

微積分Ⅰ (真見) 第2回中間テスト 解答例 (Jセット)

[1]

$$y_1' = e^x + 0 + 12x^2 + 5\cos x - 6\sin x$$

$$y_2' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 3e^{-3x} + \frac{1}{x} + \frac{5}{\cos^2 x}$$

$$y_3' = (x^n) \cdot \log x + x^n \cdot (\log x)'$$

$$= n x^{n-1} \cdot \log x + x^n \cdot \frac{1}{x}$$

$$= x^{n-1} (n \cdot \log x + 1)$$

$$y_4' = \frac{-\sin x}{\cos^2 x}$$

$$y_5' = ((1-x^2)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)'$$

$$= -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y_6' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \left(\tan \frac{x}{2} \right)'$$

$$= \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)'$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

y_7' : $\theta = \tan^{-1} x$ とおくと $x = \tan \theta$.

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + x^2 \text{ より}$$

$$y_7' = \theta' = \frac{1}{dx/d\theta} = \frac{1}{1+x^2}$$

[2]

$x = [0, 1]$ を n 等分し、 $\Delta x = \frac{1}{n}$ の長方形に区切る。

$x_k = x_{k-1} = \frac{k}{n}$ の長方形を x 軸のまわりには回転させたとき、体積 ΔV は、

$$\Delta V = \pi \cdot y_k^2 \cdot \Delta x$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{k}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

全体の体積は

$$V_n = \sum_{k=1}^n \pi \left(\frac{k}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{\pi}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

[3]

$$V_n = \frac{\pi}{n^2} \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{\pi n^2 (n+1)^2}{4n^2}$$

$n \rightarrow \infty$ の極限をとると、

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

$y = x e^{-x^2}$

$$y' = e^{-x^2} + x \cdot (-2x) e^{-x^2}$$

$$= (1 - 2x^2) e^{-x^2}$$

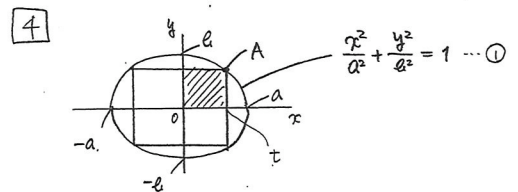
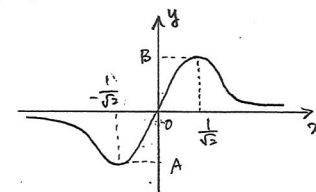
$y' = 0$ とおくと $1 - 2x^2 = 0$ より $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

増減表は

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
y'	-	0	0	-
y		$\nearrow$ A	$\searrow$ B	

$A = -\frac{1}{\sqrt{2}e}$, $B = +\frac{1}{\sqrt{2}e}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ とおくと $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ が極値となる。



楕円に内接する長方形は、 x 軸・ y 軸に平行な辺をもつものに限られる。

第1象限での内接点Aの x 座標を t とおくと、

①より $y = b \sqrt{1 - \left(\frac{t}{a}\right)^2}$

である。図の斜線部の面積の4倍が長方形の面積 S になるから、

$$S = 4 \cdot \frac{b}{a} t \cdot \sqrt{a^2 - t^2} \quad \text{--- ②}$$

この最大値を求めよう。

$$S^2 = 16 \left(\frac{b^2}{a^2} \right) t^2 (a^2 - t^2) \text{ より}$$

$$f(t) = t^2 (a^2 - t^2) \text{ とおいて最大値を求めると}$$

$$f'(t) = 2t(a^2 - t^2) + t^2(-2t)$$

$$= 2t(a^2 - 2t^2) \text{ より}$$

$t = 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} a$ のとき $f'(t) = 0$ となる。

よって $0 \leq t \leq a$ のとき ②の増減表をまとめると、

t	0	$\frac{1}{\sqrt{2}} a$	a
$f(t)$	0	+	0
S		$\nearrow$	$\searrow$

よって $t = \frac{1}{\sqrt{2}} a$ のとき S は最大になる。

$$S_{\max} = 4 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{2ab}{\sqrt{2}}$$

[5]

$$f(x) = e^{-x} \sin x$$

$$f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$$

$$= e^{-x} (-\sin x + \cos x)$$

$$f''(x) = -e^{-x} (-\sin x + \cos x) + e^{-x} (-\cos x - \sin x)$$

$$= -2e^{-x} \cos x$$

$$f'''(x) = 2e^{-x} \cos x + 2e^{-x} \sin x$$

よって

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = -2$$

$$f'''(0) = 2 \text{ とおくと}$$

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k$$

$$= 0 + x - \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2}{3!} x^3 + \dots$$

$$= x - x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \dots \text{ となる。}$$