

注 意	1. 右の欄を正確に記入すること。	試験日 —	所 部 情報科学部	学生番号 □□□□-□□□□	フリガナ 氏 名	組
	2. 所属を○で囲むこと。					
	3. 前記「1.2」を守らない答案は採点されないことがある。					
	試験日 —					
所 属	学科 ID IC IS IM IN	年次 1 2 3 4	科目等 修 生			

微分方程式(真貝) 中間テスト 第1回(M) 解答例.

[1] (a) $\frac{dy}{dx} = \cos x$

(b) 雪の結晶の大きさを時間との関係として $x(t)$ とすると. $\frac{dx}{dt} = k$ (定数)

(c) $m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg - k \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$ ($k > 0$: 定数)

(d) 面積の増加が毎秒一定となること.
 $\Delta S = \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 \cong 2\pi r \Delta r$ より
 $\frac{\Delta S}{\Delta t} = 2\pi r \frac{\Delta r}{\Delta t} = k$ (定数)
 $L = \pi r^2$ より $\frac{dr}{dt} = \frac{k}{r}$ (k : 定数)

[2] $y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$
 $\frac{dy}{dt} = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$
 $\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t = -\omega^2 y$ と仮定を仮定された.

[3] (a) $\frac{dy}{dx} = -4x$
 $y = -\int 4x dx = -2x^2 + C_1$ (一般解)
 初期条件 $y(0) = 4$ より $C_1 = 4$ と仮定
 $\therefore y(x) = -2x^2 + 4$

(b) $y' + 4y = 0$
 方針1 変数分離法により
 $\frac{dy}{y} = -4dx$
 $\int \frac{dy}{y} = -\int 4dx$
 $\log|y| + C_1 = -4x + C_2$
 $\therefore y = C_3 e^{-4x}$

$C_1, C_2, \dots$ は積分定数とする.

初期条件 $y(0) = 4$ より $C_3 = 4$
 $\therefore y(x) = 4e^{-4x}$

方針2 積分因子 e^{4x} を与式の両辺に乘以
 $e^{4x}(y' + 4y) = 0$
 $\Leftrightarrow (ye^{4x})' = 0$
 $\therefore ye^{4x} = C_1$
 $\therefore y(x) = C_1 e^{-4x}$
 初期条件 $y(0) = 4$ より $C_1 = 4$
 $\therefore y(x) = 4e^{-4x}$

(c) $y' + 4y = e^{4x}$
 方針1 積分因子 e^{4x} を両辺に乘以
 $(ye^{4x})' = e^{8x}$
 積分 $ye^{4x} + C_1 = \int e^{8x} dx = \frac{1}{8} e^{8x} + C_2$
 $\therefore ye^{4x} = \frac{1}{8} e^{8x} + C_3$
 $\therefore y(x) = \frac{1}{8} e^{4x} + C e^{-4x}$

方針2 不定係数法
 step1 右辺をゼロとした同次微分方程式
 $y' + 4y = 0$
 の一般解は (b) と同じ $y_1 = Ce^{-4x}$
 step2 与式の特殊解とて $y_2 = ke^{4x}$ の形を考へ
 与式に代入すると
 $(ke^{4x})' + 4ke^{4x} = e^{4x}$
 これより $8k = 1$. $\therefore k = \frac{1}{8}$ と仮定
 step3 以上より 求める一般解は
 $y(x) = \frac{1}{8} e^{4x} + C e^{-4x}$

注 意	1. 右の欄を正確に記入すること。	試験日 —	所 部 情報科学部	学生番号 □□□□-□□□□	フリガナ 氏 名	組
	2. 所属を○で囲むこと。					
	3. 前記「1.2」を守らない答案は採点されないことがある。					
	試験日 —					
所 属	学科 ID IC IS IM IN	年次 1 2 3 4	科目等 修 生			

(d) $y' + 4y = e^{-4x}$
 不定係数法で解く.
 step1 (c) と同じく 右辺をゼロとしたときの一般解は
 $y_1 = Ce^{-4x}$
 step2 特殊解とて $y_2 = kxe^{-4x}$ の形を考へ
 与式に代入すると.
 $(kxe^{-4x})' + 4kxe^{-4x} = e^{-4x}$
 $ke^{-4x} - 4kxe^{-4x} + 4kxe^{-4x} = e^{-4x}$
 $\therefore k = 1$
 step3 $L = kxe^{-4x}$ 求める一般解は
 $y(x) = Ce^{-4x} + x e^{-4x} = (x+C)e^{-4x}$

(e) $y' + 4y = 17 \cos x$
 step1 右辺をゼロとしたときの一般解は
 $y_1 = Ce^{-4x}$
 step2 特殊解とて
 $y_2 = k \cos x + l \sin x$
 の形を考へ与式に代入すると.
 $(k \cos x + l \sin x)' + 4(k \cos x + l \sin x) = 17 \cos x$
 $(-k + 4l) \sin x + (4k + l) \cos x = 17 \cos x$
 これより 係数をくらべて
 $\begin{cases} -k + 4l = 0 \\ 4k + l = 17 \end{cases}$
 これより $k = 4, l = 1$ と仮定.
 step3 以上より 求める一般解は
 $y(x) = Ce^{-4x} + 4 \cos x + \sin x$

[4] $\frac{dT}{dt} = -k(T-20)$
 変数分離法により
 $\int \frac{dT}{T-20} = -\int k dt$
 $\log|T-20| = -kt + C_1$
 $\therefore T-20 = e^{-kt+C_1} = Ce^{-kt}$
 $\therefore T(t) = 20 + Ce^{-kt}$ (-一般解)
 初期条件 $T(0) = 42$ より $C = 22$
 $\therefore T(t) = 20 + 22e^{-kt}$... ①
 題意より $T(5) = 40$ なること
 $40 = 20 + 22e^{-5k}$
 $\therefore e^{-5k} = \frac{20}{22}$ と仮定 ... ②
 求める温度は $T(10)$. ①より
 $T(t) = 20 + 22e^{-10k}$
 $= 20 + 22(e^{-5k})^2$ ②
 $= 20 + 22\left(\frac{20}{22}\right)^2$
 $= 38.1818 \dots$
 $\therefore 38.2^\circ \text{C}$

所 属	科 年・科目等履修生	学生番号	□□□□-□□□□	氏 名
-----	------------	------	-----------	-----

所 属	科 年・科目等履修生	学生番号	□□□□-□□□□	氏 名
-----	------------	------	-----------	-----