

A PCを用いた確率計算実習 [Mathematica]

Mathematica は、Wolfram 社の販売する数式処理ソフトです。グラフ化やシミュレーションまで、今後の学習・研究に役立つことでしょう。

- 情報科学部ではサイトライセンス契約で利用可能となっています。
- 利用方法の詳細は、次のページを参照してください。(講義ページからリンクされています)。
<https://www.oit.ac.jp/labs/is/system/shinkai/lecture/mathematica.html>

演習室の PC からの起動方法

- Windows から、普通のソフトウェアと同じように、「プログラム」から「Wolfram Mathematica」を選択する。(「Mathematica kernel」ではない。)
- 起動したら、 $5!$ と入力し、「shift+中央の enter」または「右端の enter」とキーボードを押して、 120 と計算されるかどうか確かめよう。

A.1 課題

A.1 「徹底攻略 常微分方程式」(真貝著、共立出版、2010 年 8 月)の p204-209 を熟読しながら、すべて実行して確かめよ¹。(p210-211 は不要)

A.2 (誕生日問題) N 人集まったとき、誕生日が同じ人がいる確率について考える。

- (1) 自分と同じ誕生日の人がいる確率を求め、 N を横軸としてグラフにせよ。確率が 0.5 を超えるのは、何人以上のときか。
- (2) N 人のなかで、同じ誕生日の人が少なくとも 1 組以上いる確率を求め、 N を横軸としてグラフにせよ。確率が 0.5 を超えるのは、何人以上のときか。

A.3 (サイコロをふる)

- (1) 上記ウェブページより、`dice.txt` を参照し、関数 `dice[n_, m_]` を Mathematica で定義せよ²。例えば、5 回サイコロをふる試行を行うには、`dice[1,5]` を実行する。この試行を 10 回繰返すには `dice[10,5]` を実行すればよい。
- (2) 20 回サイコロを振り、1-6 の目について出現回数を記録せよ。
- (3) 上記ウェブページより、`dice1.txt` を参照し、関数 `dice1[n_]` を Mathematica で定義せよ。例えば、`dice1[100]` を実行すると、100 回サイコロをふったときの目の出た頻度が表示される。
- (4) サイコロをふって出る目の平均値が、試行回数を増やすと 3.5 に近づいていくことを示せ。

A.4 (2 項分布) 酔歩問題やサイコロ問題で登場する 2 項分布 $B(n, p)$ について。

- (1) 2 項分布 $B(n, p)$ で、 $X = k$ のときの確率を表示する関数を作成せよ。
- (2) 酔歩問題。左右どちらかに $1/2$ の確率で歩く酔っぱらいが 10 歩後にいる位置の確率を求めよ。
- (3) (2) をグラフにせよ。

¹ 「微積分学 I」「微分方程式」で行った練習と同じ。該当部分は(学内からなら)web ページで pdf が手に入る。

² 平嶋先生作のスク립ト。

A.5 (標準正規分布)

- (1) 標準正規分布曲線 $f(z)$ をグラフで示せ.
- (2) $f(z)$ の $\alpha \leq z \leq 1000$ の部分の面積を計算する関数を作り, 値を標準正規分布表と比較せよ.
- (3) 知能指数が 125 以上の人は, 何% いるだろうか.
- (4) 知能指数が 200 以上の人は, 何% いるだろうか.

A.6 (Buffon の針) 平行線が $2h$ の間隔で無数に引かれている平面に, 長さ 2ℓ (ただし $\ell < h$) の針を無作為に落とすとき, 針が平行線と交わる確率を p とする. p を用いると円周率 π が計算できる.

- (1) 上記ウェブページより, `buffon1.txt` を参照し, 関数 `buffon1[n_, length_]` を Mathematica で定義せよ. `buffon1[100, 0.7]` と実行せよ.
- (2) 講義で解説した例題 1.24 によれば, $\pi = 2\ell/ph$ である. シミュレーションを繰り返すと円周率 π が得られるだろうか. (`buffon1` では, $h = 1$ である).

A.2 方針とヒント

A.2 (誕生日問題)

- (1) 2 人なら, 相手が同じ誕生日の確率は, $\frac{1}{365}$. 3 人なら, $\frac{1}{365} + \frac{1}{365}$.
グラフをプロットするのは, `Plot[...]`
- (2) 余事象を考えることで, 確率は $1 - \frac{365P_N}{365^N}$. これをプロットすればよい.
 $\frac{365P_N}{365^N}$ を関数として組んでみよう.
`f[N]:=...`

A.3 (サイコロをふる)

- (1) 発生する乱数は毎回異なるので, 何回か試してみよう.
- (4) `dice1[ ]` のプログラムを使っても良いが, 次のコマンドを用いてグラフにすることもできる.
乱数を 1 から 6 までの範囲で, 10 個並べる命令文の例. (ついでにグラフも)
`t1 = Table[Random[Integer, {1, 6}], {10}]`
`ListPlot[t1]`
上記の `Table` に格納された数字の和を求めるためには,
`Sum[t1[[i]], {i, 1, 10}]`

B PCを用いた統計計算実習 [Excel または Mathematica]

データ処理の1例として、「父親／母親の身長」と「息子／娘の身長」の相関を調べよう．データは、Excel または Mathematica 形式で、授業ページからリンクして置いてある．

B.1 課題

次のデータは、父親・母親とその成人した子供の身長データ (cm) である．2026–2012 年度の講義中に行ったアンケートから、兄妹あるいは姉弟の組み合わせの家族構成をもつデータ 327 家族分を抽出した．

B.1 (1) 父親データの標本平均、標本分散、標準偏差を求めよ．

(2) 母親データの標本平均、標本分散、標準偏差を求めよ．

(3) 息子データの標本平均、標本分散、標準偏差を求めよ．

(4) 娘データの標本平均、標本分散、標準偏差を求めよ．

B.2 父親・母親・息子・娘 のうちから2者を取り出し、相関係数をそれぞれ求めよ．

B.3 (1) 父親・母親・息子・娘 のうちから2者を取り出し、回帰直線を求めよ．

(2) 父親・母親の身長に対する息子の身長、および娘の身長について、重回帰分析をせよ．

x	y	z	w	x	y	z	w	x	y	z	w	x	y	z	w	x	y	z	w	x	y	z	w	
1	165	156	168	154	61	175	152	168	157	121	175	160	175	158	181	167	164	173	160	241	174	160	168	167
2	169	163	166	155	62	160	155	165	155	122	165	154	169	148	182	178	159	170	160	242	168	160	175	160
3	173	159	174	159	63	163	154	173	160	123	166	160	161	152	183	171	155	163	156	243	172	160	178	161
4	174	161	173	158	64	170	154	167	152	124	170	155	164	152	184	160	167	163	153	244	180	152	173	160
5	175	158	172	162	65	175	165	173	160	125	180	147	160	155	185	173	158	177	160	245	167	153	165	159
6	174	150	171	153	66	167	153	160	136	126	170	146	170	155	186	175	160	178	160	246	170	162	158	170
7	175	155	160	155	67	170	165	169	156	127	173	160	175	170	187	170	163	173	165	247	181	157	167	159
8	171	163	169	164	68	172	147	169	145	128	165	165	170	150	188	170	150	165	155	248	168	160	170	161
9	175	158	170	155	69	172	168	160	153	129	173	162	186	163	189	175	160	165	155	249	172	154	168	149
10	178	148	165	164	70	170	160	171	157	130	169	157	173	160	190	172	155	175	160	250	173	155	172	163
11	165	163	161	152	71	174	170	185	165	131	174	162	178	160	191	181	158	172	170	251	173	155	170	140
12	170	155	165	150	72	170	161	189	153	132	176	156	168	158	192	167	158	166	160	252	171	165	170	154
13	175	167	171	161	73	168	158	168	158	133	170	160	170	158	193	179	165	178	166	253	160	165	169	168
14	172	161	170	164	74	172	165	164	157	134	180	165	170	170	194	165	155	168	160	254	158	155	159	156
15	174	161	176	158	75	169	162	172	165	135	173	154	172	156	195	182	155	183	155	255	175	159	162	173
16	173	160	175	162	76	175	165	171	162	136	178	158	172	156	196	167	166	177	155	256	183	163	188	162
17	175	165	175	165	77	169	162	180	163	137	170	165	177	160	197	183	162	187	160	257	170	153	166	155
18	173	152	163	162	78	178	159	175	160	138	170	160	168	157	198	170	165	170	160	258	167	160	171	167
19	169	152	167	153	79	189	170	179	169	139	164	160	171	161	199	167	168	170	168	259	170	150	170	160
20	180	165	174	165	80	175	165	169	165	140	176	160	172	165	200	170	157	167	160	260	170	165	175	165
21	172	150	162	153	81	164	166	172	163	141	175	160	170	163	201	168	162	170	162	261	170	158	173	162
22	161	157	171	154	82	175	160	178	163	142	173	155	160	155	202	170	150	170	160	262	180	150	180	160
23	168	150	170	153	83	155	145	159	150	143	178	164	186	166	203	164	152	160	156	263	170	150	168	160
24	172	162	174	160	84	175	164	164	158	144	170	165	173	160	204	178	155	168	159	264	180	140	165	160
25	178	155	172	166	85	173	163	171	165	145	175	160	174	161	205	166	165	171	165	265	170	155	160	160
26	165	154	173	163	86	165	160	170	165	146	170	160	172	165	206	168	155	173	149	266	168	165	174	158
27	163	158	172	160	87	160	150	166	153	147	170	150	170	160	207	175	158	171	164	267	172	162	177	160
28	160	150	170	150	88	167	153	172	165	148	175	165	176	165	208	165	153	159	156	268	176	157	166	154
29	177	156	172	156	89	175	154	171	150	149	169	158	165	155	209	172	163	175	160	269	173	155	175	163
30	169	150	169	160	90	176	150	174	168	150	187	164	180	171	210	168	156	164	158	270	160	165	176	150
31	175	155	168	160	91	178	163	173	165	151	160	154	166	158	211	166	157	178	155	271	165	157	173	154
32	170	158	172	162	92	180	165	175	165	152	173	156	180	156	212	173	163	174	163	272	168	159	164	160
33	167	158	171	162	93	167	155	170	158	153	175	163	165	140	213	168	157	174	170	273	170	151	164	155
34	168	160	175	162	94	168	160	163	161	154	165	155	170	155	214	172	155	176	168	274	172	155	175	160
35	170	155	164	152	95	165	159	160	155	155	170	162	172	160	215	175	162	168	168	275	180	160	170	170
36	163	155	158	155	96	167	165	165	158	156	159	160	167	164	216	169	155	168	155	276	176	153	171	148
37	170	165	178	170	97	164	150	176	160	157	171	156	166	154	217	169	155	159	148	277	170	165	166	160
38	168	165	179	168	98	170	164	160	160	158	174	167	177	158	218	165	155	182	155	278	172	167	174	154
39	171	164	177	170	99	155	165	170	167	159	175	160	162	164	219	171	168	170	163	279	160	160	164	155
40	174	157	168	157	100	174	160	152	160	160	170	160	163	153	220	171	159	169	162	280	165	150	163	156
41	171	164	178	159	101	160	165	175	162	161	173	164	173	165	221	172	155	174	164	281	168	148	153	150
42	170	150	170	160	102	174	153	180	155	162	182	162	170	161	222	176	155	173	160	282	180	170	180	165
43	164	160	180	163	103	170	160	170	156	163	170	155	176	160	223	180	165	184	180	283	174	162	173	160
44	175	155	170	157	104	171	158	163	150	164	167	156	171	157	224	165	155	165	150	284	176	163	175	160
45	175	158	173	175	105	173	156	172	153	165	170	169	170	167	225	183	165	169	163	285	173	150	171	148
46	171	170	172	155	106	170	150	178	152	166	175	158	180	160	226	165	150	161	150	286	182	166	174	167
47	155	160	177	154	107	168	150	165	150	167	178	156	173	163	227	167	145	157	149	287	172	167	170	172
48	175	150	178	170	108	168	154	172	154	168	165	158	161	153	228	179	162	178	170	288	165	165	174	162
49	171	165	160	158	109	165	155	176	160	169	172	174	170	157	229	178	158	176	164	289	150	160	166	150
50	165	153	172	154	110	175	163	175	159	170	172	155	164	150	230	165	155	172	157	290	173	160	175	163
51	175	156	174	164	111	175	150	170	159	171	165	155	164	150	231	176	158	164	164	291	173	162	163	152
52	175	163	179	167	112	175	150	178	170	172	169	161	172	162	232	180	152	169	166	292	176	160	167	168
53	168	160	173	166	113	165	150	166	160	173	164	165	180	160	233	170	160	177	160	293	161	154	167	155
54	160	165	170	165	114	170	170	175	152	174	171	163	181	153	234	171	156	173	153	294	178	152	167	159
55	165	150	167	155	115	160	162	171	152	175	168	165	170	160	235	178	173	175	163	295	173	168	179	160
56	170	164	167	165	116	170	160	171	185	176	159	157	165	160	236	185	165	180	170	296	168	160	175	160
57	166	153	163	153	117	179	170	182	161	177	171	170	185	163	237	179	160	185	168	297	176	160	180	175
58	164	166	173	165	118	176	165	174	167	178	160	150	165	145	238	175	163	181	165	298	175	160	173	163
59	161	153	165	149	119	176	160	180	160	179	183	160	168	164	239	164	155	163	161	299	172	167	170	

B.2 ヒント

平均, 積和

n 個のデータ (x_i, y_i) , $(i = 1, \dots, n)$ が与えられているとき, 平均と積和は, 次のように定義される.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_i x_i, & S_{xx} &= \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \\ \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_i y_i, & S_{xy} &= \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\end{aligned}$$

相関係数

x と y の対からなる標本 (x_i, y_i) ($i = 1, \dots, n$) の相関係数 r は

$$r = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left[\sum_i (x_i - \bar{x})^2\right] \left[\sum_i (y_i - \bar{y})^2\right]}} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} \quad (\text{B.1})$$

最小2乗法による回帰直線解析

n 個のデータ (x_i, y_i) , $(i = 1, \dots, n)$ が与えられているとき, これらのデータ分布を, もっとも良く近似する直線 (回帰直線) を

$$y(x) = ax + b \quad (\text{B.2})$$

とすると,

$$a = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (\text{B.3})$$

2変数に対する回帰方程式 (重回帰解析)

データ y を, 2 個のデータ (x_1, x_2) を用いて表現する回帰方程式

$$y(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 + b \quad (\text{B.4})$$

の係数は次のように求められる.

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} S_{x_1y} & S_{x_1x_2} \\ S_{x_2y} & S_{x_2x_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{x_1x_1} & S_{x_1x_2} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2x_2} \end{vmatrix}}, \quad a_2 = \frac{\begin{vmatrix} S_{x_1x_1} & S_{x_1y} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{x_1x_1} & S_{x_1x_2} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2x_2} \end{vmatrix}}, \quad b = \bar{y} - a_1\bar{x}_1 - a_2\bar{x}_2 \quad (\text{B.5})$$

ただし, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.