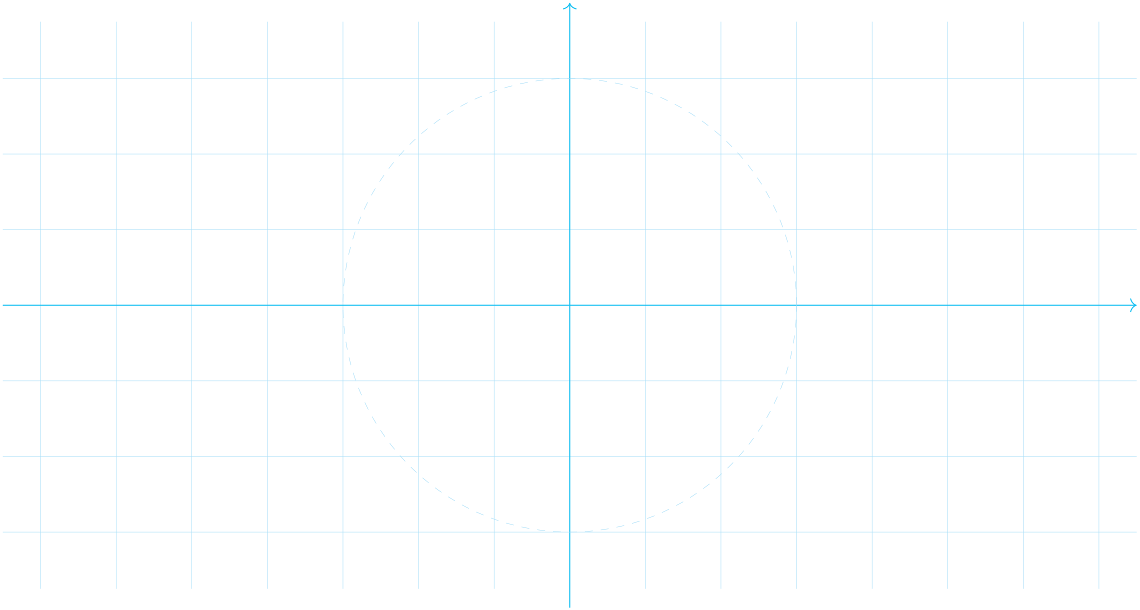
memo



離散数学

授業開始までしばらくお待ちください。

2024

離散数学

Discrete Mathematics

『集合』

bit.ly/d-math

小林裕之

大阪工業大学 RD 学部システムデザイン工学科

OSAKA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

1 of 14

a LaTeX + Beamer slideshow

授業の受講に関して

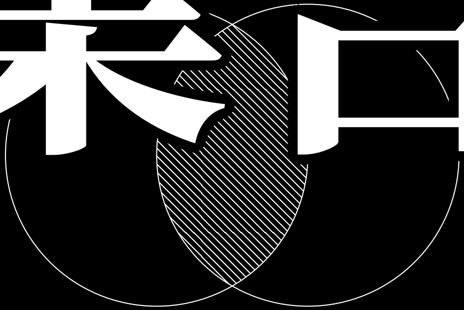
- 講義資料（スライド等）は **Google Drive** (`https://bit.ly/d-math`) に置く (紙の配布資料は行わない)。授業前には虫喰い状態のスライドのみを提供するが、授業後に `uncovered` フォルダに穴埋め版を置くので復習に活用されたい。
- ミニレポートは**Google Forms** (`https://forms.gle/hCyJBbFBMW9AisAt7`) に提出。
- 授業の録画はできるだけスライドと同じフォルダ内のフォルダに置くように努力する（が、必ず置きますとお約束はしません)。
- 授業中に計算間違い等を指摘してくれたらその都度 1 点。(内容に依るけど。)

成績評価について

- 出席そのものは評価せず。極論するとテストのみ出席で他は全欠席でも A 評価はあり得る。
- 基本的には**中間演習**と**期末試験**で評価。
- 毎回ミニレポートを課す。出す者は提出期間を厳守すること。
- 試験の不合格者は**毎回のミニレポート**と**出席**で少し救済する。
  (**しっかりした内容の**ミニレポートを概ね 9 割以上提出し、かつ大学の出欠管理システムで 8 割以上遅刻せず出席していた場合最大 10 点程度の救済。提出数や出席数が少ない場合は救済幅が縮小する。いずれかが 7 割を下回ったら一切救済しない。締め切り後の提出は認めない。)
- **授業中に**スライドの誤りを見つけて指摘してくれた者には、誤り一箇所につき先着一名様限り 100 点満点 1 点相当の加点を行う。(ただしごく軽微なものなど、内容によっては加点しない場合もあり。)

集合

set



境界が厳密な、**何かの集まり**

- **何か**:
  → 通常は小文字のアルファベットで表す。(例: a, b, c)
- **集まり**: → 通常は大文字のアルファベットで表す。(例: A, B, C)

b

a c d

e

集合 (set)

境界が厳密な、何かの集まり

- **何か**: **要素 (element), 元 (member)**
  → 通常は小文字のアルファベットで表す。(例: a, b, c)
- **集まり**: → 通常は大文字のアルファベットで表す。(例: A, B, C)

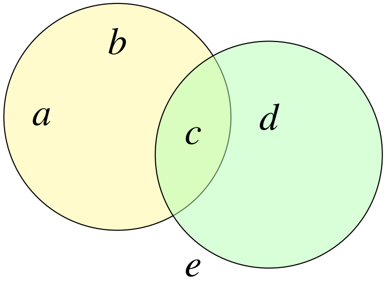
b

a c d

e

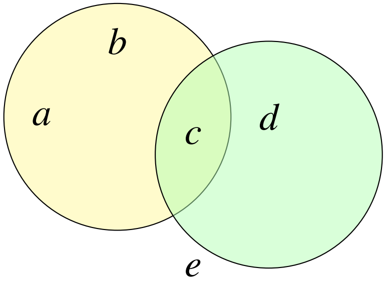
境界が厳密な、何かの集まり

- **何か**: **要素 (element), 元 (member)** → 通常は小文字のアルファベットで表す。(例: a, b, c)
- **集まり**: **集合 (set)** → 通常は大文字のアルファベットで表す。(例: A, B, C)



境界が厳密な、**何か**の**集まり**

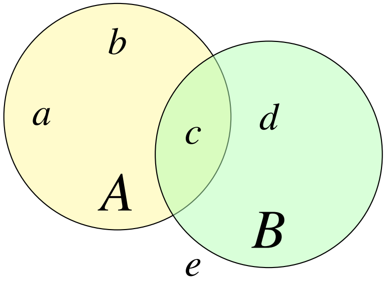
- **何か**: **要素 (element), 元 (member)** → 通常は小文字のアルファベットで表す。(例: a, b, c)
- **集まり**: **集合 (set)** → 通常は大文字のアルファベットで表す。(例: A, B, C)



集合 (set)

境界が厳密な、何かの集まり

- **何か**: **要素 (element), 元 (member)** → 通常は小文字のアルファベットで表す。(例: a, b, c)
- **集まり**: **集合 (set)** → 通常は大文字のアルファベットで表す。(例: A, B, C)



表し方 (外延的表記)

がいえん

- 『集合 A に元 a が含まれる』 $\to$
- 『集合 A に元 a が含まれない』 $\to$
- 『集合 A は要素 a, b, c (だけ) からなる』 $\to$
- 『集合 A の要素は 1, 2, ...10 (だけ) である』

  $\to$
- 『集合 A の要素は $3, 6, 9, \ldots, 27$ である』

  $\to$

曖昧でなく、わかり易ければ ok.

表し方 (外延的表記)

がいえん

- 『集合 A に元 a が含まれる』$\to a \in A$
- 『集合 A に元 a が含まれない』$\to$
- 『集合 A は要素 a, b, c (だけ) からなる』$\to$
- 『集合 A の要素は 1, 2, ...10 (だけ) である』

  $\to$
- 『集合 A の要素は $3, 6, 9, \ldots, 27$ である』

  $\to$

曖昧でなく、わかり易ければ ok.

表し方 (外延的表記)

がいえん

- 『集合 A に元 a が含まれる』$\to a \in A$
- 『集合 A に元 a が含まれない』$\to a \notin A$
- 『集合 A は要素 a, b, c (だけ) からなる』$\to$
- 『集合 A の要素は 1, 2, ...10 (だけ) である』

$\to$

- 『集合 A の要素は 3, 6, 9, ..., 27 である』

$\to$

曖昧でなく、わかり易ければ ok.

表し方 (外延的表記)

がいえん

- 『集合 A に元 a が含まれる』$\rightarrow a \in A$
- 『集合 A に元 a が含まれない』$\rightarrow a \notin A$
- 『集合 A は要素 a, b, c (だけ) からなる』$\rightarrow A = \{a, b, c\}$
- 『集合 A の要素は 1, 2, ...10 (だけ) である』

  $\rightarrow$

- 『集合 A の要素は $3, 6, 9, \ldots, 27$ である』

  $\rightarrow$

曖昧でなく、わかり易ければ ok.

表し方 (外延的表記)

がいえん

- 『集合 A に元 a が含まれる』$\rightarrow a \in A$
- 『集合 A に元 a が含まれない』$\rightarrow a \notin A$
- 『集合 A は要素 a, b, c (だけ) からなる』$\rightarrow A = \{a, b, c\}$
- 『集合 A の要素は 1, 2, ...10 (だけ) である』

  $\rightarrow A = \{1, 2, \ldots, 10\}$
- 『集合 A の要素は $3, 6, 9, \ldots, 27$ である』

  $\rightarrow$

曖昧でなく、わかり易ければ ok.

表し方 (外延的表記)

がいえん

- 『集合 A に元 a が含まれる』$\to a \in A$
- 『集合 A に元 a が含まれない』$\to a \notin A$
- 『集合 A は要素 a, b, c (だけ) からなる』$\to A = \{a, b, c\}$
- 『集合 A の要素は 1, 2, ...10 (だけ) である』
$$\to A = \{1, 2, \ldots, 10\}$$
- 『集合 A の要素は $3, 6, 9, \ldots, 27$ である』
$$\to A = \{3, 6, 9, \ldots, 27\}$$

曖昧でなく、わかり易ければ ok.

集合の注意事項

- 元の順番は関係ない。
  $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$
- 同じ元を二度書かない。
  {a, b, c, b}→✕
- 集合を元に持つ集合もある。
  {a, {b, a}, c}

問: 間違いはどれか?

1. $\{1, \{1\}, \{\{1\}\}\}$
2. $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, a\}\}$
3. $\{\}$

表し方 (内包的表記)

ないほう

- 『集合 A の要素は $3, 6, 9, \ldots, 27$ である』

  $\rightarrow$

- 『 〃 』

  $\rightarrow$

縦棒で区切って、左側に要素、右側に条件を書く。
(条件を複数書くのも可。)

表し方 (内包的表記)

ないほう

- 『集合 A の要素は $3, 6, 9, \ldots, 27$ である』

$$\to A = \{n \mid n は 3 の倍数, 0 < n \leq 27\}$$

- 『 〃 』

$$\to$$

縦棒で区切って、左側に要素、右側に条件を書く。
(条件を複数書くのも可。)

表し方 (内包的表記)

ないほう

- 『集合 A の要素は $3, 6, 9, \ldots, 27$ である』
$$\to A = \{n \mid n\text{は} 3 \text{ の倍数}, 0 < n \leq 27\}$$
- 『 〃 』
$$\to A = \{3n \mid n = 1, 2, \ldots, 9\}$$

縦棒で区切って、左側に要素、右側に条件を書く。
(条件を複数書くのも可。)

コラム: 集合とプログラミング言語

個人的にあまり使う機会がないので勝手にマイナーな存在だと思っているけれど、多くのプログラミング言語には（リストや配列とは別に）集合を表すデータ型があります。言語によってできる演算は違いますが、重複不可・順番関係なし、という基本的な性質は一緒なので上手に使えば便利です、たぶん。

```
print({3, 1, 4, 1})          # => {1, 3, 4}             // Python
puts Set.new [3, 1, 4, 1]    # => #<Set: {3, 1, 4}>     // Ruby
show $ fromList [3, 1, 4, 1] # => fromList [1, 3, 1]    // Haskell
```

集合ではなくリスト・配列の話になりますが、前のページでやったような内包表記的な書き方ができる言語もあります。(実は Python も。) こっちは間違いなく便利なので積極的に使えばいいと思いますが、Python の場合、知らない人が見ると混乱するところが良くないですね。(Python 初級者で、下の 1 行目を初めて見て何となく納得できる人はプログラミングのセンスが**ない**と (個人的には) 思います。)

```
1  a = [3 * n for n in range(1, 5)]    #  [3, 6, 9, 12] // Python
2  a = [3 * n | n <- [1..4]]           -- [3, 6, 9, 12] // Haskell
```

特別な数の集合

これから期末テストまで何度も出てきます。

- $\mathbb{N}$: numbers
- $\mathbb{Z}$: numbers ( )
- $\mathbb{Q}$: numbers
- $\mathbb{R}$: numbers
- $\mathbb{C}$: numbers

特別な数の集合

これから期末テストまで何度も出てきます。

- $\mathbb{N}$: Natural numbers
- $\mathbb{Z}$: numbers ( )
- $\mathbb{Q}$: numbers
- $\mathbb{R}$: numbers
- $\mathbb{C}$: numbers

特別な数の集合

これから期末テストまで何度も出てきます。

- $\mathbb{N}$: Natural numbers
- $\mathbb{Z}$: Integral numbers ( )
- $\mathbb{Q}$: numbers
- $\mathbb{R}$: numbers
- $\mathbb{C}$: numbers

特別な数の集合

これから期末テストまで何度も出てきます。

- $\mathbb{N}$: Natural numbers
- $\mathbb{Z}$: Integral numbers (Integers)
- $\mathbb{Q}$: numbers
- $\mathbb{R}$: numbers
- $\mathbb{C}$: numbers

特別な数の集合

これから期末テストまで何度も出てきます。

- $\mathbb{N}$: Natural numbers
- $\mathbb{Z}$: Integral numbers (Integers)
- $\mathbb{Q}$: Rational numbers
- $\mathbb{R}$: numbers
- $\mathbb{C}$: numbers

特別な数の集合
これから期末テストまで何度も出てきます。

- $\mathbb{N}$: Natural numbers
- $\mathbb{Z}$: Integral numbers (Integers)
- $\mathbb{Q}$: Rational numbers
- $\mathbb{R}$: Real numbers
- $\mathbb{C}$: numbers

特別な数の集合

これから期末テストまで何度も出てきます。

- $\mathbb{N}$: Natural numbers
- $\mathbb{Z}$: Integral numbers (Integers)
- $\mathbb{Q}$: Rational numbers
- $\mathbb{R}$: Real numbers
- $\mathbb{C}$: Complex numbers

練習

次の集合を外延的表記にせよ。

1. $A = \{2^x \mid x = 0, 1, \ldots, 7\}$
2. $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, |x| < 2\}$
3. $C = \{x \mid x \in A, \log_4 x \in \mathbb{Z}\}$

答:

練習

次の集合を外延的表記にせよ。

1. $A = \{2^x \mid x = 0, 1, \ldots, 7\}$
2. $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, |x| < 2\}$
3. $C = \{x \mid x \in A, \log_4 x \in \mathbb{Z}\}$

答:

1. $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$

練習

次の集合を外延的表記にせよ。

1. $A = \{2^x \mid x = 0,\ 1,\ \ldots,\ 7\}$
2. $B = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ |x| < 2\}$
3. $C = \{x \mid x \in A,\ \log_4 x \in \mathbb{Z}\}$

答:

1. $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128\}$
2. $B = \{1\}$

練習

次の集合を外延的表記にせよ。

1. $A = \{2^x \mid x = 0,\ 1,\ \ldots,\ 7\}$
2. $B = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ |x| < 2\}$
3. $C = \{x \mid x \in A,\ \log_4 x \in \mathbb{Z}\}$

答:

1. $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128\}$
2. $B = \{1\}$
3. $C = \{1,\ 4,\ 16,\ 64\}$

部分集合と集合同士の関係

$A \subset B$ の定義

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B)$$

- A の任意の元が B の元であるとき A が B の　　　　であるという。 $\to$
- A の元と B の　　が完全に一致するとき、A と B は **等しい**という。$\to A = B$

クイズ

$A = B$ のとき、$A \subset B$ と言えるか?

- $A \subset B$ かつ $A \neq B \to A$ は B の

部分集合と集合同士の関係

$A \subset B$ の定義

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B)$$

- A の任意の元が B の元であるとき A が B の**部分集合 (　　　　)** であるという。 $\to$
- A の元と B の　　が完全に一致するとき、A と B は **等しい**という。$\to A = B$

クイズ

$A = B$ のとき、$A \subset B$ と言えるか?

- $A \subset B$ かつ $A \neq B \to A$ は B の

部分集合と集合同士の関係

$A \subset B$ の定義

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B)$$

- A の任意の元が B の元であるとき A が B の**部分集合 (subset)**であるという。 $\to$
- A の元と B の　　が完全に一致するとき、A と B は**等しい**という。$\to A = B$

クイズ

$A = B$ のとき、$A \subset B$ と言えるか?

- $A \subset B$ かつ $A \neq B \to A$ は B の

部分集合と集合同士の関係

$A \subset B$ の定義

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B)$$

- A の任意の元が B の元であるとき A が B の**部分集合 (subset)**であるという。 $\to A \subset B$
- A の元と B の　　が完全に一致するとき、A と B は**等しい**という。$\to A = B$

クイズ

$A = B$ のとき、$A \subset B$ と言えるか?

- $A \subset B$ かつ $A \neq B \to A$ は B の

部分集合と集合同士の関係

$A \subset B$ の定義

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \to x \in B)$$

- A の任意の元が B の元であるとき A が B の**部分集合 (subset)** であるという。 $\to A \subset B$
- A の元と B の 元 が完全に一致するとき、A と B は**等しい**という。$\to A = B$

クイズ

$A = B$ のとき、$A \subset B$ と言えるか?

- $A \subset B$ かつ $A \neq B \to A$ は B の

部分集合と集合同士の関係

$A \subset B$ の定義

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B)$$

- A の任意の元が B の元であるとき A が B の**部分集合 (subset)** であるという。 $\to A \subset B$
- A の元と B の 元 が完全に一致するとき、A と B は **等しい**という。$\to A = B$

クイズ

$A = B$ のとき、$A \subset B$ と言えるか?

言える。

- $A \subset B$ かつ $A \neq B \to A$ は B の

部分集合と集合同士の関係

$A \subset B$ の定義

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B)$$

- A の任意の元が B の元であるとき A が B の**部分集合 (subset)** であるという。 $\to A \subset B$
- A の元と B の 元 が完全に一致するとき、A と B は**等しい**という。$\to A = B$

クイズ

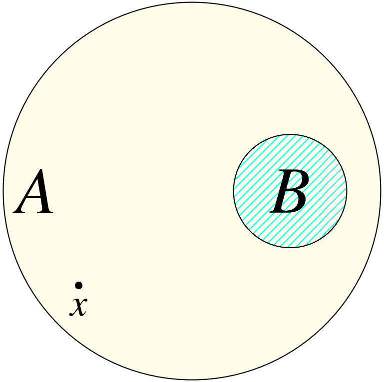
$A = B$ のとき、$A \subset B$ と言えるか?

言える。

- $A \subset B$ かつ $A \neq B \to A$ は B の **真部分集合**

練習

問. A, B, x の関係を $\in$, $\subset$ などを使って表わせ。



$B \quad A$

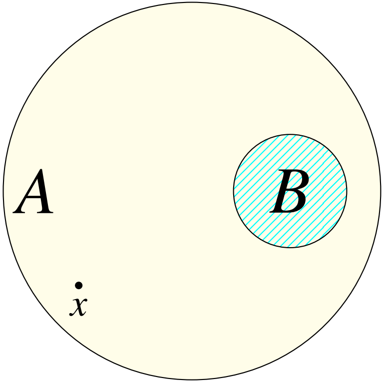
$x \quad A$

$x \quad B$

問. $\mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ の関係を $\subset$ で表せ。

練習

問. A, B, x の関係を $\in$, $\subset$ などを使って表わせ。



$$B \subset A$$

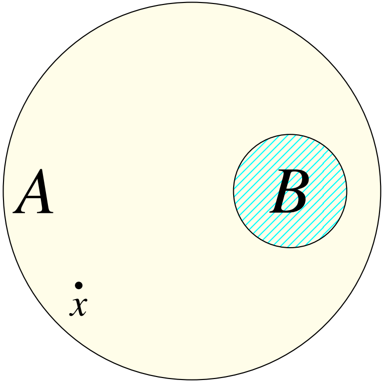
$$x \quad\quad A$$

$$x \quad\quad B$$

問. $\mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ の関係を $\subset$ で表せ。

練習

問. A, B, x の関係を $\in$, $\subset$ などを使って表わせ。



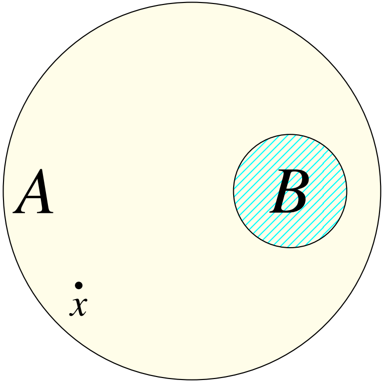
$$B \subset A$$

$$x \in A$$

$$x \qquad B$$

問. $\mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ の関係を $\subset$ で表せ。

問. A, B, x の関係を $\in, \subset$ などを使って表わせ。

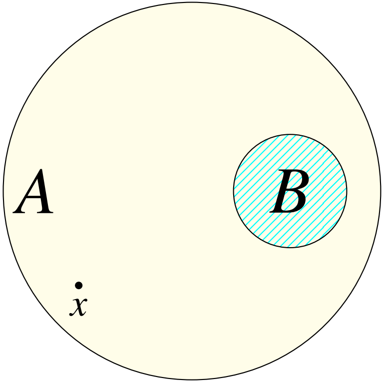


$$B \subset A$$
$$x \in A$$
$$x \notin B$$

問. $\mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ の関係を $\subset$ で表せ。

練習

問. A, B, x の関係を $\in$, $\subset$ などを使って表わせ。



$$B \subset A$$
$$x \in A$$
$$x \notin B$$

問. $\mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ の関係を $\subset$ で表せ。

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

全体集合と空集合

参考書 p. 13

- U 全体集合 (universal set)
- $\emptyset$ 空集合 (empty set)

クイズ

集合 A に対して、$\emptyset \subset A$ と言えるか?

答: 言える。

このあとにやる命題論理がわかっていれば証明は簡単だけど、今は理屈で考えずにあてずっぽうで…。

集合の濃度（要素数）
参考書 p. 14

- 要素数が有限の集合を　　　　　　　　といい、無限の集合を　　　　　　　　という。
- 集合の要素数 (無限集合の場合はそれを拡張した概念) を　　　　　　といい、　　　のように表す。
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はいずれも　　　　集合。

クイズ

$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$ の濃度は等しいか? $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ はどうか?

$\aleph_0$

集合の濃度（要素数）
参考書 p. 14

- 要素数が有限の集合を　　　　　　　　　といい、無限の集合を　　　　　　　　　という。
- 集合の要素数 (無限集合の場合はそれを拡張した概念) を**濃度** (　　　　　　　　) といい、　　のように表す。
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はいずれも　　　集合。

クイズ

$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$ の濃度は等しいか? $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ はどうか?

$\aleph_0$

集合の濃度（要素数）
参考書 p. 14

- 要素数が有限の集合を といい、無限の集合を という。
- 集合の要素数 (無限集合の場合はそれを拡張した概念) を**濃度** (cardinal number) といい、 のように表す。
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はいずれも 集合。

クイズ

$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$ の濃度は等しいか? $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ はどうか?

$\aleph_0$

集合の濃度（要素数）
参考書 p. 14

- 要素数が有限の集合を　　　　　　　　といい、無限の集合を　　　　　　　　という。
- 集合の要素数 (無限集合の場合はそれを拡張した概念) を**濃度** (cardinal number) といい、 $|A|$ のように表す。
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はいずれも　　　　集合。

クイズ

$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$ の濃度は等しいか? $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ はどうか?

$\aleph_0$

集合の濃度（要素数）
参考書 p. 14

- 要素数が有限の集合を **有限集合**(finite set)といい、無限の集合を　　　　　　という。
- 集合の要素数 (無限集合の場合はそれを拡張した概念) を**濃度** (cardinal number) といい、 $|A|$ のように表す。
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はいずれも　　　　集合。

クイズ

$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$ の濃度は等しいか? $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ はどうか?

$\aleph_0$

集合の濃度（要素数）
参考書 p. 14

- 要素数が有限の集合を **有限集合**(finite set)といい、無限の集合を **無限集合**(infinite set)という。
- 集合の要素数 (無限集合の場合はそれを拡張した概念) を**濃度** (cardinal number) といい、 $|A|$ のように表す。
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はいずれも 集合。

クイズ

$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$ の濃度は等しいか? $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ はどうか?

$\aleph_0$

集合の濃度（要素数）
参考書 p. 14

- 要素数が有限の集合を **有限集合**(finite set)といい、無限の集合を **無限集合**(infinite set)という。
- 集合の要素数 (無限集合の場合はそれを拡張した概念) を**濃度** (cardinal number) といい、 $|A|$ のように表す。
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はいずれも 無限 集合。

クイズ

$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$ の濃度は等しいか? $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ はどうか?

$\aleph_0$

冪集合（べき）
ちょっとややこしいよ

集合のすべての部分**集合を元とする集合**を(power set) という。

書き方: A の　　　　$=\mathcal{P}(A)$　　　　(2^A と書くこともある。)

クイズ

1. $F = \{r, s, w\}$ の冪集合（べき） $\mathcal{P}(F)$ を求めよ。
2. $|A| = n$ とする。$|\mathcal{P}(A)|$ はいくらか?

集合のすべての部分集合を元とする集合を **冪集合**（べき）(power set) という。

書き方: A の 冪集合 $=\mathcal{P}(A)$ (2^A と書くこともある。)

クイズ

1. $F=\{r,s,w\}$ の冪集合（べき） $\mathcal{P}(F)$ を求めよ。
2. $|A|=n$ とする。$|\mathcal{P}(A)|$ はいくらか?

冪集合

ちょっとややこしいよ

集合のすべての部分**集合を元とする集合**を **冪集合** (power set) という。

書き方: A の 冪集合 $=\mathcal{P}(A)$ (2^A と書くこともある。)

クイズ

1. $F=\{r, s, w\}$ の冪集合 $\mathcal{P}(F)$ を求めよ。 $\{\emptyset, \{r\}, \{s\}, \{w\}, \{r, s\}, \{r, w\}, \{s, w\}, \{r, s, w\}\}$
2. $|A|=n$ とする。$|\mathcal{P}(A)|$ はいくらか? 2^n

練習

問に答えよ。

1. $A = \{2^x \mid x = 0, \ldots, 3\}$ の冪集合 $\mathcal{P}(A)$ を求めよ。
2. $|\mathcal{P}(A)|$ を求めよ。
3. $|\mathcal{P}(\{a\})|$ を求めよ。
4. $\mathcal{P}(\emptyset)$ および $|\mathcal{P}(\emptyset)|$ を求めよ。

答:

練習

問に答えよ。

1. $A = \{2^x \mid x = 0, \ldots, 3\}$ の冪集合 $\mathcal{P}(A)$ を求めよ。
2. $|\mathcal{P}(A)|$ を求めよ。
3. $|\mathcal{P}(\{a\})|$ を求めよ。
4. $\mathcal{P}(\emptyset)$ および $|\mathcal{P}(\emptyset)|$ を求めよ。

答:

1. $\mathcal{P}(A) =$

   $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{8\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 8\}, \{2, 4\}, \{2, 8\}, \{4, 8\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 8\}, \{1, 4, 8\}, \{2, 4, 8\}, \{1, 2, 4, 8\}\}$

練習

問に答えよ。

1. $A = \{2^x \mid x = 0, \ldots, 3\}$ の冪集合 $\mathcal{P}(A)$ を求めよ。
2. $|\mathcal{P}(A)|$ を求めよ。
3. $|\mathcal{P}(\{a\})|$ を求めよ。
4. $\mathcal{P}(\emptyset)$ および $|\mathcal{P}(\emptyset)|$ を求めよ。

答:

1. $\mathcal{P}(A) =$

   $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{8\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 8\}, \{2, 4\}, \{2, 8\}, \{4, 8\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 8\}, \{1, 4, 8\}, \{2, 4, 8\}, \{1, 2, 4, 8\}\}$
2. 16

練習

問に答えよ。

1. $A = \{2^x \mid x = 0, \ldots, 3\}$ の冪集合 $\mathcal{P}(A)$ を求めよ。
2. $|\mathcal{P}(A)|$ を求めよ。
3. $|\mathcal{P}(\{a\})|$ を求めよ。
4. $\mathcal{P}(\emptyset)$ および $|\mathcal{P}(\emptyset)|$ を求めよ。

答:

1. $\mathcal{P}(A) =$
$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{8\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 8\}, \{2, 4\}, \{2, 8\}, \{4, 8\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 8\}, \{1, 4, 8\}, \{2, 4, 8\}, \{1, 2, 4, 8\}\}$
2. 16
3. 2

練習

問に答えよ。

1. $A = \{2^x \mid x = 0, \ldots, 3\}$ の冪集合 $\mathcal{P}(A)$ を求めよ。
2. $|\mathcal{P}(A)|$ を求めよ。
3. $|\mathcal{P}(\{a\})|$ を求めよ。
4. $\mathcal{P}(\emptyset)$ および $|\mathcal{P}(\emptyset)|$ を求めよ。

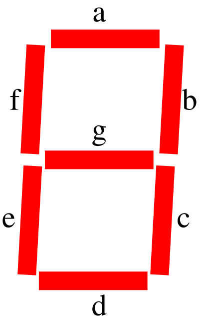
答:

1. $\mathcal{P}(A) =$
   $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{8\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 8\}, \{2, 4\}, \{2, 8\}, \{4, 8\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 8\}, \{1, 4, 8\}, \{2, 4, 8\}, \{1, 2, 4, 8\}\}$
2. 16
3. 2
4. $\{\emptyset\}, 1$

けっきょく冪集合とは何なのか？

何かの役に立つの？

- 2 進数の各ビットを元と考えれば冪集合の意味は明らか。
- どう控えめに見ても計算機・ソフトウェアの基本部分を担っている概念である。



7 セグ集合

$A = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}, \mathrm{f}, \mathrm{g}\}$ で表現できる全パタンは?

コラム: 冪集合の再帰的定義

何かを再帰的に定義したり、その再帰的アルゴリズムを考えることはプログラミング力を向上するのにとても役立ちます。例えば「ある集合 A の冪集合」は次のように考えることができます。

A の冪集合の定義

1. A が空集合なら冪集合は $\{\emptyset\}$。
2. そうでなければ、「A の任意の要素ひとつの集合 A_0」と「残りの部分集合 A_1」に分割。
3. A_1 の冪集合を B とする (← ここが再帰的！)。すると……
4. A の冪集合は「B」と「B の各要素と A_0 の和集合」の和集合である

例: $A = \{r, s, w\}$

Python のリストによる実装例

```
def power_set(A):
  if len(A) == 0:
    return [[]]
  A0 = A[0]
  A1 = A[1:]
  B = power_set(A1)
  return B + [[A0] + bi for bi in B]

print(power_set(['r', 's', 'w']))
```

コラム: 冪集合の再帰的定義

何かを再帰的に定義したり、その再帰的アルゴリズムを考えることはプログラミング力を向上するのにとても役立ちます。例えば「ある集合 A の冪集合」は次のように考えることができます。

A の冪集合の定義

1. A が空集合なら冪集合は $\{\emptyset\}$。
2. そうでなければ、「A の任意の要素ひとつの集合 A_0」と「残りの部分集合 A_1」に分割。
3. A_1 の冪集合を B とする ($\leftarrow$ ここが再帰的！)。すると……
4. A の冪集合は「B」と「B の各要素と A_0 の和集合」の和集合である

例: $A = \{r, s, w\}$

1. A は空集合でないので本ステップは無視。

Python のリストによる実装例

```
def power_set(A):
  if len(A) == 0:
    return [[]]
  A0 = A[0]
  A1 = A[1:]
  B = power_set(A1)
  return B + [[A0] + bi for bi in B]

print(power_set(['r', 's', 'w']))
```

コラム: 冪集合の再帰的定義

何かを再帰的に定義したり、その再帰的アルゴリズムを考えることはプログラミング力を向上するのにとても役立ちます。例えば「ある集合 A の冪集合」は次のように考えることができます。

A の冪集合の定義

1. A が空集合なら冪集合は $\{\emptyset\}$。
2. そうでなければ、「A の任意の要素ひとつの集合 A_0」と「残りの部分集合 A_1」に分割。
3. A_1 の冪集合を B とする ($\leftarrow$ ここが再帰的！)。すると……
4. A の冪集合は「B」と「B の各要素と A_0 の和集合」の和集合である

例: $A = \{r, s, w\}$

1. A は空集合でないので本ステップは無視。
2. $A_0 = \{r\}, A_1 = \{s, w\}$

Python のリストによる実装例

```
def power_set(A):
  if len(A) == 0:
    return [[]]
  A0 = A[0]
  A1 = A[1:]
  B = power_set(A1)
  return B + [[A0] + bi for bi in B]

print(power_set(['r', 's', 'w']))
```

コラム: 冪集合の再帰的定義

何かを再帰的に定義したり、その再帰的アルゴリズムを考えることはプログラミング力を向上するのにとても役立ちます。例えば「ある集合 A の冪集合」は次のように考えることができます。

A の冪集合の定義

1. A が空集合なら冪集合は $\{\emptyset\}$。
2. そうでなければ、「A の任意の要素ひとつの集合 A_0」と「残りの部分集合 A_1」に分割。
3. A_1 の冪集合を B とする ($\leftarrow$ ここが再帰的！)。すると……
4. A の冪集合は「B」と「B の各要素と A_0 の和集合」の和集合である

例: $A = \{r, s, w\}$

1. A は空集合でないので本ステップは無視。
2. $A_0 = \{r\}, A_1 = \{s, w\}$
3. $B = \mathcal{P}(A_1) = \{\emptyset, \{s\}, \{w\}, \{s, w\}\}$

Python のリストによる実装例

```
def power_set(A):
  if len(A) == 0:
    return [[]]
  A0 = A[0]
  A1 = A[1:]
  B = power_set(A1)
  return B + [[A0] + bi for bi in B]

print(power_set(['r', 's', 'w']))
```

コラム: 冪集合の再帰的定義

何かを再帰的に定義したり、その再帰的アルゴリズムを考えることはプログラミング力を向上するのにとても役立ちます。例えば「ある集合 A の冪集合」は次のように考えることができます。

A の冪集合の定義

1. A が空集合なら冪集合は $\{\emptyset\}$。
2. そうでなければ、「A の任意の要素ひとつの集合 A_0」と「残りの部分集合 A_1」に分割。
3. A_1 の冪集合を B とする (← ここが再帰的！)。すると……
4. A の冪集合は「B」と「B の各要素と A_0 の和集合」の和集合である

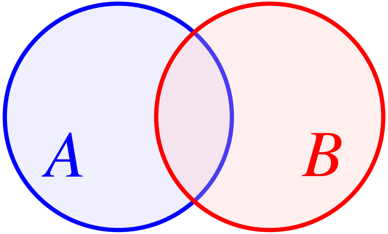
例: $A = \{r, s, w\}$

1. A は空集合でないので本ステップは無視。
2. $A_0 = \{r\}, A_1 = \{s, w\}$
3. $B = \mathcal{P}(A_1) = \{\emptyset, \{s\}, \{w\}, \{s, w\}\}$
4. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{s\}, \{w\}, \{s, w\}\} \cup \{\{r\}, \{r, s\}, \{r, w\}, \{r, s, w\}\}$

Python のリストによる実装例

```
def power_set(A):
  if len(A) == 0:
    return [[]]
  A0 = A[0]
  A1 = A[1:]
  B = power_set(A1)
  return B + [[A0] + bi for bi in B]

print(power_set(['r', 's', 'w']))
```

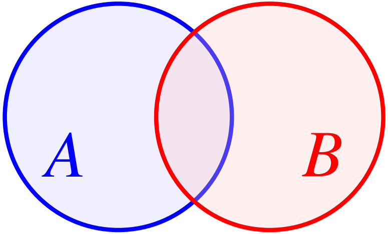


- $\{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$
- $\{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$

集合 (　　　　)

集合 (　　　　　　)

和集合と　集合

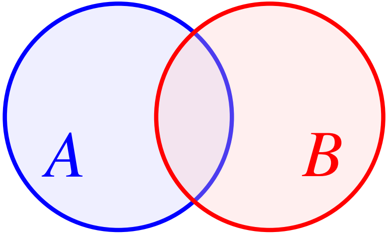


- $\{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$
- $\{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$

和 集合 (　　　　)

**　集合 (　　　　　　　)**

和集合と　集合

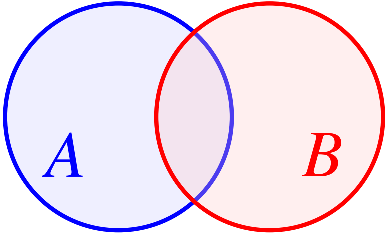


- $\{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$
- $\{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$

和 集合 (Union)

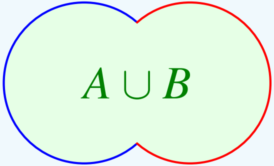
集合 (　　　　　　　　　)

和集合と　集合



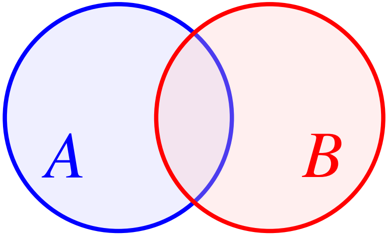
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$
- $\{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$

和 集合 (Union)



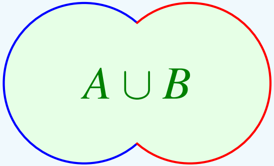
集合 ( )

和集合と積集合



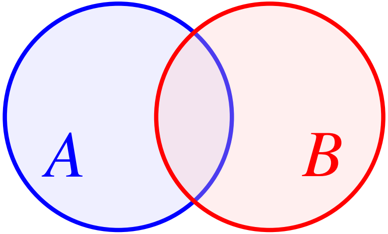
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$
- $\{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$

和 集合 (Union)



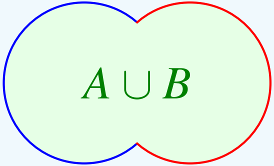
積 集合 ( )

和集合と積集合



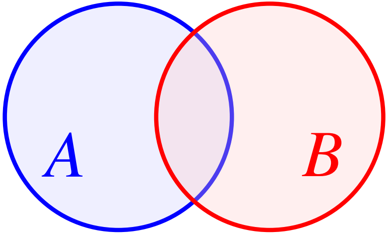
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$
- $\{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$

和 集合 (Union)



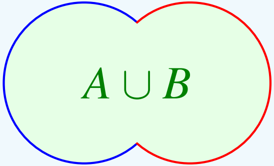
積 集合 (Intersection)

和集合と積集合

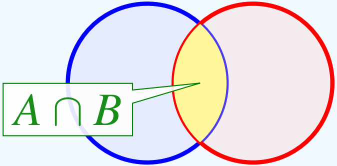


- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$

和 集合 (Union)



積 集合 (Intersection)



集合 ( ) と 集合 ( )

( )

$$\{x \mid x \notin A\}$$

集合 ( )

$$\{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$$

※ 差集合の演算子には $-$ を使う場合もあります。

問. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}, A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき $\overline{A}$ と $A \backslash B$ を求めよ。

補 集合 (　　　　　　) と　集合 (　　　　　)

補集合 (　　　　　　)

$$\{x \mid x \notin A\}$$

集合 (　　　　　)

$$\{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$$

※ 差集合の演算子には − を使う場合もあります。

問. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}, A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき $\overline{A}$ と $A \backslash B$ を求めよ。

補 集合 (complement) と 　集合 (　　　　　)

補集合 (Complement)

$$\{x \mid x \notin A\}$$

集合 (　　　　　)

$$\{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

※ 差集合の演算子には − を使う場合もあります。

問. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}, A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき $\overline{A}$ と $A \backslash B$ を求めよ。

補集合 (complement) と　集合 (　　　　)

補集合 (Complement)

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

集合 (　　　　)

$$\{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$$

※ 差集合の演算子には − を使う場合もあります。

問. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}, A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき $\overline{A}$ と $A \backslash B$ を求めよ。

補集合 (complement) と　　集合 (　　　　　　)

補集合 (Complement)

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

- $\overline{\emptyset} = U,\ \overline{U} = \emptyset$

集合 (　　　　　　)

$$\{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$$

※ 差集合の演算子には − を使う場合もあります。

問. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}, A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき $\overline{A}$ と $A \backslash B$ を求めよ。

補 集合 (complement) と　集合 (　　　　)

補集合 (Complement)

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

- $\overline{\emptyset} = U,\ \overline{U} = \emptyset$
- $A \cup \overline{A} = U,\ A \cap \overline{A} = \emptyset$

集合 (　　　　)

$$\{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$$

※ 差集合の演算子には $-$ を使う場合もあります。

問. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}, A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき $\overline{A}$ と $A \backslash B$ を求めよ。

補集合 (complement) と 集合 ( )

補集合 (Complement)

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

- $\overline{\emptyset} = U,\ \overline{U} = \emptyset$
- $A \cup \overline{A} = U,\ A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $\overline{\overline{A}} = A$

集合 ( )

$$\{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$$

※ 差集合の演算子には − を使う場合もあります。

問. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}, A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき $\overline{A}$ と $A \backslash B$ を求めよ。

補集合 (complement) と 差集合 (   )

補集合 (Complement)

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

- $\overline{\emptyset} = U,\ \overline{U} = \emptyset$
- $A \cup \overline{A} = U,\ A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $\overline{\overline{A}} = A$

差集合 (   )

$$\{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$$

※ 差集合の演算子には $-$ を使う場合もあります。

問. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}, A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき $\overline{A}$ と $A \backslash B$ を求めよ。

補集合 (complement) と 差集合 (difference)

補集合 (Complement)

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

- $\overline{\emptyset} = U, \overline{U} = \emptyset$
- $A \cup \overline{A} = U, A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $\overline{\overline{A}} = A$

差集合 (Difference)

$$\{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

※ 差集合の演算子には $-$ を使う場合もあります。

問. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}, A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき $\overline{A}$ と $A \backslash B$ を求めよ。

補 集合 (complement) と 差 集合 (difference)

補集合 (Complement)

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

- $\overline{\emptyset} = U$, $\overline{U} = \emptyset$
- $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $\overline{\overline{A}} = A$

差 集合 (Difference)

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$$

※ 差集合の演算子には − を使う場合もあります。

問. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}, A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき $\overline{A}$ と $A \backslash B$ を求めよ。

補集合 (complement) と 差集合 (difference)

補集合 (Complement)

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

- $\overline{\emptyset} = U, \overline{U} = \emptyset$
- $A \cup \overline{A} = U, A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $\overline{\overline{A}} = A$

差集合 (Difference)

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

- $\overline{A} = U \backslash A$

※差集合の演算子には − を使う場合もあります。

問. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}, A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき $\overline{A}$ と $A \backslash B$ を求めよ。

補 集合 (complement) と 差 集合 (difference)

補集合 (Complement)

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

- $\overline{\emptyset} = U, \ \overline{U} = \emptyset$
- $A \cup \overline{A} = U, \ A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $\overline{\overline{A}} = A$

差 集合 (Difference)

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A, \ x \notin B\}$$

- $\overline{A} = U \backslash A$
- $A \backslash B = A \cap \overline{B}$

※ 差集合の演算子には $-$ を使う場合もあります。

問. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}, A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき $\overline{A}$ と $A \backslash B$ を求めよ。

補集合 (Complement)

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

- $\overline{\emptyset} = U$, $\overline{U} = \emptyset$
- $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $\overline{\overline{A}} = A$

差 集合 (Difference)

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$$

- $\overline{A} = U \backslash A$
- $A \backslash B = A \cap \overline{B}$

※ 差集合の演算子には $-$ を使う場合もあります。

問. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}, A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき $\overline{A}$ と $A \backslash B$ を求めよ。

$\overline{A} = \{2, 4, 6, 8, 9\},$

補集合 (complement) と 差集合 (difference)

補集合 (Complement)

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

- $\overline{\emptyset} = U,\ \overline{U} = \emptyset$
- $A \cup \overline{A} = U,\ A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $\overline{\overline{A}} = A$

差集合 (Difference)

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$$

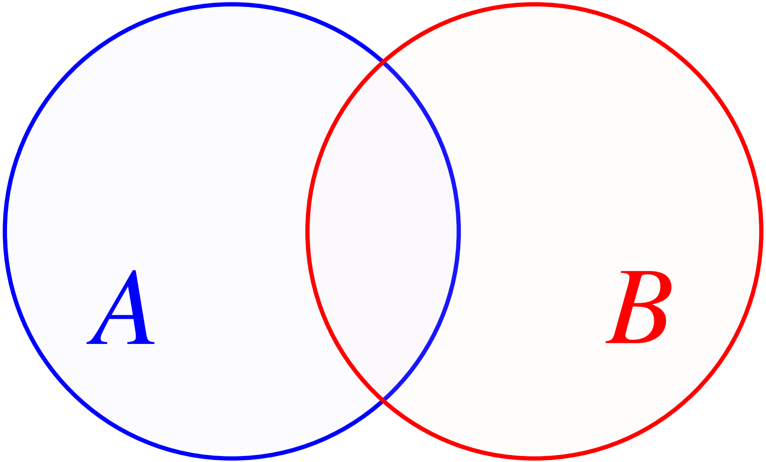
- $\overline{A} = U \backslash A$
- $A \backslash B = A \cap \overline{B}$

※差集合の演算子には $-$ を使う場合もあります。

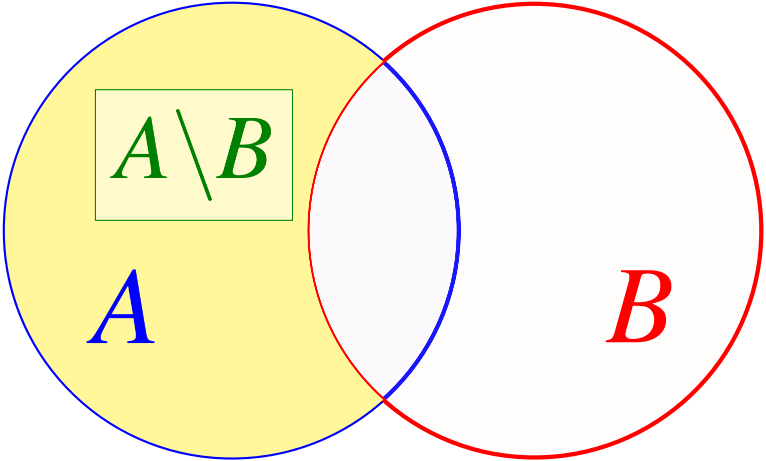
問. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}, A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ のとき $\overline{A}$ と $A \backslash B$ を求めよ。

$\overline{A} = \{2, 4, 6, 8, 9\}, A \backslash B = \{5, 7\},$

問: $A\setminus B$ を図示せよ。



問: $A \setminus B$ を図示せよ。



集合演算

集合演算

- $A \cap A = A,\ A \cup A = A$ ……………… べき等律

集合演算

- $A \cap A = A,\ A \cup A = A$ .... べき等律
- $A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A$ .... 交換律

集合演算

- $A \cap A = A,\ A \cup A = A$ .... べき等律
- $A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A$ .... 交換律
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .... 結合律

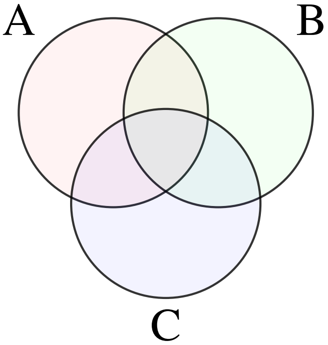
集合演算

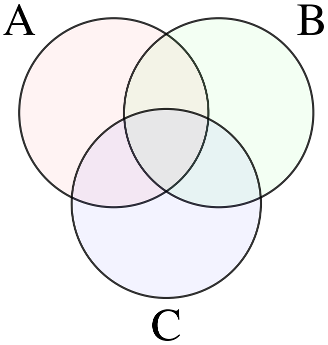
- $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ ……………… べき等律
- $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ ………… 交換律
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ……………… 結合律
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ………… 分配律

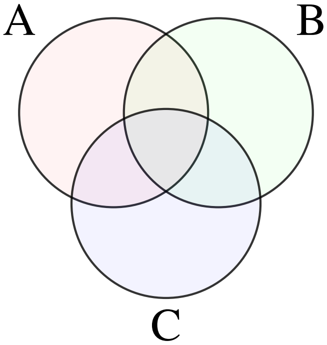
集合演算

- $A \cap A = A,\ A \cup A = A$ .... べき等律
- $A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A$ .... 交換律
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .... 結合律
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .... 分配律
- $A \cup (A \cap B) = A,\ A \cap (A \cup B) = A$ .... 吸収律

考え事に便利な図

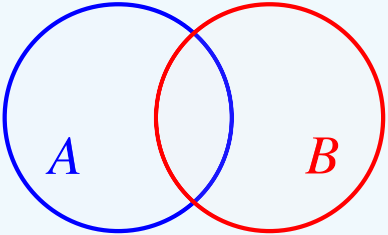






ド・モルガンの法則

De Morgan’s laws



$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

ド・モルガンの法則

De Morgan's laws

Augustus De Morgan (1806-71; 英)
(img src=en.wikipedia.org)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

双対原理

Duality principle for sets

$\cap$, $\cup$ の計算からなる集合の恒等式（法則）は、　　　およびある集合とその補集合を入れ替えても成り立つ。

例: De Morgan の法則 (左辺 =X などと置いてやってみよう)

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\
\overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}
\end{aligned}
$$

双対原理

Duality principle for sets

$\cap$, $\cup$ の計算からなる集合の恒等式（法則）は、$\cap$ と $\cup$ およびある集合とその補集合を入れ替えても成り立つ。

例: De Morgan の法則 (左辺 =X などと置いてやってみよう)

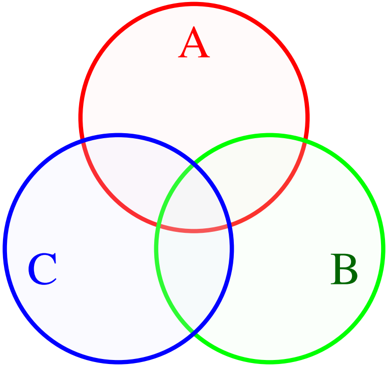
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

練習

問に答えよ。

差集合の演算に分配律は成り立たないが、似たような関係は導ける。$A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$ を証明せよ。



ミニレポート課題 (提出期間: 本日〜次回の授業の前日)

1. 集合 $\{0,\ -1,\ 2,\ -3,\ 4, \cdots,\ -99,\ 100\}$ を内包的表記で表わせ。
2. 『$A \cap B = A,\ A \neq B$』を Venn 図で表わせ。
3. 集合 $\mathcal{P}(\{0,\ 1,\ 2\})$ を求めよ。
4. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$ を示せ。

解答を PC 文書や手書きで作成し、PDF にして Google Forms (`https://forms.gle/hCyJBbFBMW9AisAt7`) から提出せよ (要組織アカウントによるログイン)。ただし写真等の画像ファイルの場合は、解像度や露出・照明状態などを十分考慮し、きちんと読解可能なクオリティのものとすること。スマートフォンの場合はスキャナアプリの類の利用を必須とする。