

第8回 講義内容

2025/11/10

配布物

- 08_Cosmology_contents.pdf このファイル Google classroom, web
- 08_Cosmology2025_Viewgraph.pdf スライド Google classroom, web
スライドファイルは当日朝に配布します。

講義内容 (予定)

- §3.2 特殊相対性理論
 $E = mc^2$ 、放射性炭素年代測定法
- §3.3 一般相対性理論
アインシュタイン方程式、水星の近日点移動、皆既日食、ブラックホール

本日の復習課題例

こんなことを観たり、調べたり、考えてもらったら面白いかな、という程度のおまけ。

- アインシュタインが特殊相対性理論 (1905 年) をつくったとき、すでにローレンツ変換の式があった。アインシュタインが一般相対性理論 (1915 年) をつくったとき、ヒルベルトも同様の方程式に到達していた。それでもなお、どちらもアインシュタインの業績と言われるのは何故だろうか。

次回の予習項目

こんなことを調べてもらったら面白いかな、という程度の課題。

- 次回はブラックホールと重力波の話です。
- アインシュタインは、一般相対性理論から導かれる結論であるブラックホール・宇宙膨張・重力波のいずれに対しても当初拒絶反応を示したという。どんな理由からだろうか。そしてどうなったのだろうか。

お知らせ

- レポート課題 (第2回) は、11月17日に課題を発表し、12月28日 (日) 23:59 締め切りとする予定です。

3. 現代物理1: 相対性理論 3.3 一般相対性理論 教科書 p80

一般相対性理論の出発点

★ 特殊相対性理論は、加速運動する座標系を取り扱えなかった。

加速運動する相対性理論をつくらなくては...

次の2つを出発点としよう

一般相対性原理・光速一定の原理

(A) 一般相対性原理: 物理法則は、どのような局所慣性系[†]でも同じ形で書かれていなければならない (一般座標変換に対して不変である)。

物理法則はどの座標系でも同じとなるべきだ

(B) 光速一定の原理: 真空中の光の速度は、すべての局所慣性系で等しい。

光速は常に一定である

[†] 慣性の法則が成立する (すなわちふつうの物理法則が成立する) 座標系を慣性系という。「局所」という語は、観測者のいる小さな領域で、の意味。

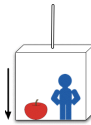
加速をどう扱うか? 慣性力 (遠心力) を考えるのは煩わしい...

加速運動している系では慣性力を考えて運動方程式を立てなければならない...

3. 現代物理1: 相対性理論 3.3 一般相対性理論 教科書 p81

エレベータの思考実験

加速の正体を考えているうちに、重力加速の取り扱いをどうするかで悩んでいた。エレベータのひもが切れたらどうだろうか??



「重力加速度は、自由落下しているエレベータでは相殺されてしまう」
= 加速度は局所的に消去可能 (等価原理)

エレベータ内では重力を消すことができるけど、.....
エレベータを大きなサイズにすると消すことができない!

人生で最も幸福なひらめき

3. 現代物理1:相対性理論 3.3 一般相対性理論 教科書 p82

重力の原因は、空間のもつ性質だ

「重力加速度は、自由落下しているエレベータでは相殺されてしまう」
⇒加速度は**局所的に消去可能 (等価原理)**

人生で最も幸福なひらめき

＝重力は、大域的には消去できない
＝重力の正体は、時空のもつ曲がり具合である。
曲がった時空の幾何学＝「一般相対性理論」

61

3. 現代物理1:相対性理論 3.3 一般相対性理論 教科書 p83

曲がった空間とは？

曲がった時空の幾何学＝リーマン幾何学

4次元距離を一般化した「計量(metric)」

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

平坦な時空(flat spacetime)では、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

リーマン幾何学があるよ
時空の曲がりはリーマン幾何学で表される

正の曲率 (地球表面)

62

3. 現代物理1:相対性理論 3.3 一般相対性理論 教科書 p83

重力場の方程式(アインシュタイン方程式)

重力の正体は、時空の歪みである。その関係は、次の式で表される。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

時空の歪み 質量の分布

左辺はリーマン幾何学にもとづいて時空がどのように曲がっているのかを表している。右辺は物体がどのように分布しているのかを表す量である。

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu})$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \Gamma_{\mu\beta}^\alpha$$

$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \Gamma_{\mu\beta}^\alpha$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

重力の正体は、空間の性質だ
空間のゆがみが
重力の正体だ

63

一般相対性理論(1915年)

◆Advanced 万有引力の法則
質量 m と M の両方が r だけ離れて置かれているとき、距離にはたらく力は、大きさが $F = G \frac{Mm}{r^2}$ (2.2)
でつなぐ引力である。 G は定数であり、万有引力定数と呼ぶ。

空間のゆがみが重力の原因だ
光や物体は まっすぐ進んで
いるつもりでも 曲がって進む

64

3. 現代物理1:相対性理論 3.3.5 一般相対性理論が予測するもの 教科書 p88

水星の近日点移動

水星の近日点移動の問題 (ルベエ, 1854)
100年で574秒角ずれる。2250世紀で完全な「ばらばら」
→金星の影響で277秒角、木星で153秒角、地球で90秒角。
その他の惑星で10秒角分の誤差が可能。
残りの43秒角は???

1915年、アインシュタインが、できたばかりの一般相対性理論を適用すると、「43秒角の過剰運動」が出てきた。

心震の感動を感じた

最終的に一般相対性理論は、一つの論理的厳密な理論としてここに完成した。(1915年11月25日)

65

3. 現代物理1:相対性理論 3.3.5 一般相対性理論が予測するもの 教科書 p88

アインシュタインも一般相対性理論の結論に右往左往する

- 重力によってゆがんだ空間では、光の経路も曲がる(重力レンズ)
- 重力によってゆがんだ空間では、時間の進み方は遅くなる(重力赤方偏移)
- 強い重力のもとでは星はつぶれ続ける(ブラックホール)
- 宇宙全体は動的でなければならない(膨張宇宙)
- 重力波が宇宙空間を伝わる(重力波)

ブラックホール特異点は解明する固定された点だ
宇宙は膨張するはずない
重力波は座標系の変換で消せる
一般相対性理論は日常生活に影響することはない

66

3. 現代物理1:相対性理論 3.3.5 一般相対性理論が予測するもの 教科書 p88

重力レンズ効果 >>> 1919年の皆既日食で確認

重力によってゆがんだ空間では、光の経路も曲がる

見かけの星の位置 実際の星の位置

光線 光線が来る方向

実際の星の位置 太陽

1919年5月の皆既日食で太陽のすぐ近くにみえる星の位置が普段の位置とずれていた

68

【話題】「一般相対性理論を理解しているのは世界に3人とされていますが？」

Arthur Stanley Eddington (1882-1944)

Silberstein「一般相対性理論を理解しているのは世界に3人とされていますが？」
Eddington「...」
Silberstein「そう謙遜なさらないで」
Eddington「いや、誰が3人目かを考えています」

He was an early advocate of Einstein's General Relativity, and an interesting anecdote well illustrates his humour and personal intellectual investment: Ludwig Silberstein, a physicist who thought of himself as an expert on relativity, approached Eddington at the Royal Society's (6 November) 1919 meeting where he had defended Einstein's Relativity with his Brazil-Principe Solar Eclipse calculations with some degree of scepticism and ruefully charged Arthur as one who claimed to be one of three men who actually understood the theory (Silberstein, of course, was including himself and Einstein as the other two). When Eddington refrained from replying, he insisted Arthur not be "so shy", whereupon Eddington replied, "Oh, no! I was wondering who the third one might be!"

70