

微分方程式（1年）2025年度（2026年1月27日4限）期末試験問題

担当：真貝寿明・塚本勝俊

対象：IS科 IR科 1年

参照可能物：なし

【重要】 別紙の答案用紙に記入すること。問題用紙は回収しない。

解答順は自由とするが、答案用紙には、どの問題か分かるように記載すること。

答案には、答えだけではなく導出の過程も記すこと。導出の過程にも配点がある。

問題 1 (自然現象のモデル化, 20点)

次の微分方程式を立てよ。各自で導入した記号には説明をつけること。

- (1) xy 平面上の各点で、接線の傾きが $\cosh x$ である曲線がみたす微分方程式。
- (2) 人口の増加率が、そのときの総人口に比例することを表す微分方程式。
- (3) 2つの分子の間には、距離の2乗に反比例する引力と距離の3乗に反比例する斥力がはたらく。この関係を示す運動方程式。
- (4) 半径 r の球形で近似される風船が毎秒一定量の空気が封入されて膨張している。体積 V の半径に対する増加率 $\frac{dV}{dr}$ を示す微分方程式。
ヒント：半径が Δr 増加したときの体積を考え、その増加分が一定であることを考えよ。

問題 2 (基本的な微分方程式, 30点)

$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解を求めよ。初期条件が与えられているものは特殊解も求めよ。

- (1) $y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2$
- (2) $y' + 5y = 10e^{5x}$
- (3) $y' + 5y = e^{-5x}$
- (4) $y' + 5y = 26 \cos x$
- (5) $y'' - 4y = 0$
- (6) $y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$

以下の3問のうち、2問を選択して解答せよ。

問題3 (1階微分方程式の応用、25点)

雨滴が無限大の速さにならないのは、空気抵抗により減速されるからである。ここでは、空気抵抗が物体の速度 v に比例すると考えよう。すなわち、時間を t 、抵抗の比例定数を k 、雨滴の質量を m 、重力加速度を g とすれば、運動方程式は、鉛直上向きを正として

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv$$

となる。初速をゼロとして速度 $v(t)$ を求め、グラフを描け。また、雨滴の終端速度（最終的に一定となる速度）はどうなるか答えよ。

問題4 (2階微分方程式の応用、25点)

メトロノームの振動を考える。振動の振幅 x を時間 t の関数とすると、 $x(t)$ は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

の微分方程式にしたがう。 ω は定数である。

- (1) $x(t)$ の一般解を求め、一往復する時間（周期）を求めよ。
- (2) 時刻 $t = 0$ で、 $x = x_0$ の位置から、静かに手を離した。 $x(t)$ を求めよ。

2つのメトロノームを用意し、 $\omega = 1$ となるような同じテンポで振動するようにして、スケートボードの上に並べた。メトロノームは互いに振動の影響を及ぼすため、振幅 $x(t)$ は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x + 4 \sin t$$

の微分方程式にしたがうことになった。

- (3) $x(t)$ の振動を論じよ。また振動のグラフの概形を示せ。

問題5 (微分方程式の概念、25点)

- (1) 常微分方程式と偏微分方程式の違いを説明せよ。
- (2) 関数の独立性の定義と判定方法を述べ、関数 e^x と e^{2x} が独立な関数であることを示せ。
- (3) $y(x)$ に対する3階の微分方程式、 $ay''' + by'' + cy' + dy = 0$ について、特性方程式を導出せよ。 a, b, c, d は定数とする。
- (4) 関数 $y(x)$ に対する2階の微分方程式が減衰振動する $y = e^{-2x}(3 \cos x + \sin x)$ を解としてもつとき、その微分方程式の特性方程式は (a) となっているはずなので、もとの微分方程式は (b) とわかる。また、初期条件は $y(0) = (c)$, $y'(0) = (d)$ で与えられていたこともわかる。