

微分方程式（真貝）
第1回中間テスト M

学生番号_____ 氏名_____

【重要】解答は別紙に．答えだけではなく，導出の過程も記すこと．
解答順は自由．スペースが足りなければ，裏面を用いよ．

1 次の微分方程式を立式せよ．必要であれば，各自で文字を補え．

- (a) xy 平面上の各点で，接線の傾きが $\cos x$ である曲線が満たす微分方程式．
(b) 時間に対して一定の割合で成長してゆく雪の結晶の大きさを求める微分方程式．
(c) 質量 m の落下傘が重力 mg を受けて落下するとき，高さ y が満たす運動方程式は，

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$$

である．さらに，速度の2乗に比例する抵抗力が加わるとすると，どのような式になるか．

- (d) 半径 r の円の面積 $S(r)$ は $S(r) = \pi r^2$ である．毎秒一定量の油を大きなフライパンの中央に注ぐ．油が円状に広がるときの半径 r が満たす微分方程式はどうなるか．
ヒント．微小量 Δr だけ半径が増加する時の面積差は $\Delta S = S(r + \Delta r) - S(r)$ で計算できる． $(\Delta r)^2$ は微小量として無視してよい．

2 $y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ (A, B は任意定数， ω は定数) が，次式をみたすことを示せ．

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 y$$

3 $y(x)$ である．一般解を求めよ．初期値が与えられた式は特殊解を求めよ．

- (a) $\frac{dy}{dx} + 4x = 0, y(0) = 4$ (d) $\frac{dy}{dx} + 4y = e^{-4x}$
(b) $\frac{dy}{dx} + 4y = 0, y(0) = 4$ (e) $\frac{dy}{dx} + 4y = 17 \cos x$
(c) $\frac{dy}{dx} + 4y = e^{4x}$

4 風呂のお湯の温度の時間変化率は，そのときの室温との差に比例する．いま，室温が 20 $^{\circ}\text{C}$ のとき，時刻 t における風呂の温度 $T(t)$ $^{\circ}\text{C}$ は，

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20) \quad (k > 0; \text{定数})$$

となる． $t = 0$ で 42 $^{\circ}\text{C}$ だった風呂が，5分後に 40 $^{\circ}\text{C}$ になった．10分後は何 $^{\circ}\text{C}$ か．必要であれば， $\log 2 = 0.6931, \log 3 = 1.099, \log 5 = 1.609, \log 10 = 2.303$ を用いよ．