

微分方程式 中間テスト 第2回 <I> 解答例 (真見)

① (1) 特性方程式は $\lambda^2 + 16 = 0$.
 この解は $\lambda = \pm 4i$ である。LTから
 求める一般解は
 $y(x) = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$... ①
 $(C_1, C_2: \text{定数, 以下同じ})$

(2) ①に初期条件を代入して C_1, C_2 を求める。
 $y(0) = 5$ より
 $5 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \quad \therefore C_1 = 5$
 ①を微分して
 $y'(x) = -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x$
 $y'(0) = 2$ より
 $2 = -4C_1 \cdot 0 + 4C_2 \cdot 1 \quad \therefore C_2 = \frac{1}{2}$
 したがって
 $y(x) = 5 \cos 4x + \frac{1}{2} \sin 4x$

(3) 特性方程式
 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
 $(\lambda - 2)^2 = 0 \quad \therefore \lambda = 2 \text{ (重解)}$
 したがって求める一般解は
 $y(x) = e^{2x} (C_1 + C_2 x)$

(4) 特性方程式
 $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ の解は
 $\lambda = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$
 したがって求める一般解は
 $y(x) = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

(5) 未定係数法で解く
 (Step 1) 右辺をゼロとした同次式
 $y'' - y = 0$... ①
 の一般解は、特性方程式 $\lambda^2 - 1 = 0$ の解が
 $\lambda = \pm 1$ となることから
 $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$... ②
 とする。

(Step 2) 与式の特殊解として、②と独立な関数として
 $y(x) = k \cdot x e^x$... ③
 を仮定し、与式に代入して k を求める。
 $y'(x) = k \cdot e^x + k x e^x$
 $y''(x) = 2k e^x + k x e^x$ より
 与式に代入すると
 $2k e^x + k x e^x - k x e^x = 4e^x$
 $\therefore k = 2$

(Step 3) 求める解は ②と③の和
 $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 2x e^x$

② $m \frac{dv}{dt} = -kv^2 - mg = -k(v^2 - \frac{mg}{k})$... ①
 (1) ①を $\int \frac{dv}{v^2 - \alpha^2} = -\frac{k}{m} \int dt, \quad \alpha = \sqrt{\frac{mg}{k}}$
 と変形する。
 左辺は部分分数に分解。
 $\frac{1}{v^2 - \alpha^2} = \frac{A}{v - \alpha} + \frac{B}{v + \alpha}$ とすると
 $1 = A(v + \alpha) + B(v - \alpha) = (A + B)v + (A - B)\alpha$
 したがって $\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = \frac{1}{\alpha} \end{cases} \therefore A = \frac{1}{2\alpha}, B = -\frac{1}{2\alpha}$
 $\therefore$ 左辺 = $\frac{1}{2\alpha} \left(\log |v - \alpha| - \log |v + \alpha| \right) + C_1$
 $= \frac{1}{2\alpha} \log \left| \frac{v - \alpha}{v + \alpha} \right| + C_1$
 右辺 = $-\frac{k}{m} t + C_2 \quad (C_i: \text{定数})$
 したがって $\frac{1}{2\alpha} \log \left| \frac{v - \alpha}{v + \alpha} \right| = -\frac{k}{m} t + C_3$
 $\frac{v - \alpha}{v + \alpha} = C_4 \cdot e^{-\frac{2\alpha k}{m} t}$
 $v = 7m$ 解くと
 $v(t) = \frac{1 + C_4 e^{-\frac{2\alpha k}{m} t}}{1 - C_4 e^{-\frac{2\alpha k}{m} t}} \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad \dots ②$

(2) ②は $t \rightarrow \infty$ で $v \rightarrow \sqrt{\frac{mg}{k}}$ となる。
 (3) 定数 C_4 の値は変化するが、 $t \rightarrow \infty$ で $v \rightarrow \sqrt{\frac{mg}{k}}$
 となることは同じ。

③ $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = mg$... ①
 (Step 1) ①の右辺をゼロにした同次式
 $m x'' + kx = 0$
 の一般解を求める。特性方程式
 $m\lambda^2 + k = 0$ の解が $\lambda = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i$ より
 $x(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$... ②

(Step 2) ①の特殊解を
 $x(t) = A$ (定数)
 とおくと、①に代入して
 $m \eta'' + k \eta = mg$
 $0 + k \cdot A = mg \quad \therefore A = \frac{mg}{k}$... ③

(Step 3) したがって ①の解は
 $x(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{mg}{k}$... ④
 $C_1, C_2: \text{定数}$

④は振動中心が $x_0 = \frac{mg}{k}$ の単振動を表す。
 振動の周期を T とすると。
 $\sqrt{\frac{k}{m}} T = 2\pi$ より $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

- ④ (a) 線形
 (b) 非線形
 (c) 同次型 (斉次型)
 (d) 積分因子
 (e) 非同次型
 (f) 定数変化