

微分方程式 (1 年) 期末試験 2015 年 1 月 27 日

微分方程式

真貝寿明
大島一能

IS 科 IN 科 1 年

参照可能物 なし

【重要】 別紙の答案用紙に記入すること。問題用紙は回収しない。
解答順は自由とするが、答案用紙には、どの問題か分かるように記載すること。
答案には、答えだけでなく導出の過程も記すこと。導出の過程にも配点がある。

問題 1 (自然現象のモデル化, 20 点)

次の微分方程式を立てよ。各自で導入した記号には説明をつけること。

- (1) xy 平面上の各点で、法線の傾きが $\sin x$ である曲線がみたす微分方程式。
- (2) 時間に対して一定の割合で加速してゆくロケットの速度を求める微分方程式。
- (3) x 軸上を動く物体の加速度が、原点からの距離の 2 乗に比例することを示す微分方程式。
- (4) フライパンに毎秒一定量の油を少しずつ注ぐと、油の膜厚が一定で円状に広がる。円の半径を r とすると、円の面積 $S(r)$ は $S(r) = \pi r^2$ である。時間 t を変数として、 r がみたす微分方程式はどうなるか。
ヒント。微小量 Δr だけ半径が増加する時の面積増加分 ΔS は、 $\Delta S = S(r + \Delta r) - S(r)$ で計算できる。 $(\Delta r)^2$ は微小量として無視してよい。

問題 2 (基本的な微分方程式, 30 点)

$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解 (初期条件が与えられているものは特殊解) を求めよ。

- (1) $y' - 3y = 0, y(0) = 2$
- (2) $y' - 3y = 6e^{-3x}$
- (3) $y' - 3y = 2e^{3x}$
- (4) $y' - 3y = 10 \cos x$
- (5) $y'' + 2y' - 3y = 0$
- (6) $y'' + 2y' - 3y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 4$

以下の 3 問のうち、2 問を選択して解答せよ。 _____

問題 3 (1 階微分方程式の応用, 25 点)

沸かし終えた風呂の温度の時間変化率は、そのときの室温との差に比例する。すなわち、室温が 10 [°C] のとき、時刻 t における風呂の温度 $T(t)$ [°C] は、

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 10) \quad (k > 0; \text{定数})$$

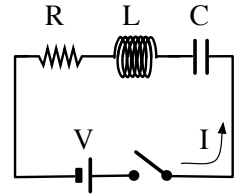
となる。いま、 $t = 0$ で 60 [°C] だったとき、 $T(t)$ を求め、グラフの概形を描け。

問題 4

(2階微分方程式の応用, 25点)

抵抗値 R の抵抗, インダクタンス L のコイル, 容量 C のコンデンサで構成される RLC 直列回路を考える. V を回路の起電力とすると, Kirchhoff の法則により, 時間 t を変数にする電流 $I(t)$ に対して次の微分方程式が成り立つ.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dV}{dt}$$



R, L, C は正の定数とし, $CR^2 < 4L$ の関係があるとする. いま, 電源として直流電源 $V = (\text{一定})$ をつなぎ, 時刻 $t = 0$ でスイッチを入れた. この微分方程式の一般解 $I(t)$ を求め, 概形をグラフで示せ.

問題 5

(微分方程式の概念, 25点)

- (1) $y(x)$ に対して, 2階の定数係数・非同次・線形・常微分方程式の例を1つ挙げよ.
- (2) 「常微分方程式」と「偏微分方程式」の違いを説明せよ.
- (3) 「初期値問題」とは何か. 説明せよ.
- (4) 2階微分方程式の解を求める際の「基本解の1次独立性」について説明せよ.