place the Hartsingius was adopted as a good Dutch name, it appearing in such various forms as Hartsing and Hartsinck, and may very likely have belonged to the merchant under whose auspices the unknown student went to Holland. In the next place, Hartsingius was in Holland for a long time, fifteen years at least, and was off and on studying in the university at Leyden. He is first entered on the rolls under date August 29, 1654, as "Petrus Hartsing Japonensis. 20, P.," a boy of twenty in the faculty of philosophy. This would have placed his birth in 1634 or 1635, but as we shall see, he was not very particular as to exactness in giving his age.² He next appears on the rolls in the entry of date August 28, 1660, "Petrus Hartzing Japonensis, 22, M." He has now changed his course to medicine, and his age would now place his birth in 1638 or 1639, four years later than stated before. Since, however,

¹ Witness, for example, the mention made by Van Schooten in the 1683 edition (p. 385) above cited, of the assistance received from Erasmus Bartholinus, mathematician and physician in Copenhagen.

² See *Album*, col. 438.

the difficulty of language is to be considered, together with the fact that such records, hastily made, are apt to be inexact, this is easily understood. He next appears in the *Album* under date May 6, 1669, as already stated. He therefore began in 1654, and was still at work in 1669, but he had not been there continuously.

Further light is thrown upon his career by the fact that he was not alone in leaving Japan, perhaps about 1652. He had with him a companion of the same age and of similar tastes. In the *Album*, under date September 4, 1654, appears this entry: "Franciscus Carron Japonensis, 20, P." Within a week, therefore, of the first enrollment of Hartsingius, another Japanese of same age, and doubtless his companion in travel, registered in the same faculty. But while Hartsingius remained in Leyden for years, we hear no more of Carron. Did he die, leaving his companion alone in this strange land? Did he go to some other university? Or did he make his way back to Japan?¹

Now who was this Petrus Hartsingius who not only braved death by leaving his country at a time when such an act was equivalent to high treason, but who was excellent as a mathematician? What ever became of him? Did he die, an unknown though promising student, in some part of the West, or did he surreptitiously find his way back to his native land? If he passed his days in Europe did he send any messages from time to time to his friends, telling them of the great world in which he dwelt, and in particular of the medical work and the mathematics of the intellectual center of Northern Europe? In other words, for our immediate purposes, could the mathematics of the West, or any intimation of what was being accomplished by its devotees, have reached Japan in Seki's time?

¹ SCHOTEL, G. D. J., *De Academie te Leiden in de 16e, 17e en 18e eeuw* Haarlem, 1875, speaks (p. 266) of Japanese students at Leyden, and a further search may yield more information. We have been over the lists with much care from 1650 to 1670, and less carefully for a few years preceding and following these dates.

関の数学が西洋に伝わった可能性はあるか？
Petrus Hartsingius Japonesis という日本人学生がオランダLeyden大学の学生簿に発見される。
1654年に数学を専攻する20歳の学生として. 1669年に31歳として. 後に担当教員の死により薬学へ転向。
疑問符だらけで終わる文。



デカルトの『幾何学』をラテン語訳した数学者ファン・スホーテンの弟子のひとり。

One of the students of the mathematician van Schooten, who translated Descartes' *Geometry* into Latin.

Information from internet

<https://note.com/savensatow/n/n7f57efe8d0b7>

1637: Born to a German man named Carl Hartzing—stationed at the Dutch East India Company's trading post in Hirado—and the daughter of a wealthy Hirado merchant.

1641: Forced to leave Japan for the Netherlands due to the national isolation policy.

1680: Died at his home in Clausthal at the young age of 42.

1637年 オランダ東インド会社の平戸館にいたドイツ人カール・ハルツィンクと平戸の豪商の娘との間に生まれる。

1641年 鎖国政策により出国せざるをえなくなり、オランダへ。

1680年 42歳の若さでクラウスタールの自宅で亡くなる。

ハルツィンク・クラウスタール財団(Harzing-Clausthal-Stiftung)

330年以上前に「ペーター・ハルツィンク(Peter Hartzing: Pieter Hartsinck)」の遺志によって創設された大学進学を支援する奨学金

Mamakodate problem & Josephus problem

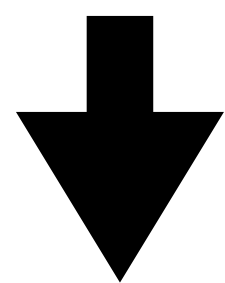
継子立て問題とヨセフスの問題

継子立て問題



吉田光由『塵劫記』 (after 1631 ed.)

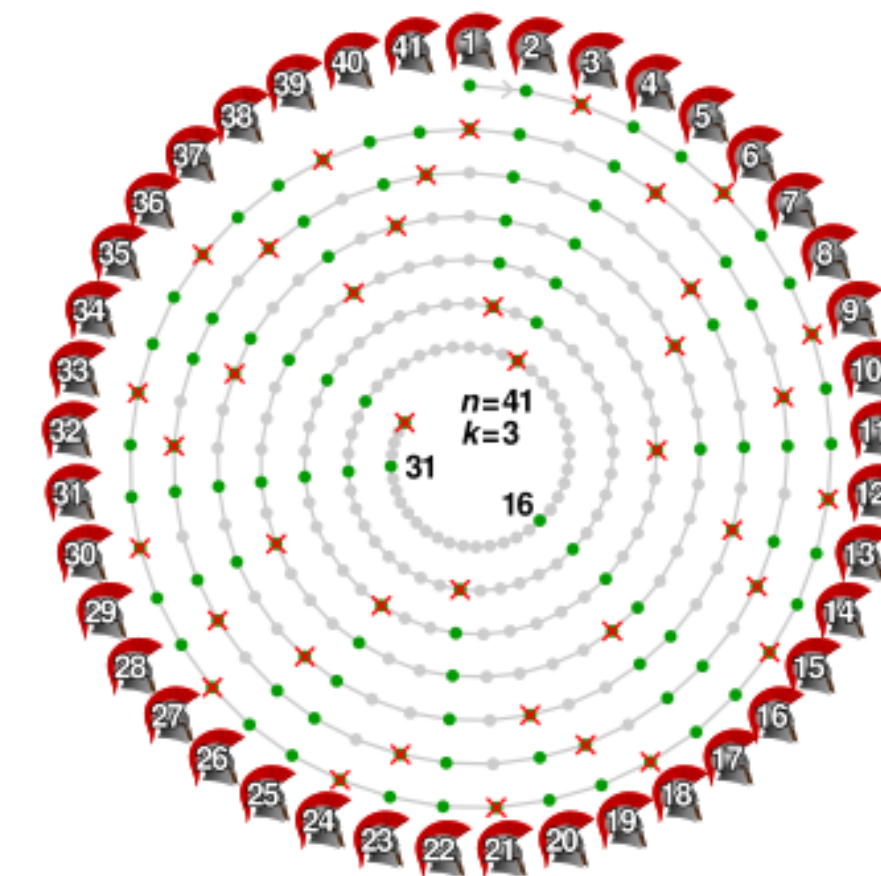
YOSHIDA Mitsuyoshi 『Jinkouki』



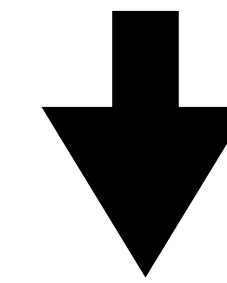
関孝和編 『算脱之法』 (1683)

SEKI Takakazu ed. 『Sandatsu no hou』

Josephus problem



Flavius Josephus at Siege of Yodfat, 67



オイラー 『新しく発見された特異な数列』 (1776)

Euler 『a New and Singular kind of Progression』

Connecting piece is not yet found

Independently discovered theorem