

付録 A PC を用いた確率計算実習 [Mathematica]

Mathematica は、Wolfram 社の販売する数式処理ソフトです。グラフ化やシミュレーションまで、今後の学習・研究に役立つことでしょう。

- 情報科学部ではサイトライセンス契約で利用可能となっています。
- 利用方法の詳細は、次のページを参照してください。（講義ページからリンクされています）。

<https://www.oit.ac.jp/is/shinkai/lecture/mathematica.html>

演習室の PC からの起動方法

- Windows から、普通のソフトウェアと同じように、「プログラム」から「Wolfram Mathematica」を選択する。（「Mathematica カーネル」ではない。）
- 起動したら、5! と入力し、「shift+ 中央の enter」または「右端の enter」とキーボードを押して、120 と計算されるかどうか確かめよう。

A.1 課題

A.1 「徹底攻略 常微分方程式」（真貝著、共立出版、2010 年 8 月）の p204–209 を熟読しながら、すべて実行して確かめよ*1。（p210–211 は不要）

A.2 （誕生日問題） N 人集まったとき、誕生日が同じ人がいる確率について考える。

- (1) 自分と同じ誕生日の人がいる確率を求め、 N を横軸としてグラフにせよ。確率が 0.5 を超えるのは、何人以上のときか。
- (2) N 人のなかで、同じ誕生日の人が少なくとも 1 組以上いる確率を求め、 N を横軸としてグラフにせよ。確率が 0.5 を超えるのは、何人以上のときか。

A.3 （サイコロをふる）

- (1) 上記ウェブページより、`dice.txt` を参照し、関数 `dice[n_, m_]` を Mathematica で定義せよ*2。例えば、5 回サイコロをふる試行を行うには、`dice[1,5]` を実行する。この試行を 10 回繰返すには `dice[10,5]` を実行すればよい。
- (2) 20 回サイコロを振り、1–6 の目について出現回数を記録せよ。
- (3) 上記ウェブページより、`dice1.txt` を参照し、関数 `dice1[n_]` を Mathematica で定義せよ。例えば、`dice1[100]` を実行すると、100 回サイコロをふったときの目の出た頻度が表示される。
- (4) サイコロをふって出る目の平均値が、試行回数を増やすと 3.5 に近づいていくことを示せ。

A.4 （2 項分布）酔歩問題やサイコロ問題で登場する 2 項分布 $B(n, p)$ について。

- (1) 2 項分布 $B(n, p)$ で、 $X = k$ のときの確率を表示する関数を作成せよ。
- (2) 酔歩問題。左右どちらかに $1/2$ の確率で歩く酔っぱらいが 10 歩後にいる位置の確率を求めよ。
- (3) (2) をグラフにせよ。

*1 「微積分学 I」「微分方程式」で行った練習と同じ。該当部分は（学内からなら）web ページで pdf が手に入る。

*2 平嶋先生作のスクリプト。

A.5 (標準正規分布)

- (1) 標準正規分布曲線 $f(z)$ をグラフで示せ.
- (2) $f(z)$ の $\alpha \leq z \leq 1000$ の部分の面積を計算する関数を作り, 値を標準正規分布表と比較せよ.
- (3) 知能指数が 125 以上の人は, 何 % いるだろうか.
- (4) 知能指数が 200 以上の人は, 何 % いるだろうか.

A.6 (Buffon の針) 平行線が $2h$ の間隔で無数に引かれている平面に, 長さ 2ℓ (ただし $\ell < h$) の針を無作為に落とすとき, 針が平行線と交わる確率を p とする. p を用いると円周率 π が計算できる.

- (1) 上記ウェブページより, `buffon1.txt` を参照し, 関数 `buffon1[n_, length_]` を Mathematica で定義せよ. `buffon1[100, 0.7]` と実行せよ.
- (2) 講義で解説した例題 1.24 によれば, $\pi = 2\ell/ph$ である. シミュレーションを繰り返すと円周率 π が得られるだろうか. (`buffon1` では, $h = 1$ である).

A.2 方針とヒント

A.2 (誕生日問題)

- (1) 2 人なら, 相手が同じ誕生日の確率は, $\frac{1}{365}$. 3 人なら, $\frac{1}{365} + \frac{1}{365}$.
グラフをプロットするのは, `Plot[...]`
- (2) 余事象を考えることで, 確率は $1 - \frac{{}^{365}P_N}{{}^{365}P_N}$. これをプロットすればよい.
 ${}^{365}P_N$ を関数として組んでみよう.
`f[N]:=...`

A.3 (サイコロをふる)

- (1) 発生する乱数は毎回異なるので, 何回か試してみよう.
- (4) `dice1[ ]` のプログラムを使っても良いが, 次のコマンドを用いてグラフにすることもできる.
乱数を 1 から 6 までの範囲で, 10 個並べる命令文の例. (ついでにグラフも)
`t1 = Table[Random[Integer, {1, 6}], {10}]`
`ListPlot[t1]`
上記の `Table` に格納された数字の和を求めるためには,
`Sum[t1[[i]], {i, 1, 10}]`

付録 B PC を用いた統計計算実習 [Excel または Mathematica]

データ処理の 1 例として, 「父親／母親の身長」と「息子／娘の身長」の相関を調べよう. データは, Excel または Mathematica 形式で, 授業ページからリンクして置いてある.

B.1 課題

次のデータは, 父親・母親とその成人した子供の身長データ (cm) である. 2025–2012 年度の講義中に行ったアンケートから, 兄妹あるいは姉弟の組み合わせの家族構成をもつデータ 327 家族分を抽出した.

B.1 (1) 父親データの標本平均, 標本分散, 標準偏差を求めよ.

(2) 母親データの標本平均, 標本分散, 標準偏差を求めよ.

(3) 息子データの標本平均, 標本分散, 標準偏差を求めよ.

(4) 娘データの標本平均, 標本分散, 標準偏差を求めよ.

B.2 父親・母親・息子・娘 のうちから 2 者を取り出し, 相関係数をそれぞれ求めよ.

B.3 (1) 父親・母親・息子・娘 のうちから 2 者を取り出し, 回帰直線を求めよ.

(2) 父親・母親の身長に対する息子の身長, および娘の身長について, 重回帰分析をせよ.

	x	y	z	w		x	y	z	w		x	y	z	w		x	y	z	w		x	y	z	w		x	y	z	w		x	y	z	w
	父親	母親	息子	娘		父親	母親	息子	娘		父親	母親	息子	娘		父親	母親	息子	娘		父親	母親	息子	娘		父親	母親	息子	娘		父親	母親	息子	娘
1	165	156	168	154		51	175	156	174	164		101	160	165	175	162	151	160	154	166	158		201	168	162	170	162		251	173	155	170	140	
2	169	163	166	155		52	175	163	179	167		102	174	153	180	155	152	173	156	180	156		202	170	150	170	160		252	171	165	170	154	
3	173	159	174	159		53	168	160	173	166		103	170	160	170	156	153	175	163	165	140		203	164	152	160	156		253	160	165	169	168	
4	174	161	173	158		54	160	165	170	165		104	171	158	163	150	154	165	155	170	155		204	176	155	168	159		254	158	155	159	156	
5	175	158	172	162		55	165	150	167	155		105	173	156	172	153	155	170	162	172	160		205	166	165	171	165		255	175	159	162	173	
6	174	150	171	153		56	170	164	167	165		106	170	150	178	152	156	159	160	167	164		206	168	155	173	149		256	183	163	188	162	
7	175	155	160	155		57	166	153	163	153		107	168	150	165	150	157	171	156	166	154		207	175	158	171	164		257	170	153	166	155	
8	171	163	169	164		58	164	166	173	165		108	168	154	172	154	158	174	167	177	158		208	165	153	159	156		258	167	160	171	167	
9	175	158	170	155		59	161	153	165	149		109	165	155	176	160	159	175	160	162	164		209	172	163	175	160		259	170	150	170	160	
10	178	148	165	164		60	175	155	168	166		110	175	163	175	159	160	170	160	163	153		210	168	156	164	158		260	170	165	175	165	
11	163	163	161	152		61	175	152	168	157		111	175	150	170	159	161	173	164	173	165		211	166	157	178	155		261	170	158	173	162	
12	170	155	165	150		62	160	155	165	160		112	175	150	178	170	162	182	162	170	161		212	173	163	174	163		262	180	150	180	160	
13	175	167	171	161		63	163	154	173	160		113	165	150	166	160	163	170	155	176	160		213	168	157	174	170		263	170	150	168	160	
14	172	161	170	164		64	170	154	167	152		114	170	170	175	152	164	167	156	171	157		214	172	155	176	168		264	180	140	165	160	
15	174	161	176	158		65	175	165	173	160		115	160	162	171	152	165	170	169	170	167		215	175	162	168	168		265	170	155	160	160	
16	173	160	175	162		66	167	153	160	136		116	170	160	171	185	166	175	158	180	160		216	169	155	168	155		266	168	165	174	158	
17	175	165	175	165		67	170	165	169	156		117	179	170	182	165	167	178	156	173	163		217	169	155	159	148		267	172	162	177	160	
18	173	152	163	162		68	172	147	169	145		118	176	165	174	167	168	165	158	161	153		218	165	155	182	155		268	176	157	166	154	
19	169	152	167	153		69	172	168	160	153		119	176	160	180	160	169	172	174	170	167		219	171	168	170	163		269	173	155	175	163	
20	180	165	174	165		70	170	160	171	157		120	168	148	169	160	170	172	155	170	160		220	171	159	169	162		270	160	165	176	150	
21	172	150	162	153		71	174	170	185	165		121	175	160	175	158	171	165	155	164	150		221	172	155	174	164		271	165	157	173	154	
22	161	157	171	154		72	170	161	169	155		122	165	154	169	148	172	169	161	172	162		222	176	155	173	160		272	168	159	164	160	
23	168	150	170	153		73	168	158	168	158		123	166	160	161	152	173	164	165	180	160		223	180	165	184	180		273	170	151	164	155	
24	172	162	174	160		74	172	165	164	157		124	170	155	166	152	174	171	162	181	153		224	165	155	165	150		274	172	155	175	160	
25	178	155	172	166		75	169	162	172	165		125	180	147	160	155	175	168	165	170	160		225	183	165	169	163		275	180	160	170	170	
26	165	154	173	163		76	175	165	171	162		126	170	146	170	155	176	159	157	165	160		226	165	150	161	150		276	176	153	171	148	
27	163	158	172	160		77	169	162	180	163		127	173	160	175	170	177	171	156	179	160		227	167	145	157	149		277	170	165	166	160	
28	160	150	170	150		78	178	159	175	160		128	165	165	170	150	178	160	150	165	145		228	179	162	178	170		278	172	167	174	154	
29	177	156	172	156		79	189	170	179	169		129	173	162	186	163	179	183	160	168	164		229	178	158	176	164		279	160	160	164	155	
30	169	150	169	160		80	175	165	169	165		130	169	157	173	160	180	173	163	170	152		230	165	155	172	157		280	165	150	163	156	
31	175	155	168	160		81	164	166	172	163		131	174	162	178	160	181	167	164	173	160		231	176	158	164	164		281	168	148	153	150	
32	170	158	172	162		82	175	160	178	163		132	176	156	168	158	182	178	159	170	160		232	180	152	169	166		282	180	170	180	165	
33	167	158	171	162		83	155	145	159	150		133	170	160	170	158	183	171	155	162	156		233	170	160	177	160		283	174	162	173	160	
34	168	160	175	162		84	175	164	164	158		134	180	165	170	170	184	160	167	168	153		234	171	156	173	153		284	176	163	175	160	
35	170	155	164	152		85	173	163	171	165		135	173	154	172	156	185	173	158	177	160		235	178	173	175	163		285	173	150	171	148	
36	163	155	158	155		86	165	160	170	165		136	178	158	172	156	186	175	160	178	160		236	185	165	180	170		286	182	166	174	167	
37	170	165	178	170		87	160	150	166	153		137	170	165	177	160	187	170	163	173	165		237	170	155	163	168		287	172	167	170	172	
38	168	165	179	168		88	167	153	172	165		138	170	160	168	157	188	170	150	165	155		238	175	163	181	165		288	165	165	174	162	
39	171	164	177	170		89	175	154	171	150		139	164	160	171	161	189	175	160	165	155		239	164	155	163	161		289	150	160	166	150	
40	174	157	168	157		90	176	150	174	168		140	176	160	172	165	190	172	155	175	160		240	182	165	180	170		290	173	160	175	163	
41	171	164	178	159		91	178	163	173	165		141	175	160	170	163	191	181	158	172	170		241	174	160	168	167		291	173	162	163	152	
42	170	150	170	160		92	180	165	175	165		142	173	155	160	155	192	167	158	166	160		242	168	160	175	160		292	176	160	167	168	
43	164	160	180	163		93	167	155	170	159		143	178	164	186	166	193	179	165	178	166		243	172	160	178	161		293	161	154	167	155	
44	175	155	170	157		94																												

B.2 ヒント

■平均，積和

n 個のデータ (x_i, y_i) , $(i = 1, \dots, n)$ が与えられているとき，平均と積和は，次のように定義される．

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_i x_i, & S_{xx} &= \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \\ \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_i y_i, & S_{xy} &= \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\end{aligned}$$

■相関係数

x と y の対からなる標本 (x_i, y_i) ($i = 1, \dots, n$) の相関係数 r は

$$r = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left[\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \right] \left[\sum_i (y_i - \bar{y})^2 \right]}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} \quad (\text{付録 B.1})$$

■最小 2 乗法による回帰直線解析

n 個のデータ (x_i, y_i) , $(i = 1, \dots, n)$ が与えられているとき，これらのデータ分布を，もっとも良く近似する直線（回帰直線）を

$$y(x) = ax + b \quad (\text{付録 B.2})$$

とすると，

$$a = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (\text{付録 B.3})$$

■2 変数に対する回帰方程式（重回帰解析）

データ y を，2 個のデータ (x_1, x_2) を用いて表現する回帰方程式

$$y(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 + b \quad (\text{付録 B.4})$$

の係数は次のように求められる．

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} S_{x_1y} & S_{x_1x_2} \\ S_{x_2y} & S_{x_2x_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{x_1x_1} & S_{x_1x_2} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2x_2} \end{vmatrix}}, \quad a_2 = \frac{\begin{vmatrix} S_{x_1x_1} & S_{x_1y} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{x_1x_1} & S_{x_1x_2} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2x_2} \end{vmatrix}}, \quad b = \bar{y} - a_1\bar{x}_1 - a_2\bar{x}_2 \quad (\text{付録 B.5})$$

$$\text{ただし, } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$