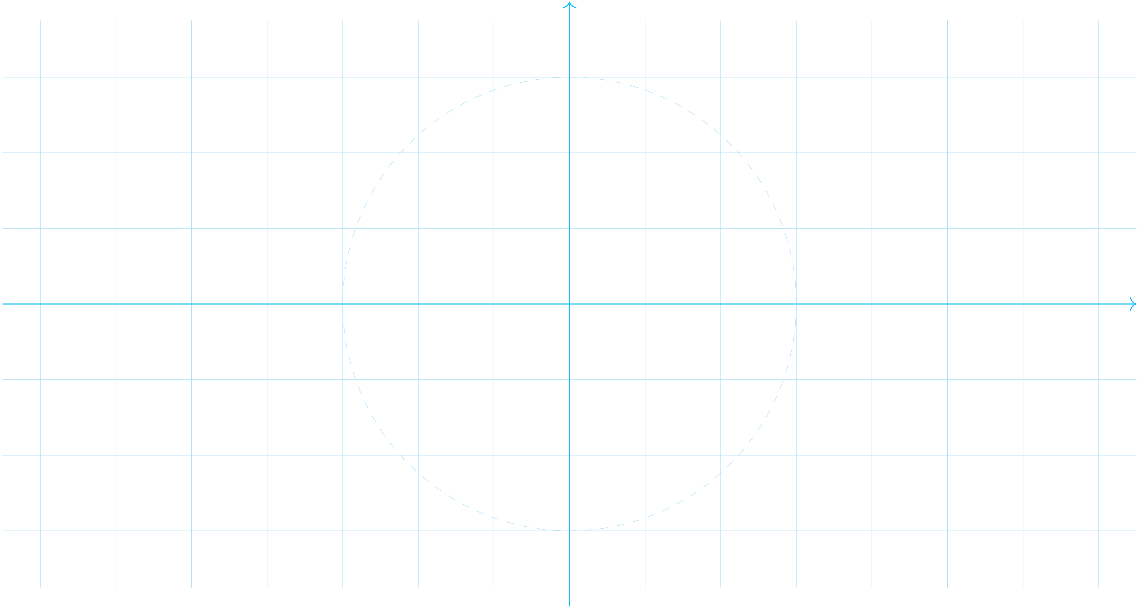

離散数学

授業開始までしばらくお待ちください。

2024

離散数学
Discrete Mathematics

『推論』

bit.ly/d-math

小林裕之

大阪工業大学 RD 学部システムデザイン工学科

OSAKA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

4 of 14

a LaTeX + Beamer slideshow

授業の受講に関して

- 講義資料（スライド等）は **Google Drive** (`https://bit.ly/d-math`) に置く (紙の配布資料は行わない)。授業前には虫喰い状態のスライドのみを提供するが、授業後に `uncovered` フォルダに穴埋め版を置くので復習に活用されたい。
- ミニレポートは**Google Forms** (`https://forms.gle/hCyJBbFBMW9AisAt7`) に提出。
- 授業の録画はできるだけスライドと同じフォルダ内のフォルダに置くように努力する（が、必ず置きますとお約束はしません）。
- 授業中に計算間違い等を指摘してくれたらその都度 1 点。(内容に依るけど。)

成績評価について

- 出席そのものは評価せず。極論するとテストのみ出席で他は全欠席でも A 評価はあり得る。
- 基本的には**中間演習**と**期末試験**で評価。
- 毎回ミニレポートを課す。出す者は提出期間を厳守すること。
- 試験の不合格者は**毎回のミニレポート**と**出席**で少し救済する。
(**しっかりした内容の**ミニレポートを概ね 9 割以上提出し、かつ大学の出欠管理システムで 8 割以上遅刻せず出席していた場合最大 10 点程度の救済。提出数や出席数が少ない場合は救済幅が縮小する。いずれかが 7 割を下回ったら一切救済しない。締め切り後の提出は認めない。)
- **授業中に**スライドの誤りを見つけて指摘してくれた者には、誤り一箇所につき先着一名様限り 100 点満点 1 点相当の加点を行う。(ただしごく軽微なものなど、内容によっては加点しない場合もあり。)

推論 (論法) (argument)

____(premise) である命題 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ と、____(conclusion) である命題 q の間の関係を**推論**として次のように表す。

$$p_1, p_2, p_3, \cdots \Rightarrow q$$

- カンマで区切って並べた命題は連言、つまり $p_1, p_2, p_3 = (p_1 \wedge p_2) \wedge p_3$。
- $\Rightarrow$ の代わりに $\vdash$ を使うこともあり。

推論 (論法) (argument)

前提(premise) である命題 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ と、 _____(conclusion) である命題 q の間の関係を**推論**として次のように表す。

$$p_1, p_2, p_3, \cdots \Rightarrow q$$

- カンマで区切って並べた命題は連言、つまり $p_1, p_2, p_3 = (p_1 \wedge p_2) \wedge p_3$。
- $\Rightarrow$ の代わりに $\vdash$ を使うこともあり。

推論

推論 (論法) (argument)

前提(premise) である命題 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ と、**結論**(conclusion) である命題 q の間の関係を**推論**として次のように表す。

$$p_1, p_2, p_3, \cdots \Rightarrow q$$

- カンマで区切って並べた命題は連言、つまり $p_1, p_2, p_3 = (p_1 \wedge p_2) \wedge p_3$。
- $\Rightarrow$ の代わりに $\vdash$ を使うこともあり。

推論 (論法) (argument)

前提(premise) である命題 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ と、**結論**(conclusion) である命題 q の間の関係を**推論**として次のように表す。

$$p_1, p_2, p_3, \cdots \Rightarrow q$$

- カンマで区切って並べた命題は連言、つまり $p_1, p_2, p_3 = (p_1 \wedge p_2) \wedge p_3$。
- $\Rightarrow$ の代わりに $\vdash$ を使うこともあり。

いや表し方はわかったが、その**意味は?**

推論の意味 (説明になっていないバージョン)

$$p_1, p_2, p_3, \cdots \Rightarrow q$$

『p_1 かつ、p_2 かつ、p_3 かつ、……である。
q である。』という意味。

推論の意味 (説明になっていないバージョン)

$$p_1, p_2, p_3, \cdots \Rightarrow q$$

『p_1 かつ、p_2 かつ、p_3 かつ、……である。
ゆえに q である。』という意味。

推論の意味 (こっちがちゃんとした説明)

$$p_1, p_2, p_3, \cdots \Rightarrow q$$

『命題 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ が 命題 q が 』という意味。

推論の意味 (こっちがちゃんとした説明)

$$p_1, p_2, p_3, \cdots \Rightarrow q$$

『命題 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ が 全て真であるならば必ず 命題 q が　　　　　　　　』という意味。

推論の意味 (こっちがちゃんとした説明)

$$p_1, p_2, p_3, \cdots \Rightarrow q$$

『命題 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ が 全て真であるならば必ず 命題 q が真である』という意味。

推論の例と意味

次の推論をどう思うか?

- p_1: 雨である。
- p_2: 雨ならば傘が必要である。
- q: 傘が必要である。

$$p_1, p_2 \Rightarrow q$$

こういう推論を　　　　　　(valid) であるという。

推論の例と意味

次の推論をどう思うか?

- p_1: 雨である。
- p_2: 雨ならば傘が必要である。
- q: 傘が必要である。

$$p_1, p_2 \Rightarrow q$$

こういう推論を **有効** (妥当)(valid) であるという。

推論の例と意味

次の推論をどう思うか?

- p_1: 雨である。
- p_2: 雨ならば傘が必要である。
- q: 傘が不要である。

$$p_1, p_2 \Rightarrow q$$

こういう推論を　　　　(fallacy) という。

推論の例と意味

次の推論をどう思うか?

- p_1: 雨である。
- p_2: 雨ならば傘が必要である。
- q: 傘が不要である。

$$p_1, p_2 \Rightarrow q$$

こういう推論を **謬論**（びゅうろん） (fallacy) という。

推論の例と意味

次の推論をどう思うか?

- p_1: 雨である。
- p_2: 晴れならば傘が不要である。
- q: 傘が必要である。

$$p_1, p_2 \Rightarrow q$$

あれれ、これは…?

戻ります

こんがらがってきたので振り出しに戻る。

推論の意味を再定義!

$$p_1, p_2, p_3, \cdots \Rightarrow q$$

『命題 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ が全て真であるならば必ず命題 q が真である』という意味。

を換言すれば…

が、

。

推論の意味を再定義!

$$p_1, p_2, p_3, \cdots \Rightarrow q$$

『命題 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ が全て真であるならば必ず命題 q が真である』という意味。

を換言すれば…

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \to q$$

が、

。

推論の意味を再定義!

$$p_1, p_2, p_3, \cdots \Rightarrow q$$

『命題 $p_1, p_2, p_3, \cdots$ が全て真であるならば必ず命題 q が真である』という意味。

を換言すれば…

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \to q$$

が、**トートロジー**。

推論の意味がわかったところでもう一度最初のやつを考え直す。

次の推論をどう思うか?

- p_1: 雨である。
- p_2: 雨ならば傘が必要である。
- q: 傘が必要である。

$$p_1, p_2 \Rightarrow q$$

p_2 は、よく見ると、 **命題** では!?

推論の意味がわかったところでもう一度最初のやつを考え直す。

次の推論をどう思うか?

- p_1: 雨である。
- p_2: **雨ならば傘が必要である。**← ここに注目。
- q: 傘が必要である。

$$p_1, p_2 \Rightarrow q$$

p_2 は、よく見ると、<u>　　**命題**</u> では!?

推論の意味がわかったところでもう一度最初のやつを考え直す。

次の推論をどう思うか?

- p_1: 雨である。
- p_2: **雨ならば傘が必要である。**$\leftarrow$ ここに注目。
- q: 傘が必要である。

$$p_1, p_2 \Rightarrow q$$

p_2 は、よく見ると、**条件命題** では!?

最初のやつを書き直そう。

次の推論をどう思うか?

- p_1: 雨である。
- p_2:
- q: 傘が必要である。

$$p_1, p_2 \Rightarrow q$$

は、けっきょく、こうだった↓。

最初のやつを書き直そう。

次の推論をどう思うか?

- p_1: 雨である。
- p_2: $p_1 \to q$
- q: 傘が必要である。

$$p_1, p_2 \Rightarrow q$$

は、けっきょく、こうだった↓。

最初のやつを書き直そう。

次の推論をどう思うか?

- p_1: 雨である。
- p_2: $p_1 \to q$
- q: 傘が必要である。

$$p_1, p_2 \Rightarrow q$$

は、けっきょく、こうだった↓。

$$p_1, p_1 \to q \Rightarrow q$$

最初のやつをきちんと検証してみる。

『p: 雨である』『q: 傘が必要である』とします。

1. 有効かどうかチェックしたい推論は $p, p \to q \Rightarrow q$。
2. つまり、　　　　　　　　　　がトートロジーかどうかチェックすればいい。
3. やってみよう:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$p \wedge (p \to q) \to q$

最初のやつをきちんと検証してみる。

『p: 雨である』『q: 傘が必要である』とします。

1. 有効かどうかチェックしたい推論は $p, p \to q \Rightarrow q$。
2. つまり、$p \wedge (p \to q) \to q$が**トートロジー**かどうかチェックすればいい。
3. やってみよう:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$p \wedge (p \to q) \to q$

最初のやつをきちんと検証してみる。

『p: 雨である』『q: 傘が必要である』とします。

1. 有効かどうかチェックしたい推論は $p, p \to q \Rightarrow q$。
2. つまり、$p \wedge (p \to q) \to q$ が**トートロジー**かどうかチェックすればいい。
3. やってみよう:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$p \wedge (p \to q) \to q$
F	F			
F	T			
T	F			
T	T			

最初のやつをきちんと検証してみる。

『p: 雨である』『q: 傘が必要である』とします。

1. 有効かどうかチェックしたい推論は $p, p \to q \Rightarrow q$。
2. つまり、$p \wedge (p \to q) \to q$が**トートロジー**かどうかチェックすればいい。
3. やってみよう:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$p \wedge (p \to q) \to q$
F	F	T		
F	T	T		
T	F	F		
T	T	T		

最初のやつをきちんと検証してみる。

『p: 雨である』『q: 傘が必要である』とします。

1. 有効かどうかチェックしたい推論は $p, p \to q \Rightarrow q$。
2. つまり、$p \wedge (p \to q) \to q$ が**トートロジー**かどうかチェックすればいい。
3. やってみよう:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$p \wedge (p \to q) \to q$
F	F	T	F	
F	T	T	F	
T	F	F	F	
T	T	T	T	

最初のやつをきちんと検証してみる。

『p: 雨である』『q: 傘が必要である』とします。

1. 有効かどうかチェックしたい推論は $p, p \to q \Rightarrow q$。
2. つまり、$p \wedge (p \to q) \to q$が**トートロジー**かどうかチェックすればいい。
3. やってみよう:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$p \wedge (p \to q) \to q$
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

練習

次の推論が妥当かどうかチェックせよ。

- p_1: 雨である。
- p_2: 雨ならば傘が必要である。
- q: 傘が不要である。

$$p_1, p_2 \Rightarrow q$$

練習

次の推論が妥当かどうかチェックせよ。

- p_1: 雨である。
- p_2: 晴れならば傘が不要である。
- q: 傘が必要である。

$$p_1, p_2 \Rightarrow q$$

練習

次の推論を記号で表わせ。また、妥当かどうか答えよ。

- **例題**『雨ならば傘が要る。雨である。よって傘が要る。』
  回答例: p を「雨である」、q を「傘が要る」とする。推論は $p \to q, p \Rightarrow q$ であり、妥当である。
- **問題**『卓上に置けて、計算ができれば電卓である。電卓であれば 10 キーがある。(これは)10 キーがなくて卓上にも置けない。ゆえに、(これは) 計算ができない。』

以下の、いわゆる三段論法が妥当な推論であることを示せ。

- p ならば q である。q ならば r である。ゆえに、p ならば r である。

練習

次の推論を記号で表わせ。また、妥当かどうか答えよ。

- **例題**『雨ならば傘が要る。雨である。よって傘が要る。』
  回答例: p を「雨である」、q を「傘が要る」とする。推論は $p \to q, p \Rightarrow q$ であり、妥当である。
- **問題**『卓上に置けて、計算ができれば電卓である。電卓であれば 10 キーがある。(これは)10 キーがなくて卓上にも置けない。ゆえに、(これは) 計算ができない。』

以下の、いわゆる三段論法が妥当な推論であることを示せ。

- p ならば q である。q ならば r である。ゆえに、p ならば r である。$p \to q, q \to r \Rightarrow p \to r$

限定子

限定子

集合 A を定義域とする命題関数 $p(x)$ に対して、次のような**限定子**(quantifier)がある。

- **全称限定子** ($\forall$; universal quantifier)
  $(\forall x \in A)\ p(x)$ 『A のすべての（任意の）元 x について $p(x)$ が真である。』という意味で、真か偽の値を持つ。
- **存在限定子** ($\exists$; existential quantifier)
  $(\exists x \in A)\ p(x)$ 『$p(x)$ が真となる $x \in A$ が (少なくとも 1 つ) 存在する。』という意味で、真か偽の値を持つ。

A が自明な場合は単に $\forall x\ p(x)$ や $\exists x\ p(x)$ と書くのも ok。

問. $(\forall x \in \mathbb{N})\ x \div 2 \in \mathbb{N}$ は真か偽か。また、$(\exists x \in \mathbb{N})\ x \div 2 \in \mathbb{N}$ はどうか。

限定子は「積む」ことができるが順序が重要な件

問: 意味を考えよう。同じものはどれかな？

A は学生の集合、B は授業の集合だとする。

- $(\forall x \in A\, \exists y \in B)\, x$ さんは y の単位を取れた。
  という意味。
- $(\exists x \in A\, \forall y \in B)\, x$ さんは y の単位を取れた。
  という意味。
- $(\forall y \in B\, \exists x \in A)\, x$ さんは y の単位を取れた。
  という意味。
- $(\exists y \in B\, \forall x \in A)\, x$ さんは y の単位を取れた。
  という意味。

考える時のポイント: 限定子は右結合なので、$\forall x\, \exists y\, p(x, y) = \forall x(\exists y\, p(x, y))$ と考える。

限定子は「積む」ことができるが順序が重要な件

問: 意味を考えよう。同じものはどれかな？

A は学生の集合、B は授業の集合だとする。

- $(\forall x \in A\, \exists y \in B)$ x さんは y の単位を取れた。
  すべての学生には何かしら合格した授業がある、という意味。
- $(\exists x \in A\, \forall y \in B)$ x さんは y の単位を取れた。
  という意味。
- $(\forall y \in B\, \exists x \in A)$ x さんは y の単位を取れた。
  という意味。
- $(\exists y \in B\, \forall x \in A)$ x さんは y の単位を取れた。
  という意味。

考える時のポイント: 限定子は右結合なので、$\forall x\, \exists y\, p(x, y) = \forall x(\exists y\, p(x, y))$ と考える。

限定子は「積む」ことができるが順序が重要な件

問: 意味を考えよう。同じものはどれかな？

A は学生の集合、B は授業の集合だとする。

- $(\forall x \in A\, \exists y \in B)$ x さんは y の単位を取れた。
  すべての学生には何かしら合格した授業がある、という意味。
- $(\exists x \in A\, \forall y \in B)$ x さんは y の単位を取れた。
  全部の単位を取れた学生が存在する、という意味。
- $(\forall y \in B\, \exists x \in A)$ x さんは y の単位を取れた。
  という意味。
- $(\exists y \in B\, \forall x \in A)$ x さんは y の単位を取れた。
  という意味。

考える時のポイント: 限定子は右結合なので、$\forall x\, \exists y\, p(x, y) = \forall x (\exists y\, p(x, y))$ と考える。

限定子は「積む」ことができるが順序が重要な件

問: 意味を考えよう。同じものはどれかな？

A は学生の集合、B は授業の集合だとする。

- $(\forall x \in A\, \exists y \in B)$ x さんは y の単位を取れた。
  すべての学生には何かしら合格した授業がある、という意味。
- $(\exists x \in A\, \forall y \in B)$ x さんは y の単位を取れた。
  全部の単位を取れた学生が存在する、という意味。
- $(\forall y \in B\, \exists x \in A)$ x さんは y の単位を取れた。
  どんな授業でも一人は合格者がいる、という意味。
- $(\exists y \in B\, \forall x \in A)$ x さんは y の単位を取れた。
  という意味。

考える時のポイント: 限定子は右結合なので、$\forall x\, \exists y\, p(x,y) = \forall x (\exists y\, p(x,y))$ と考える。

限定子は「積む」ことができるが順序が重要な件

問: 意味を考えよう。同じものはどれかな？

A は学生の集合、B は授業の集合だとする。

- $(\forall x \in A\, \exists y \in B)$ x さんは y の単位を取れた。
  すべての学生には何かしら合格した授業がある、という意味。
- $(\exists x \in A\, \forall y \in B)$ x さんは y の単位を取れた。
  全部の単位を取れた学生が存在する、という意味。
- $(\forall y \in B\, \exists x \in A)$ x さんは y の単位を取れた。
  どんな授業でも一人は合格者がいる、という意味。
- $(\exists y \in B\, \forall x \in A)$ x さんは y の単位を取れた。
  全学生が単位を取れた授業が存在する、という意味。

考える時のポイント: 限定子は右結合なので、$\forall x\, \exists y\, p(x,y) = \forall x(\exists y\, p(x,y))$ と考える。

限定子と否定

の法則

日本語に翻訳すると理解できるはず。

$$\neg(\forall x \in A)p(x) = (\exists x \in A)\neg p(x)$$
$$\neg(\exists x \in A)p(x) = (\forall x \in A)\neg p(x)$$

反例 (counterexample)

『すべての x について $p(x)$ が成り立つ、つまり $\forall x\, p(x)$』を否定したければ、『$p(x)$ が成り立たない x が存在する、つまり $\exists x\, \neg p(x)$』を示せばいい。

限定子と否定

De Morganの法則

日本語に翻訳すると理解できるはず。

$$\neg(\forall x \in A)p(x) = (\exists x \in A)\neg p(x)$$
$$\neg(\exists x \in A)p(x) = (\forall x \in A)\neg p(x)$$

反例 (counterexample)

『すべての x について $p(x)$ が成り立つ、つまり $\forall x\, p(x)$』を否定したければ、『$p(x)$ が成り立たない x が存在する、つまり $\exists x\, \neg p(x)$』を示せばいい。

ミニレポート課題 (提出期間: 本日〜次回の授業の前日)

p. 17 の問題を解け。

解答を PC 文書や手書きで作成し、PDF にして Google Forms (https://forms.gle/hCyJBbFBMW9AisAt7) から提出せよ (要組織アカウントによるログイン)。ただし写真等の画像ファイルの場合は、解像度や露出・照明状態などを十分考慮し、きちんと読解可能なクオリティのものとすること。スマートフォンの場合はスキャナアプリの類の利用を必須とする。

p	q	r					
F	F	F					
F	F	T					
F	T	F					
F	T	T					
T	F	F					
T	F	T					
T	T	F					
T	T	T					

p	q	r	s						
F	F	F	F						
F	F	F	T						
F	F	T	F						
F	F	T	T						
F	T	F	F						
F	T	F	T						
F	T	T	F						
F	T	T	T						
T	F	F	F						
T	F	F	T						
T	F	T	F						
T	F	T	T						
T	T	F	F						
T	T	F	T						
T	T	T	F						
T	T	T	T						

おまけ: 論理と推論のゲーム『Zebra Puzzle (ミニ)』

問: シマウマを飼っているのは誰でしょう？

- **赤**・**青**・**緑** の 3 軒の家が並んでいます。
- 日本人, イギリス人, スペイン人の 3 人がそれぞれ別の家に住んでいます。
- 犬・ネコ・シマウマがそれぞれ別の家で飼われています。
- イギリス人は赤い家に住んでいます。
- スペイン人は犬を飼っています。
- 日本人はネコの飼い主の右側に住んでいます。
- ネコの飼い主は青い家の左隣に住んでいます。

コンピュータに知識を与え、推論させる。(言語は Prolog)

```
/* 『X が Y の右側にある』の定義 */
右側(X, Y, [Y, X, _]).
右側(X, Y, [Y, _, X]).
右側(X, Y, [_, Y, X]).
/* 『Y が X の左隣にある』の定義 */
左隣(Y, X, [Y, X, _]).
左隣(Y, X, [_, Y, X]).
/* 問題文で語られている『ルール』 */
f(X) :- member(家(赤, イギリス人, _), X),
        member(家( _, スペイン人, 犬), X),
        member(家( _, _, シマウマ), X),
        member(家(緑, _, _), X),
        右側(家(_, 日本人, _), 家(_, _, ネコ), X),
        左隣(家(_, _, ネコ), 家(青, _, _), X).
```