

微分方程式（2年）期末試験 2006/07/20

【重要】 答案は、別紙の答案用紙に記入すること。

解答順は自由とするが、答案用紙には、どの問題か分かるように記載すること。

答案には、答えだけでなく、導出の過程も記すこと。

問題用紙は回収しない。各自、持ち帰り、最終授業日に持参すること。

1. (1) $y = e^{-\alpha x}$ (α は定数) が次の微分方程式を満たすことを示せ .

$$\frac{dy}{dx} = -\alpha y, \quad y(0) = 1$$

- (2) 次の微分方程式の解を求めよ . α, β は定数とする .

$$\frac{dy}{dx} + \alpha y = \beta, \quad y(0) = 0$$

2. (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ .

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$$

- (2) 上記の解の中で、次の初期条件を満たすものを求めよ .

$$y(0) = 0, \quad \frac{d}{dx}y(0) = 9$$

3. 次の微分方程式の一般解を求めよ .

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 2\sin x$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 3e^x$

4. 【選択問題】 どちらか1問 を選択して答えよ .

- (1) 室温が $20 [^{\circ}\text{C}]$ の部屋に置いたコーヒーの温度の変化率は、時刻 t におけるコーヒーの温度 $T(t) [^{\circ}\text{C}]$ と室温との差に比例する . すなわち、

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20) \quad (k > 0; \text{定数})$$

となる . $t = 0$ で、 $100 [^{\circ}\text{C}]$ であったコーヒーが、2分後に $70 [^{\circ}\text{C}]$ になったとすると、 $40 [^{\circ}\text{C}]$ になるのは何分後か . 必要ならば、 $\log 2 = 0.6931, \log 5 = 1.609$ を用いよ .

- (2) 空気中の質量 m の雨滴は、一定の重力 mg と共に、その速度 $v(t)$ に比例する空気抵抗を受けながら落下する . 抵抗の比例定数を α とすれば、解くべき方程式は、下向きを正として

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \alpha v$$

となる . この微分方程式を解き、初速度ゼロで落下した雨滴の速度 v を時間 t を横軸にしてグラフで示せ .