memo

ディジタル電子回路

授業開始までしばらくお待ちください。

オンライン視聴できない人へ。

オンラインで受講する人も基本的に一緒です。

自宅ネットワークの事情により、授業のストリーミング配信の視聴が困難な学生は以下の対応をしてください。

1. この授業のスライドをよく読んで、不明な点は自分で調べるなどして、わかる範囲で内容を理解する。
2. このページも含め、**必要な部分がすべて理解できたと思うまで以下の 2 ステップを繰り返す**。
   - わからない部分を e-mail で質問する。(宛先は `hiroyuki.kobayashi@oit.ac.jp`)
   - 返信 e-mail をよく読んで理解する。
3. この資料の末尾にある課題を行い、この資料内の方法で (Google Forms で) 提出する。

授業の受講に関して

- 講義資料（スライド等）は**COMMON**に置く。
- 講義は**Google Meet** で行い、録画した講義は**Goole Drive**に置く。

  https://stream.meet.google.com/stream/1d1866da-5bff-4881-96b2-3745413fe31a

  https://drive.google.com/drive/folders/1bT-z3ICQyMYC_5JvlL29UZYqbOhVG492
- 出席確認レポートは**Google Forms** に提出。(毎回同一 URL)

  https://forms.gle/9ruwtfJg5LQgQNpU7
- **Slack**を補助的な連絡チャネルとする。必須ではないので使いたくなければ使わなくてもいい。授業に関連したちょっとした（重要でない）追加説明をする。気楽な質問手段としても活用されたい。登録は大学の e-mail アドレスで行うこと。

  https://oitkobayashi.slack.com

R/S 科ディジタル電子回路
Digital Electronics
『Re: ブール代数』

Google Meet

小林裕之・中泉文孝

大阪工業大学 RD 学部システムデザイン工学科・ロボット工学科

OSAKA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

1 of 14

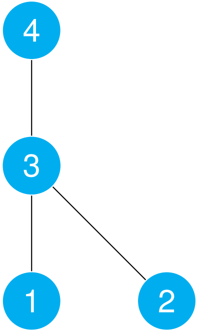
a LaTeX + Beamer slideshow

離散数学の復習

上界と上限

半順序集合 $(A; \preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t.　　　　　　　なる a を　　　　　　という。
- M の　　全体の集合に最小元が存在するなら、それを　　　　　　といい、　　　　と表す。

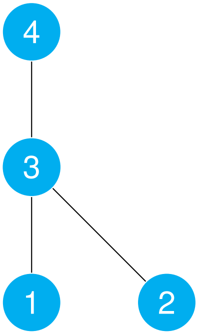


- $\{1, 2, 3\}$ の上界:
- $\sup \{1, 2, 3\}$:
- $\{1, 2\}$ の上界:
- $\sup \{1, 2\}$:

上界と上限

半順序集合 $(A; \preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, x \preceq a$ なる a を　　　　　という。
- M の　　　全体の集合に最小元が存在するなら、それを　　　　　といい、　　　　と表す。

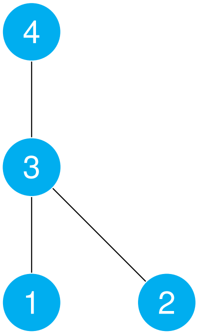


- $\{1, 2, 3\}$ の上界:
- $\sup\{1, 2, 3\}$:
- $\{1, 2\}$ の上界:
- $\sup\{1, 2\}$:

上界と上限

半順序集合 $(A;\preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, x \preceq a$ なる a をM**の上界**という。
- M の上界全体の集合に最小元が存在するなら、それを　　　　　といい、　　　　と表す。

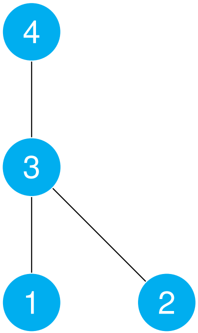


- $\{1,2,3\}$ の上界:
- $\sup\{1,2,3\}$:
- $\{1,2\}$ の上界:
- $\sup\{1,2\}$:

上界と上限

半順序集合 $(A; \preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, x \preceq a$ なる a を M **の上界**という。
- M の上界全体の集合に最小元が存在するなら、それを M **の上限**といい、と表す。

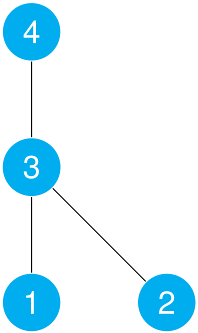


- $\{1, 2, 3\}$ の上界:
- $\sup \{1, 2, 3\}$:
- $\{1, 2\}$ の上界:
- $\sup \{1, 2\}$:

上界と上限

半順序集合 $(A; \preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M,\ x \preceq a$ なる a を**M の上界**という。
- M の上界全体の集合に最小元が存在するなら、それを **M の上限**といい、$\sup M$と表す。

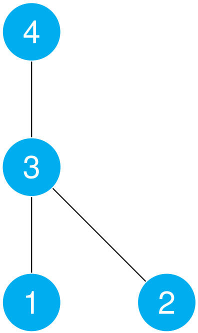


- $\{1, 2, 3\}$ の上界:
- $\sup\{1, 2, 3\}$:
- $\{1, 2\}$ の上界:
- $\sup\{1, 2\}$:

上界と上限

半順序集合 $(A; \preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, x \preceq a$ なる a をM **の上界**という。
- M の上界全体の集合に最小元が存在するなら、それを M **の上限**といい、$\sup M$と表す。

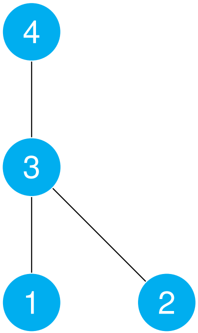


- $\{1, 2, 3\}$ の上界: 3 と 4
- $\sup\{1, 2, 3\}$:
- $\{1, 2\}$ の上界:
- $\sup\{1, 2\}$:

上界と上限

半順序集合 $(A; \preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M,\ x \preceq a$ なる a を M **の上界**という。
- M の上界全体の集合に最小元が存在するなら、それを M **の上限**といい、$\sup M$ と表す。

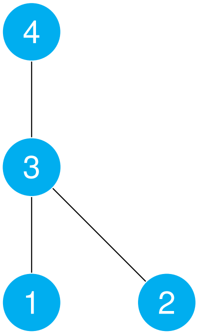


- $\{1, 2, 3\}$ の上界: 3 と 4
- $\sup\{1, 2, 3\}$: 3
- $\{1, 2\}$ の上界:
- $\sup\{1, 2\}$:

上界と上限

半順序集合 $(A; \preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M,\ x \preceq a$ なる a をM **の上界**という。
- M の上界全体の集合に最小元が存在するなら、それを M **の上限**といい、$\sup M$と表す。

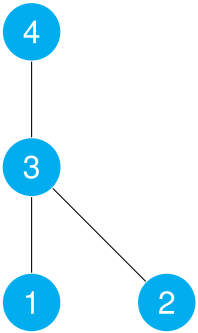


- $\{1, 2, 3\}$ の上界: 3 と 4
- $\sup\{1, 2, 3\}$: 3
- $\{1, 2\}$ の上界: 3 と 4
- $\sup\{1, 2\}$:

上界と上限

半順序集合 $(A; \preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, x \preceq a$ なる a をM **の上界**という。
- M の上界全体の集合に最小元が存在するなら、それを M **の上限**といい、$\sup M$と表す。

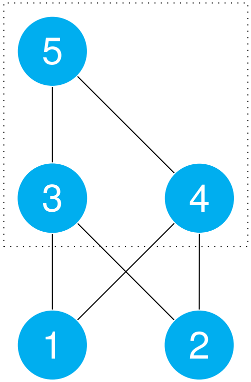


- $\{1, 2, 3\}$ の上界: 3 と 4
- $\sup \{1, 2, 3\}$: 3
- $\{1, 2\}$ の上界: 3 と 4
- $\sup \{1, 2\}$: 3

下界と下限

半順序集合 $A; \preceq$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

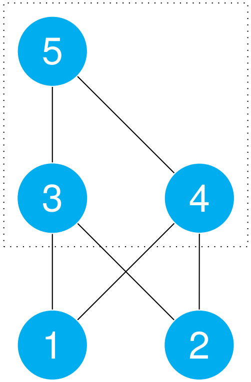
- $a \in A$ s.t. なる a を という。
- M の 全体の集合に最大元が存在するなら、それを といい、 と表す。



- $\{3, 4, 5\}$ の下界:
- $\inf \{3, 4, 5\}$:

半順序集合 $A; \preceq$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, a \preceq x$ なる a を　　　　　という。
- M の　　　全体の集合に最大元が存在するなら、それを　　　　　といい、　　　と表す。

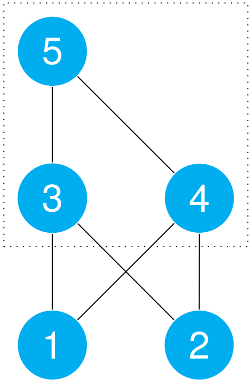


- $\{3, 4, 5\}$ の下界:
- $\inf\{3, 4, 5\}$:

下界と下限

半順序集合 $A; \preceq$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, a \preceq x$ なる a を**M の下界**という。
- M の下界全体の集合に最大元が存在するなら、それを　　　　　といい、　　　　と表す。

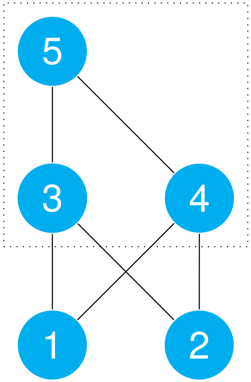


- $\{3, 4, 5\}$ の下界:
- $\inf \{3, 4, 5\}$:

下界と下限

半順序集合 $A; \preceq$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M,\ a \preceq x$ なる a をM **の下界**という。
- M の下界全体の集合に最大元が存在するなら、それを M **の下限**といい、$\inf M$ と表す。

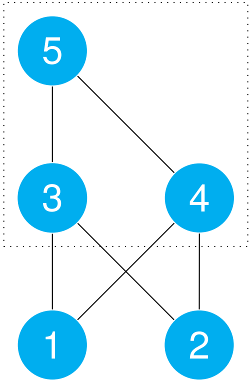


- $\{3, 4, 5\}$ の下界:
- $\inf \{3, 4, 5\}$:

下界と下限

半順序集合 $A; \preceq$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M,\ a \preceq x$ なる a をM **の下界**という。
- M の下界全体の集合に最大元が存在するなら、それを M **の下限**といい、$\inf M$と表す。

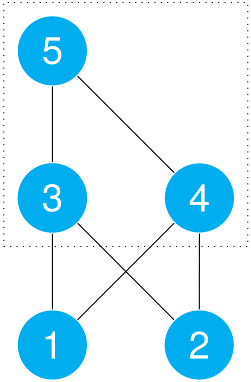


- $\{3, 4, 5\}$ の下界:
- $\inf \{3, 4, 5\}$:

下界と下限

半順序集合 $A; \preceq$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, a \preceq x$ なる a を M **の下界**という。
- M の下界全体の集合に最大元が存在するなら、それを M **の下限**といい、$\inf M$ と表す。

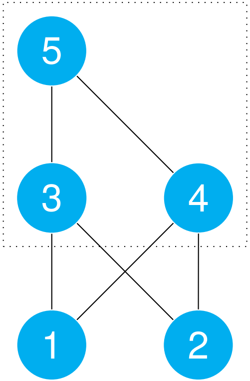


- $\{3, 4, 5\}$ の下界: 1 と 2
- $\inf \{3, 4, 5\}$:

下界と下限

半順序集合 $A; \preceq$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, a \preceq x$ なる a を M **の下界**という。
- M の下界全体の集合に最大元が存在するなら、それを M **の下限**といい、$\inf M$ と表す。



- $\{3, 4, 5\}$ の下界: 1 と 2
- $\inf\{3, 4, 5\}$: なし

半順序集合 $(A; \preceq)$ において、$\forall a, b \in A$ に対し, $\sup\{a, b\}$ と $\inf\{a, b\}$ が存在するとき $(A; \preceq)$ を**束**という。要するにどの 2 つを持ってきても**上限と下限が存在**する、という意味。

束で作る代数系

順序集合 $(L;\ \preceq)$ が束であれば、2 つの**演算**

- $x \vee y \triangleq \sup\{x,\ y\}$
- $x \wedge y \triangleq \inf\{x,\ y\}$

で、**代数系**$(L;\ \vee,\ \wedge)$が作れる。

$\vee$ $\wedge$

束で作る代数系

順序集合 $(L;\ \preceq)$ が束であれば、2 つの**演算**

- $x \vee y \triangleq \sup\{x,\ y\}$
- $x \wedge y \triangleq \inf\{x,\ y\}$

で、**代数系**$(L;\ \vee,\ \wedge)$が作れる。

$\vee \longrightarrow \boxed{\text{上限演算}}$　　$\wedge \longrightarrow \boxed{\text{下限演算}}$

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee, \wedge$ は以下を満たす。

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee$, $\wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee$, $\wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$ べき等律

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee, \wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a,\ a \wedge a = a$　　べき等律
- $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee, \wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a,\ a \wedge a = a$ 　べき等律
- $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$ 　交換律 (対称律)

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee, \wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a,\ a \wedge a = a$ 　べき等律
- $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$ 　交換律 (対称律)
- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee, \wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a,\ a \wedge a = a$ べき等律
- $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$ 交換律 (対称律)
- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ 結合律

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee, \wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a,\ a \wedge a = a$ べき等律
- $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$ 交換律 (対称律)
- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ 結合律
- $a \vee (a \wedge b) = a,\ a \wedge (a \vee b) = a$

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee, \wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a,\ a \wedge a = a$　べき等律
- $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$　交換律 (対称律)
- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$　結合律
- $a \vee (a \wedge b) = a,\ a \wedge (a \vee b) = a$　吸収律

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee, \wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a,\ a \wedge a = a$ べき等律
- $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$ 交換律 (対称律)
- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ 結合律
- $a \vee (a \wedge b) = a,\ a \wedge (a \vee b) = a$ 吸収律

分配律は？(覚えている？)

束で作る代数系における分配律

…は、前ページの定理と違って束であれば自動的に成り立つものではありません。

分配律

- $a \wedge (b \vee c) =$
- $a \vee (b \wedge c) =$

が成り立つ束を　　　　　　という。

束で作る代数系における分配律

…は、前ページの定理と違って束であれば自動的に成り立つものではありません。

分配律

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

が成り立つ束を　　　　　という。

束で作る代数系における分配律

…は、前ページの定理と違って束であれば自動的に成り立つものではありません。

分配律

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

が成り立つ束を**分配束**という。

補元

補元は逆元とは違います。

束 L の**最大元**を I, **最小元**を O とする。$y \in L$ に対して、以下が成り立つ x を　　　　　　というう。

- $x \vee y =$
- $x \wedge y =$

すべての元に　　　が存在する束を　　　　　という。

補元

補元は逆元とは違います。

束 L の**最大元**を I, **最小元**を O とする。$y \in L$ に対して、以下が成り立つ x を y **の補元**という。

- $x \vee y =$
- $x \wedge y =$

すべての元に補元が存在する束を　　　　という。

補元

補元は逆元とは違います。

束 L の**最大元**を I, **最小元**を O とする。$y \in L$ に対して、以下が成り立つ x を y **の補元**という。

- $x \vee y = I$
- $x \wedge y =$

すべての元に補元が存在する束を　　　　という。

補元

補元は逆元とは違います。

束 L の**最大元**を I, **最小元**を O とする。$y \in L$ に対して、以下が成り立つ x を y **の補元**という。

- $x \vee y = I$
- $x \wedge y = O$

すべての元に補元が存在する束を　　　　という。

補元

補元は逆元とは違います。

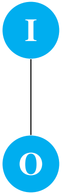
束 L の**最大元**を I, **最小元**を O とする。$y \in L$ に対して、以下が成り立つ x を y **の補元**という。

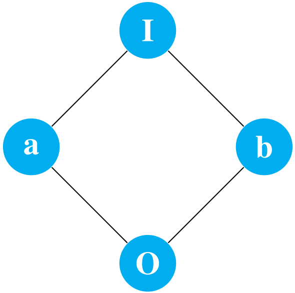
- $x \vee y = I$
- $x \wedge y = O$

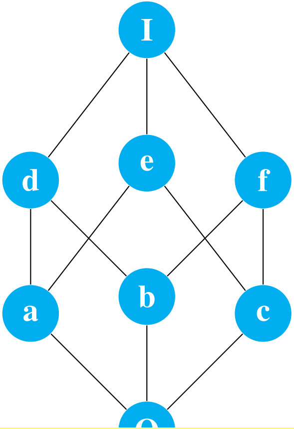
すべての元に補元が存在する束を可補束という。

Boole 束

束かつ　　束な束を　　　という。

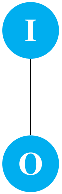


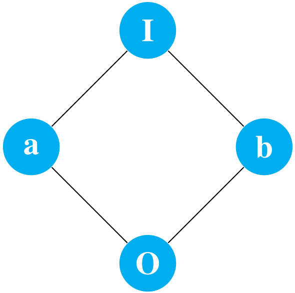


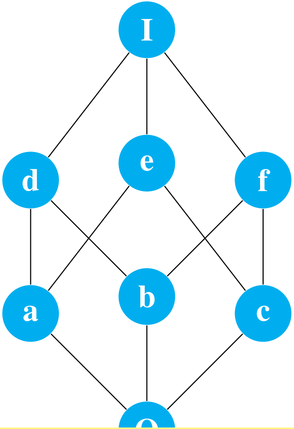


Boole 束

分配束かつ可補束な束を　　　　　という。

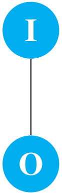


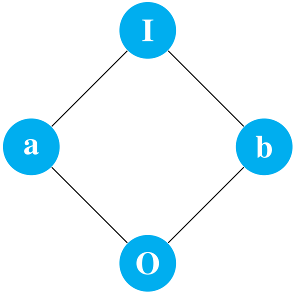


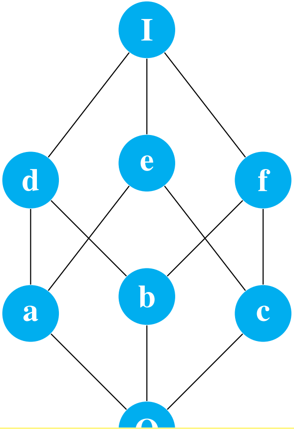


Boole 束

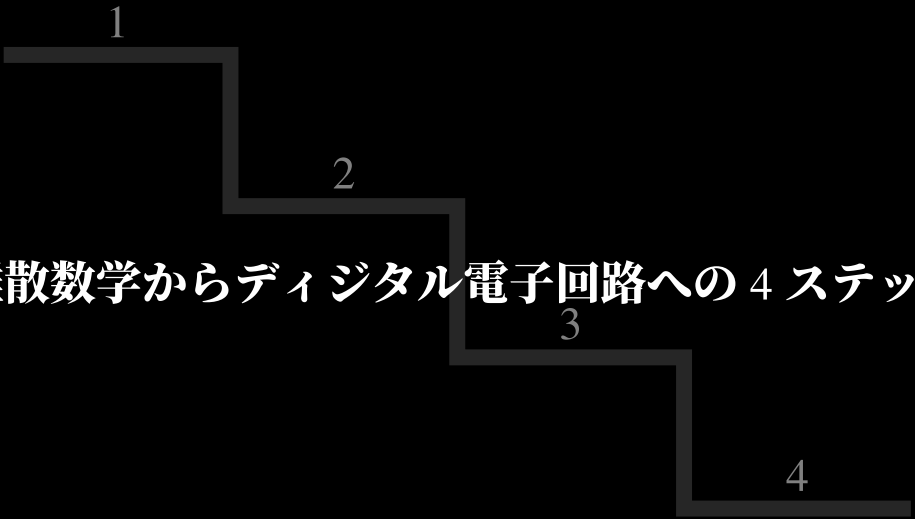
分配束かつ可補束な束を **ブール束** という。





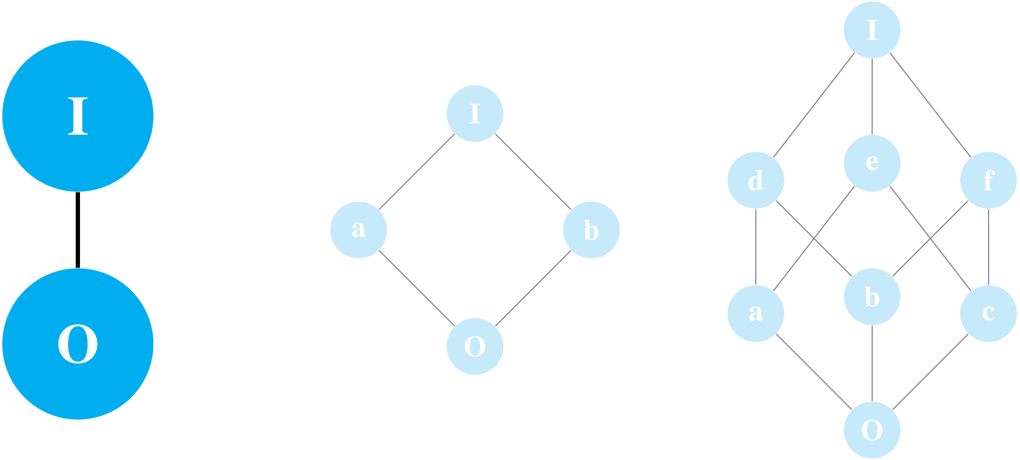


離散数学からディジタル電子回路への４ステップ

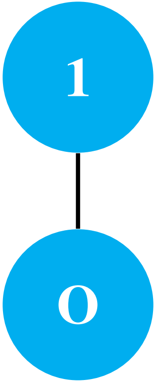


ステップダウン？

ひとつ. ひときわ簡単なブール束 (のみ考える)。



ふたつ. 2 つしかない元は「0」と「1」(と書く)。



みっつ. みんなが知ってる演算記号。

これは賛否両論。教科書によっては $\vee$, $\wedge$ を使っているものもあります。

$$a \vee b \qquad\qquad a \wedge b$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

みっつ. みんなが知ってる演算記号。

これは賛否両論。教科書によっては $\vee$, $\wedge$ を使っているものもあります。

$$a \vee b \qquad a \wedge b$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$a + b$$

みっつ. みんなが知ってる演算記号。

これは賛否両論。教科書によっては $\vee$, $\wedge$ を使っているものもあります。

$$a \vee b \qquad a \wedge b$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$a + b \qquad a \cdot b$$

よっつ. よしときゃいいのに優先順位……。

これも賛否両論。表記は多少すっきりするけどね。

- inf 演算 (『$\wedge$』あるいは『$\cdot$』) の優先順位を sup 演算 (『$\vee$』あるいは『$+$』) より高くする。

$$a + (b \cdot c) =$$

(小林のスライドでは極力カッコを省略しないようにするつもりです。)

よっつ. よしときゃいいのに優先順位……。

これも賛否両論。表記は多少すっきりするけどね。

- inf 演算 (『$\wedge$』 あるいは 『$\cdot$』) の優先順位を sup 演算 (『$\vee$』 あるいは 『$+$』) より高くする。

$$a + (b \cdot c) = a + b \cdot c$$

(小林のスライドでは極力カッコを省略しないようにするつもりです。)

>reboot_

ディジタル電子回路におけるブール代数

この授業では 2 元の Boole 束に限定（だから簡単 !）

真理値（論理値, 真偽値とも）

“　” と “　” のこと。ブール代数では “**値**” はこれしか使わない！

論理演算

“　” と “　” と “　” の 3 つ。ブール代数では “**演算**” はこれしか使わない！

ディジタル電子回路におけるブール代数

この授業では 2 元の Boole 束に限定（だから簡単！）

真理値（論理値, 真偽値とも）

“0” と “1” のこと。ブール代数では “**値**” はこれしか使わない！

論理演算

“　　　” と “　　　” と “　　　” の 3 つ。ブール代数では “**演算**” はこれしか使わない！

ディジタル電子回路におけるブール代数

この授業では 2 元の Boole 束に限定（だから簡単 !)

真理値（論理値, 真偽値とも）

“**0**” と “**1**” のこと。ブール代数では “**値**” はこれしか使わない！

論理演算

“**AND**” と “**OR**” と “**NOT**” の 3 つ。ブール代数では “**演算**” はこれしか使わない！

論理積

論理積（logical product, AND, ·, ∧「かつ」, 下限）

A	B	$A \cdot B$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

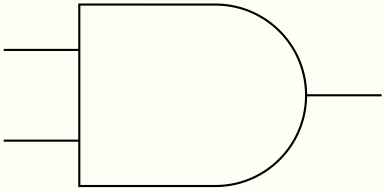
論理積（logical product, AND, $\cdot$, $\wedge$ 「かつ」, 下限）

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

論理積

論理積（logical product, AND, ·, ∧「かつ」, 下限）

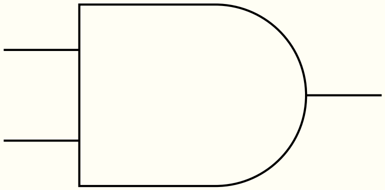
A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



論理積

論理積（logical product, AND, ·, ∧ 「かつ」, 下限）

A	B	$A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



ちなみに↑こういうのを **真理値表 (truth table)** と言います。

論理和

論理和（logical sum, OR, $+$, $\vee$ 「または」, 上限）

A	B	$A+B$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

論理和

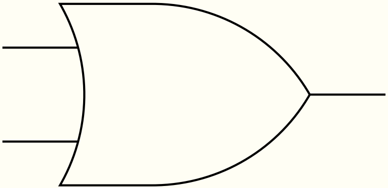
論理和（logical sum, OR, $+$, $\vee$ 「または」, 上限）

A	B	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

論理和

論理和（logical sum, OR, $+$, $\vee$ 「または」, 上限）

A	B	$A+B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



論理否定（logical negation, NOT, $\overline{A}$, $\neg A$ 「〜でない」）

A	$\overline{A}$
0	
1	

- 以上、3 つの演算には　　　　　があるので注意（NOT, AND, OR の順）
- ただし、カッコ「(」「)」もふつうに使える。

論理否定

論理否定（logical negation, NOT, $\overline{A}$, $\neg A$ 「〜でない」）

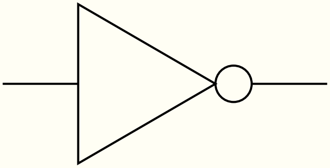
A	$\overline{A}$
0	1
1	0

- 以上、3 つの演算には　　　　　　　があるので注意（NOT, AND, OR の順）
- ただし、カッコ「(」「)」もふつうに使える。

論理否定

論理否定（logical negation, NOT, $\overline{A}$, $\neg A$ 「〜でない」）

A	$\overline{A}$
0	1
1	0



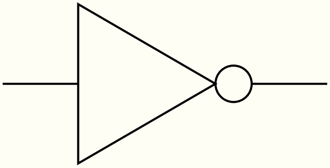
※ 回路記号では三角の部分は実はどうでも良くて、丸印が否定を表す。

- 以上、3 つの演算には　　　　があるので注意（NOT, AND, OR の順）
- ただし、カッコ「(」「)」もふつうに使える。

論理否定

論理否定（logical negation, NOT, $\overline{A}$, $\neg A$ 「〜でない」）

A	$\overline{A}$
0	1
1	0



※ 回路記号では三角の部分は実はどうでも良くて、丸印が否定を表す。

- 以上、3 つの演算には**優先順位**があるので注意（NOT, AND, OR の順）
- ただし、カッコ「(」「)」もふつうに使える。

Boole 代数の性質

0 元

$$A + 0 =$$
$$A \cdot 0 =$$

Boole 代数の性質

0 元

$$A + 0 = A$$
$$A \cdot 0 =$$

Boole 代数の性質

0 元

$$A + 0 = A$$
$$A \cdot 0 = 0$$

Boole 代数の性質

1 元

$$A + 1 =$$

$$A \cdot 1 =$$

Boole 代数の性質

1 元

$$A + 1 = 1$$

$$A \cdot 1 =$$

Boole 代数の性質

1 元

$$A + 1 = 1$$
$$A \cdot 1 = A$$

Boole 代数の性質

補元

$$A + \overline{A} =$$
$$A \cdot \overline{A} =$$

※『逆元』じゃないよ（計算結果が単位元になっていないので）。

Boole 代数の性質

補元

$$A + \overline{A} = 1$$
$$A \cdot \overline{A} =$$

※『逆元』じゃないよ（計算結果が単位元になっていないので）。

Boole 代数の性質

補元

$$A + \overline{A} = 1$$
$$A \cdot \overline{A} = 0$$

※『逆元』じゃないよ（計算結果が単位元になっていないので）。

Boole 代数の性質

交換則

$$
\begin{aligned}
A + B &= \\
A \cdot B &=
\end{aligned}
$$

Boole 代数の性質

交換則

$$A + B = B + A$$
$$A \cdot B =$$

Boole 代数の性質

交換則

$$A + B = B + A$$
$$A \cdot B = B \cdot A$$

Boole 代数の性質

結合則

$$(A + B) + C =$$

$$(A \cdot B) \cdot C =$$

Boole 代数の性質

結合則

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A \cdot B) \cdot C =$$

Boole 代数の性質

結合則

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Boole 代数の性質

分配則

$$
\begin{aligned}
A \cdot (B + C) &= \\
A + (B \cdot C) &=
\end{aligned}
$$

Boole 代数の性質

分配則

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

$$A + (B \cdot C) =$$

Boole 代数の性質

分配則

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$
$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

Boole 代数の性質

分配則

$$
\begin{aligned}
A \cdot (B + C) &= (A \cdot B) + (A \cdot C) \\
A + (B \cdot C) &= (A + B) \cdot (A + C)
\end{aligned}
$$

論理積と論理和、
どちらがどちらに対しても分配的。

Boole 代数の性質

べき等則

$$
\begin{aligned}
A + A &= \\
A \cdot A &=
\end{aligned}
$$

Boole 代数の性質

べき等則

$$A + A = A$$
$$A \cdot A =$$

Boole 代数の性質

べき等則

$$
\begin{aligned}
A + A &= A \\
A \cdot A &= A
\end{aligned}
$$

Boole 代数の性質

復帰則

$$\overline{\overline{A}} =$$

Boole 代数の性質

復帰則

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Boole 代数の性質

吸収則

$$A + (A \cdot B) =$$

$$A + (\overline{A} \cdot B) =$$

$$A \cdot (A + B) =$$

$$A \cdot (\overline{A} + B) =$$

Boole 代数の性質

吸収則

$$A + (A \cdot B) = A$$

$$A + (\overline{A} \cdot B) =$$

$$A \cdot (A + B) =$$

$$A \cdot (\overline{A} + B) =$$

Boole 代数の性質

吸収則

$$A + (A \cdot B) = A$$

$$A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$$

$$A \cdot (A + B) =$$

$$A \cdot (\overline{A} + B) =$$

Boole 代数の性質

吸収則

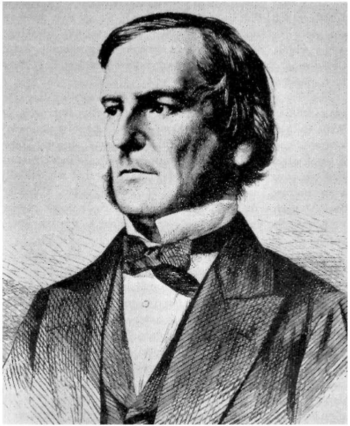
$$A + (A \cdot B) = A$$
$$A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$$
$$A \cdot (A + B) = A$$
$$A \cdot (\overline{A} + B) =$$

Boole 代数の性質

吸収則

$$
\begin{aligned}
A + (A \cdot B) &= A \\
A + (\overline{A} \cdot B) &= A + B \\
A \cdot (A + B) &= A \\
A \cdot (\overline{A} + B) &= A \cdot B
\end{aligned}
$$

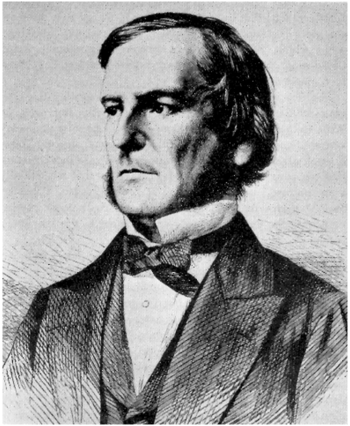
George Boole (1815-1864; 英)



http://ja.wikipedia.org/ より

cf.

George Boole (1815-1864; 英)



http://ja.wikipedia.org/ より

cf. そのころ日本は開国前夜（ペリー来航は 1853 年）

ちょっとした練習問題

Q: 次の計算をせよ。

$$(\overline{X} \cdot Y \cdot Z) + (X \cdot Y \cdot Z) + (X \cdot \overline{Y} \cdot Z)$$

分配則

べき等則

分配則

補元

ちょっとした練習問題

Q: 次の計算をせよ。

$$(\overline{X} \cdot Y \cdot Z) + (X \cdot Y \cdot Z) + (X \cdot \overline{Y} \cdot Z)$$

分配則

べき等則

分配則

補元

$$= (X \cdot Z) + (Y \cdot Z)$$

Q: 次の計算をせよ。

$$(\overline{X} \cdot Y \cdot Z) + (X \cdot Y \cdot Z) + (X \cdot \overline{Y} \cdot Z)$$

$$= \left((\overline{X} \cdot Y) + (X \cdot Y) + (X \cdot \overline{Y})\right) \cdot Z$$

分配則

べき等則

分配則

補元

$$= (X \cdot Z) + (Y \cdot Z)$$

ちょっとした練習問題

Q: 次の計算をせよ。

$$(\overline{X} \cdot Y \cdot Z) + (X \cdot Y \cdot Z) + (X \cdot \overline{Y} \cdot Z)$$

$$= \big((\overline{X} \cdot Y) + (X \cdot Y) + (X \cdot \overline{Y})\big) \cdot Z \qquad \text{分配則}$$

$$= \big((\overline{X} \cdot Y) + (X \cdot Y) + (X \cdot Y) + (X \cdot \overline{Y})\big) \cdot Z \qquad \text{べき等則}$$

分配則

補元

$$= (X \cdot Z) + (Y \cdot Z)$$

ちょっとした練習問題

Q: 次の計算をせよ。

$$
\begin{aligned}
&(\overline{X}\cdot Y\cdot Z)+(X\cdot Y\cdot Z)+(X\cdot\overline{Y}\cdot Z) \\
&=\big((\overline{X}\cdot Y)+(X\cdot Y)+(X\cdot\overline{Y})\big)\cdot Z && \text{分配則} \\
&=\big({\color{red}(\overline{X}\cdot Y)+(X\cdot Y)}+{\color{blue}(X\cdot Y)+(X\cdot\overline{Y})}\big)\cdot Z && \text{べき等則} \\
&=\big(({\color{red}(\overline{X}+X)\cdot Y})+({\color{blue}X\cdot(Y+\overline{Y})})\big)\cdot Z && \text{分配則} \\
& && \text{補元} \\
&=(X\cdot Z)+(Y\cdot Z)
\end{aligned}
$$

ちょっとした練習問題

Q: 次の計算をせよ。

$$(\overline{X}\cdot Y\cdot Z)+(X\cdot Y\cdot Z)+(X\cdot \overline{Y}\cdot Z)$$

$$=\left((\overline{X}\cdot Y)+(X\cdot Y)+(X\cdot \overline{Y})\right)\cdot Z \qquad \text{分配則}$$

$$=\left({\color{red}(\overline{X}\cdot Y)+(X\cdot Y)}+{\color{blue}(X\cdot Y)+(X\cdot \overline{Y})}\right)\cdot Z \qquad \text{べき等則}$$

$$=\left({\color{red}((\overline{X}+X)\cdot Y)}+{\color{blue}(X\cdot(Y+\overline{Y}))}\right)\cdot Z \qquad \text{分配則}$$

$$=({\color{red}Y}+{\color{blue}X})\cdot Z \qquad \text{補元}$$

$$=(X\cdot Z)+(Y\cdot Z)$$

De Morgan's laws

ド・モルガンの法則

$$\overline{A+B} =$$

$$\overline{A \cdot B} =$$

1つ目の方の真理値表

A	B	$\overline{A+B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

この授業でやる2値のブール束の場合は真理値表で簡単に証明（確認）できるが、一般の Boole 束についてはもうちょっとちゃんとした証明が必要。半順序関係 ($\preceq$) を使って $\overline{A+B} \preceq \overline{A} \cdot \overline{B}$ かつ $\overline{A} \cdot \overline{B} \preceq \overline{A+B}$ を示せばいい。その際
$X \preceq Y \Leftrightarrow \overline{Y} \preceq \overline{X}$ という性質を使う。

De Morgan's laws

ド・モルガンの法則

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A \cdot B} =$$

1つ目の方の真理値表

A	B	$\overline{A+B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

この授業でやる 2 値のブール束の場合は真理値表で簡単に証明（確認）できるが、一般の Boole 束についてはもうちょっとちゃんとした証明が必要。半順序関係 ($\preceq$) を使って $\overline{A+B} \preceq \overline{A} \cdot \overline{B}$ かつ $\overline{A} \cdot \overline{B} \preceq \overline{A+B}$ を示せばいい。その際 $X \preceq Y \Leftrightarrow \overline{Y} \preceq \overline{X}$ という性質を使う。

De Morgan's laws

ド・モルガンの法則

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

1 つ目の方の真理値表

A	B	$\overline{A+B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

この授業でやる 2 値のブール束の場合は真理値表で簡単に証明（確認）できるが、一般の Boole 束についてはもうちょっとちゃんとした証明が必要。半順序関係 ($\preceq$) を使って $\overline{A+B} \preceq \overline{A} \cdot \overline{B}$ かつ $\overline{A} \cdot \overline{B} \preceq \overline{A+B}$ を示せばいい。その際 $X \preceq Y \Leftrightarrow \overline{Y} \preceq \overline{X}$ という性質を使う。

出席確認レポート課題 (次の月曜の 17 時締め切り)

吸収則

$$A + \left(\overline{A} \cdot B\right) = A + B$$

を**吸収則以外の演算則を用いて**（真理値表を用いずに）証明せよ。式の展開の際は、どのような演算則を用いたのか言葉の説明を加えること。（式のみはダメ。）

提出は下記 URL の Google Forms。歪んでいない、開いた時に横倒しになっていない、コントラストが読むに耐えうる PDF で提出すること。

https://forms.gle/9ruwtfJg5LQgQNpU7