

離散数学

授業開始までしばらくお待ちください。

2024

離散数学

Discrete Mathematics

『関係 II』



bit.ly/d-math

小林裕之

大阪工業大学 RD 学部システムデザイン工学科



OSAKA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

6 of 14

a L^AT_EX + Beamer slideshow

授業の受講に関して

- 講義資料（スライド等）は **Google Drive** (<https://bit.ly/d-math>) に置く（紙の配布資料は行わない）。授業前には虫喰い状態のスライドのみを提供するが、授業後に uncovered フォルダに穴埋め版を置くので復習に活用されたい。
- ミニレポートは **Google Forms** (<https://forms.gle/hCyJBbFBMW9AisAt7>) に提出。
- 授業の録画はできるだけスライドと同じフォルダ内のフォルダに置くように努力する（が、必ず置きますとお約束はしません）。
- 授業中に計算間違い等を指摘してくれたらその都度 1 点。（内容に依るけど。）

成績評価について

- 出席そのものは評価せず。極論するとテストのみ出席で他は全欠席でも A 評価はあり得る。
- 基本的には**中間演習**と**期末試験**で評価。
- 毎回ミニレポートを課す。出す者は提出期間を厳守すること。
- 試験の不合格者は**毎回のミニレポート**と**出席**で少し救済する。
(しっかりした内容のミニレポートを概ね 9 割以上提出し、かつ大学の出欠管理システムで 8 割以上遅刻せず出席していた場合最大 10 点程度の救済。提出数や出席数が少ない場合は救済幅が縮小する。いずれかが 7 割を下回ったら一切救済しない。締め切り後の提出は認めない。)
- **授業中に**スライドの誤りを見つけて指摘してくれた者には、誤り一箇所につき先着一名様限り 100 点満点 1 点相当の加点を行う。(ただしごく軽微なものなど、内容によっては加点しない場合もあり。)

関係の性質

どれも A 上の関係の話です。

関係 R は

- $(\forall a \in A) aRa$ であるとき、○
- $(\forall a, b \in A) aRb \rightarrow bRa$ が真であるとき、○
- $(\forall a, b, c \in A) aRb, bRc \rightarrow aRc$ が真であるとき、○
- $(\forall a, b \in A) aRb, bRa \rightarrow a = b$ が真であるとき、○

..... ?

関係の性質

どれも A 上の関係の話です。

関係 R は

- $(\forall a \in A) aRa$ であるとき、**反射的**。
- $(\forall a, b \in A) aRb \rightarrow bRa$ が真であるとき、○
- $(\forall a, b, c \in A) aRb, bRc \rightarrow aRc$ が真であるとき、○
- $(\forall a, b \in A) aRb, bRa \rightarrow a = b$ が真であるとき、○

..... ?

関係の性質

どれも A 上の関係の話です。

関係 R は

- $(\forall a \in A) aRa$ であるとき、**反射**的。
- $(\forall a, b \in A) aRb \rightarrow bRa$ が真であるとき、**対称**的。
- $(\forall a, b, c \in A) aRb, bRc \rightarrow aRc$ が真であるとき、。
- $(\forall a, b \in A) aRb, bRa \rightarrow a = b$ が真であるとき、。

..... ?

関係の性質

どれも A 上の関係の話です。

関係 R は

- $(\forall a \in A) aRa$ であるとき、**反射**的。
- $(\forall a, b \in A) aRb \rightarrow bRa$ が真であるとき、**対称**的。
- $(\forall a, b, c \in A) aRb, bRc \rightarrow aRc$ が真であるとき、**推移**的。
- $(\forall a, b \in A) aRb, bRa \rightarrow a = b$ が真であるとき、。

..... ?

関係の性質

どれも A 上の関係の話です。

関係 R は

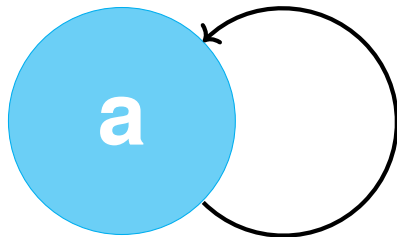
- $(\forall a \in A) aRa$ であるとき、**反射**的。
- $(\forall a, b \in A) aRb \rightarrow bRa$ が真であるとき、**対称**的。
- $(\forall a, b, c \in A) aRb, bRc \rightarrow aRc$ が真であるとき、**推移**的。
- $(\forall a, b \in A) aRb, bRa \rightarrow a = b$ が真であるとき、**反対称**的。

..... ?

関係が反射的であるとは？

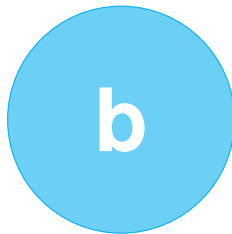


関係が反射的であるとは？

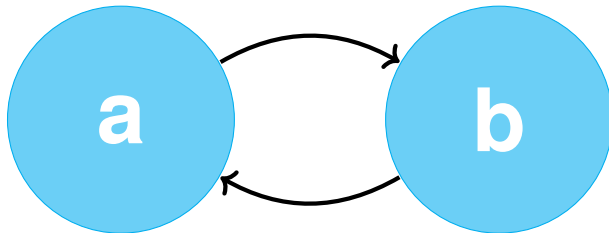


これが全ての元について成り立つ。

関係が対称的であるとは？



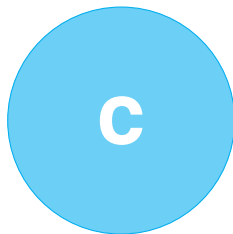
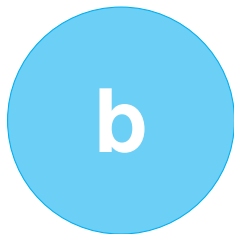
関係が対称的であるとは？



関係があるもの同士であるならば、必ず双方向

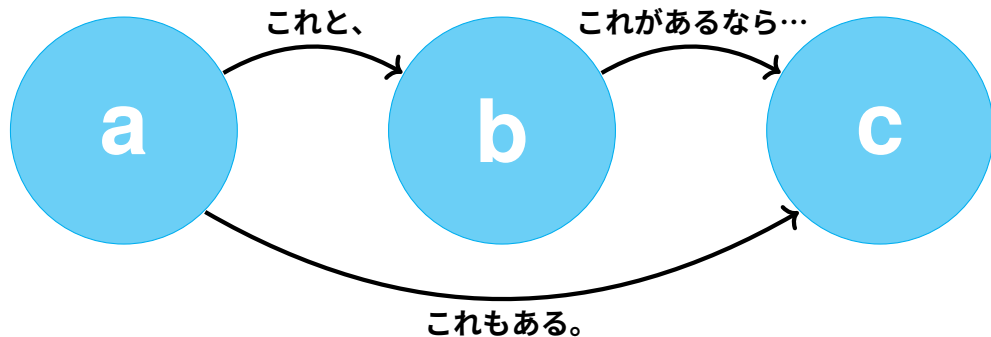
関係が推移的であるとは？

指示代名詞だけですみません。



関係が推移的であるとは？

指示代名詞だらけですみません。



これが必ず言える。

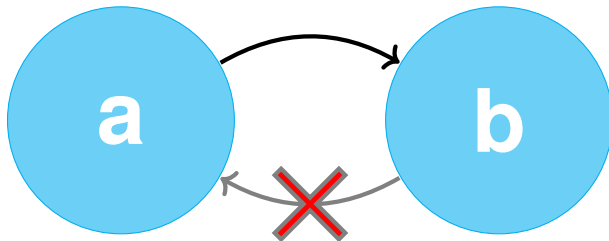
関係が反対称的であるとは？

これが多分一番わかりにくい



関係が反対称的であるとは？

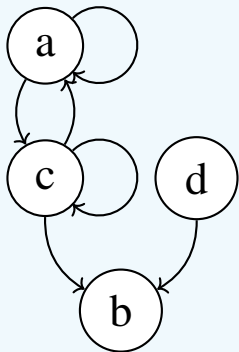
これが多分一番わかりにくい



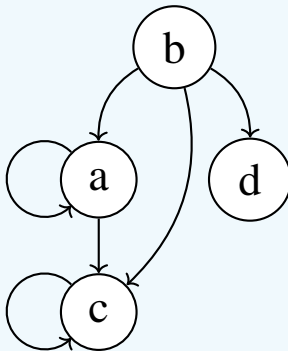
それ自身以外とは対称なペアはない。

練習

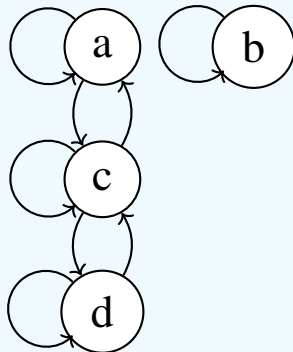
次の関係それぞれについて反射性、対称性、推移性、反対称性を答えよ。



反射: 対称:
推移: 反対称:



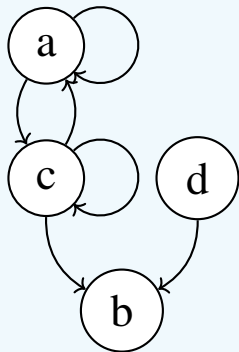
反射: 対称:
推移: 反対称:



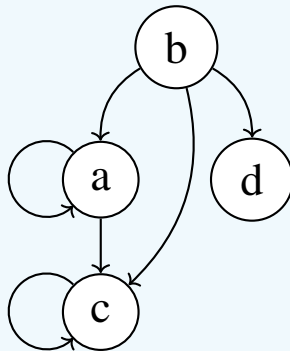
反射: 対称:
推移: 反対称:

練習

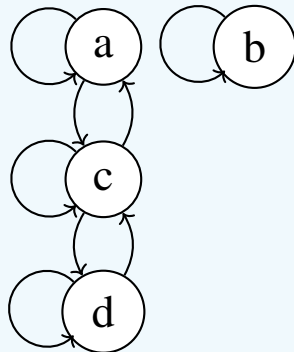
次の関係それぞれについて反射性、対称性、推移性、反対称性を答えよ。



反射: ✕ 対称: ✕
推移: ✕ 反対称: ✕



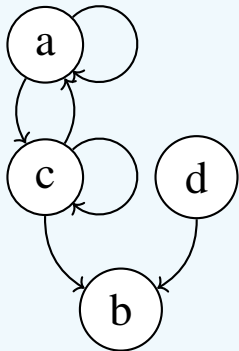
反射: 対称:
推移: 反対称:



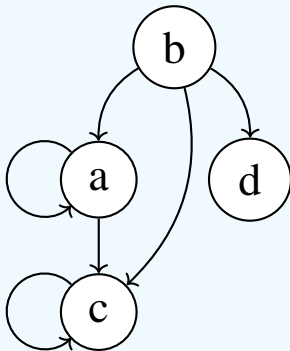
反射: 対称:
推移: 反対称:

練習

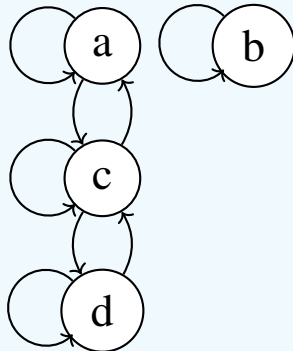
次の関係それぞれについて反射性、対称性、推移性、反対称性を答えよ。



反射: × 対称: ×
推移: × 反対称: ×



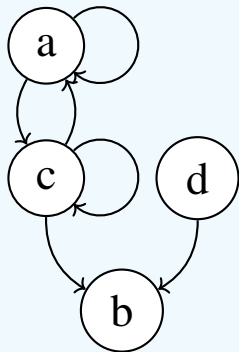
反射: × 対称: ×
推移: ○ 反対称: ○



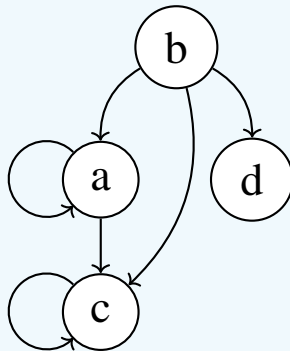
反射: 対称:
推移: 反対称:

練習

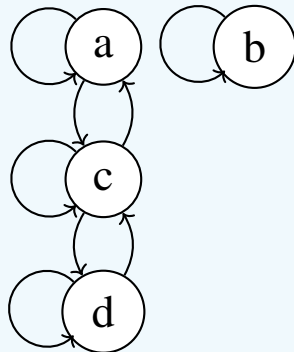
次の関係それぞれについて反射性、対称性、推移性、反対称性を答えよ。



反射: × 対称: ×
推移: × 反対称: ×



反射: × 対称: ×
推移: ○ 反対称: ○



反射: ○ 対称: ○
推移: × 反対称: ×

クイズ

問に答えよ。

1. 反射的な関係の隣接行列は簡単に言うとどんなものか?
2. 対称的な関係の隣接行列はひと言で言っていて何か?

問に答えよ。

1. 反射的な関係の隣接行列は簡単に言うとどんなものか？

対角成分が非零の行列

2. 対称的な関係の隣接行列はひと言で言って何か？

クイズ

問に答えよ。

1. 反射的な関係の隣接行列は簡単に言うとどんなものか?

対角成分が非零の行列

2. 対称的な関係の隣接行列はひと言で言って何か?

対称行列

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射,

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称,

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称,

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射,

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称,

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称,

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射,

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称,

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称,

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射,

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称,

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称,

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

○反射,

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

○反射, ○対称,

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

○反射, ○対称, ○反対称,

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

○反射, ○対称, ○反対称, ○推移

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

○反射, ○対称, ○反対称, ○推移

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

✕反射,

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

○反射, ○対称, ○反対称, ○推移

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

✕反射, ○対称,

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

○反射, ○対称, ○反対称, ○推移

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称,

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

○反射, ○対称, ○反対称, ○推移

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

○反射, ○対称, ○反対称, ○推移

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

○反射,

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

○反射, ○対称, ○反対称, ○推移

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

○反射, ○対称,

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

○反射, ○対称, ○反対称, ○推移

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

○反射, ○対称, ✕反対称,

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

○反射, ○対称, ○反対称, ○推移

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

○反射, ○対称, ○反対称, ○推移

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

○反射,

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

○反射, ○対称, ○反対称, ○推移

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

○反射, ✕対称,

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

○反射, ○対称, ○反対称, ○推移

6. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

7. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

8. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

○反射, ✕対称, ○反対称,

練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の \mathbb{N} 上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✕反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ○推移

3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{ が奇数}\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ○推移

5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

○反射, ○対称, ○反対称, ○推移

6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

✕反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

○反射, ○対称, ✕反対称, ✕推移

8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

○反射, ✕対称, ○反対称, ✕推移

集合の分割

集合 S (ただし $S \neq \emptyset$) の**分割** (partition) とは以下を満たす集合^a $\{A_i \mid A_i \subset S\}$ である。

^a集合の集合 (すなわち集合族) になっている点に注意。

上記の A_i のことを という。

集合の分割

集合 S (ただし $S \neq \emptyset$) の**分割** (partition) とは以下を満たす集合^a $\{A_i \mid A_i \subset S\}$ である。

- $\forall a \in S$ について $\exists A_i, a \in A_i$

^a集合の集合 (すなわち集合族) になっている点に注意。

上記の A_i のことを という。

集合 S (ただし $S \neq \emptyset$) の**分割** (partition) とは以下を満たす集合^a $\{A_i \mid A_i \subset S\}$ である。

- $\forall a \in S$ について $\exists A_i, a \in A_i$
- $A_i \neq A_j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$

^a集合の集合 (すなわち集合族) になっている点に注意。

上記の A_i のことを という。

集合 S (ただし $S \neq \emptyset$) の**分割** (partition) とは以下を満たす集合^a $\{A_i \mid A_i \subset S\}$ である。

- $\forall a \in S$ について $\exists A_i, a \in A_i$
- $A_i \neq A_j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$
- $A_i \neq \emptyset$

^a集合の集合 (すなわち集合族) になっている点に注意。

上記の A_i のことを という。

集合 S (ただし $S \neq \emptyset$) の**分割** (partition) とは以下を満たす集合^a $\{A_i \mid A_i \subset S\}$ である。

- $\forall a \in S$ について $\exists A_i, a \in A_i$
- $A_i \neq A_j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$
- $A_i \neq \emptyset$

^a集合の集合 (すなわち集合族) になっている点に注意。

上記の A_i のことを細胞という。

クイズ

問に答えよ。

1. $\{\mathbb{N}, \{a \mid -a \in \mathbb{N}\}\}$ は \mathbb{Z} の分割か?
2. $\{1, 2\}$ の分割をすべて挙げよ。
3. $\{1, 2, 3\}$ の分割はいくつあるか?

クイズ

問に答えよ。

1. $\{\mathbb{N}, \{a \mid -a \in \mathbb{N}\}\}$ は \mathbb{Z} の分割か?
2. $\{1, 2\}$ の分割をすべて挙げよ。
3. $\{1, 2, 3\}$ の分割はいくつあるか?

1. 否。(0 がない)

クイズ

問に答えよ。

1. $\{\mathbb{N}, \{a \mid -a \in \mathbb{N}\}\}$ は \mathbb{Z} の分割か?
2. $\{1, 2\}$ の分割をすべて挙げよ。
3. $\{1, 2, 3\}$ の分割はいくつあるか?
 1. 否。(0 がない)
 2. $\{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1, 2\}\}$

クイズ

問に答えよ。

1. $\{\mathbb{N}, \{a \mid -a \in \mathbb{N}\}\}$ は \mathbb{Z} の分割か?
2. $\{1, 2\}$ の分割をすべて挙げよ。
3. $\{1, 2, 3\}$ の分割はいくつあるか?

1. 否。(0 がない)
2. $\{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1, 2\}\}$
3. 5 つ。($\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{1\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}$)

問: combinations

あるリスト **a** と整数値 **n** を引数として与えると **a** の要素から **n** 個をすべての組み合わせで抽出する関数 **cmb(a, n)** を作成し、例として **[1, 2, 3, 4, 5]** から 3 つを選ぶやり方 10 とおりをすべて示すプログラムとして完成させよ。

実行例

```
$ python3 combinations.py
[[1, 2, 3], [1, 2, 4], [1, 2, 5], [1, 3, 4],
[1, 3, 5], [1, 4, 5], [2, 3, 4], [2, 3, 5],
[2, 4, 5], [3, 4, 5]]
```

問: combinations

あるリスト **a** と整数値 **n** を引数として与えると **a** の要素から **n** 個をすべての組み合わせで抽出する関数 **cmb(a, n)** を作成し、例として **[1, 2, 3, 4, 5]** から 3 つを選ぶやり方 10 とおりをすべて示すプログラムとして完成させよ。

実行例

```
$ python3 combinations.py
[[1, 2, 3], [1, 2, 4], [1, 2, 5], [1, 3, 4],
[1, 3, 5], [1, 4, 5], [2, 3, 4], [2, 3, 5],
[2, 4, 5], [3, 4, 5]]
```

```
def cmb(a, n):
    ret = []
    if n == 1:
        for i in a:
            ret.append([i])
        return ret
    for i in range(len(a)):
        subcmbs = cmb(a[i + 1:], n - 1)
        for c in subcmbs:
            ret.append([a[i]] + c)
    return ret

print(cmb([1, 2, 3, 4, 5], 3))
```

$|A| = n$ なる集合 A の分割はいくつあるか?

$|A| = n$ なる集合 A の分割はいくつあるか?

これはそんなに単純じゃない

(参考) 数え上げといえば…

集合のところでやりました、似たようなことを。

n 個のモノを『違いが区別できる k 種類』に分けるやり方は何通りあるか? (これを $N(n, k)$ とする。)

例: 5 人の学生を R, S, W^1 に分けるやり方は
とおり。 n 人を k クラスなら?

¹ R, S, W は違いが区別できる 3 種類。

(参考) 数え上げといえば…

集合のところでやりました、似たようなことを。

n 個のモノを『違いが区別できる k 種類』に分けるやり方は何通りあるか? (これを $N(n, k)$ とする。)

例: 5 人の学生を R, S, W^1 に分けるやり方は
 $3^5 - 3 \times 2^5 + 3 \times 1^5 + 0 = 150$ とおり。 n 人を k クラスなら?

¹ R, S, W は違いが区別できる 3 種類。

(参考) 数え上げといえば…

集合のところでやりました、似たようなことを。

n 個のモノを『違いが区別できる k 種類』に分けるやり方は何通りあるか? (これを $N(n, k)$ とする。)

例: 5 人の学生を R, S, W¹ に分けるやり方は
 $3^5 - 3 \times 2^5 + 3 \times 1^5 + 0 = 150$ とおり。 n 人を k クラスなら?

$$N(n, k) = \sum_{m=0}^k (-1)^m {}_k\mathbf{C}_m (k-m)^n$$

¹R, S, W は違いが区別できる 3 種類。

(参考) 数え上げといえば…

集合のところでやりました、似たようなことを。

n 個のモノを『違いが区別できる k 種類』に分けるやり方は何通りあるか? (これを $N(n, k)$ とする。)

例: 5 人の学生を R, S, W¹ に分けるやり方は
 $3^5 - 3 \times 2^5 + 3 \times 1^5 + 0 = 150$ とおり。 n 人を k クラスなら?

$$N(n, k) = \sum_{m=0}^k (-1)^m {}_k\mathbf{C}_m (k-m)^n = \sum_{m=0}^k (-1)^m \frac{k!}{m!(k-m)!} (k-m)^n$$

¹R, S, W は違いが区別できる 3 種類。

(参考) 第2種 Stirling 数

n 個のモノを『**違いが区別できない** k 種類』に分けるやり方 (k 分割するやり方) は何通りあるか? (これを第2種スターリング数 $S(n, k)$ という。)

(参考) 第2種 Stirling 数

n 個のモノを『**違いが区別できない** k 種類』に分けるやり方 (k 分割するやり方) は何通りあるか? (これを第2種スターリング数 $S(n, k)$ という。)

$$S(n, k) = \frac{N(n, k)}{k!}$$

(参考) 第2種 Stirling 数

n 個のモノを『**違いが区別できない** k 種類』に分けるやり方 (k 分割するやり方) は何通りあるか? (これを第2種スターリング数 $S(n, k)$ という。)

$$S(n, k) = \frac{N(n, k)}{k!} = \sum_{m=0}^k (-1)^m \frac{(k-m)^n}{m!(k-m)!}$$

$|A| = n$ なる集合 A の分割はいくつあるか? (これを **ベル数** B_n という。)

問: $B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5$ である。 B_4 を求めよ。

$|A| = n$ なる集合 A の分割はいくつあるか? (これを **ベル数** B_n という。)

ベル数の漸化式:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k B_k \quad (n > 0, B_0 = 1)$$

問: $B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5$ である。 B_4 を求めよ。

$|A| = n$ なる集合 A の分割はいくつあるか? (これを **ベル数** B_n という。)

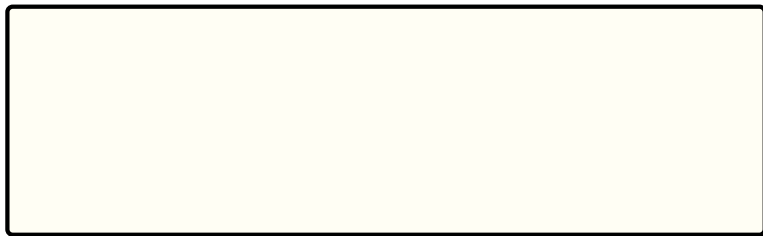
ベル数の漸化式:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k B_k \quad (n > 0, B_0 = 1)$$

問: $B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5$ である。 B_4 を求めよ。

15

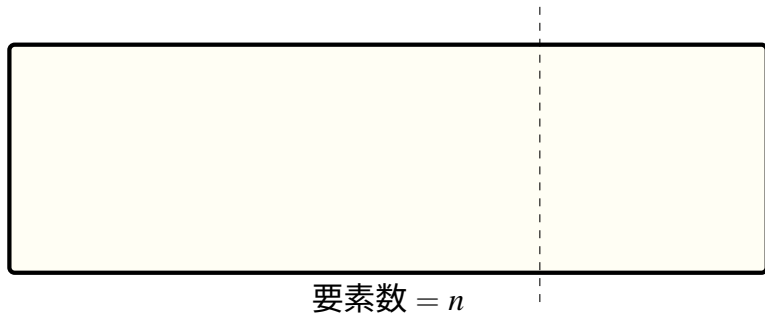
(参考) ベル数の漸化式の考え方



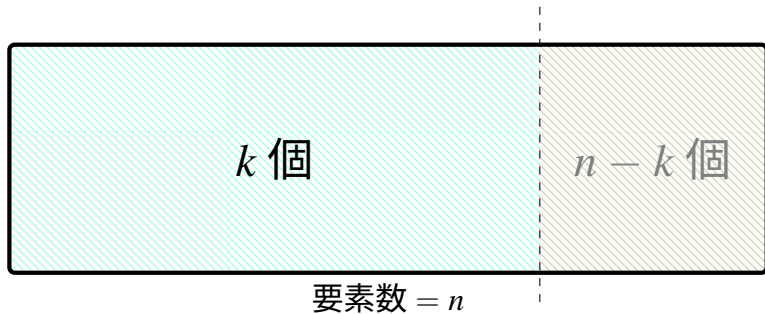
要素数 $= n$

$$B_n =$$

(参考) ベル数の漸化式の考え方

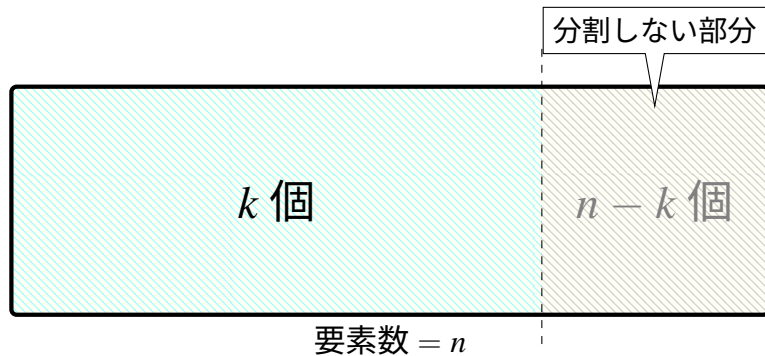


(参考) ベル数の漸化式の考え方



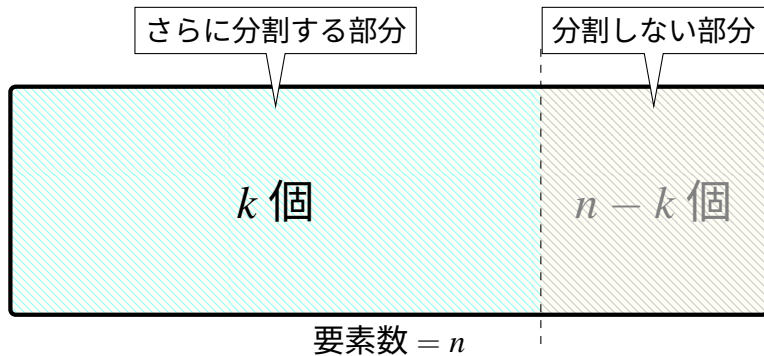
$$B_n =$$

(参考) ベル数の漸化式の考え方



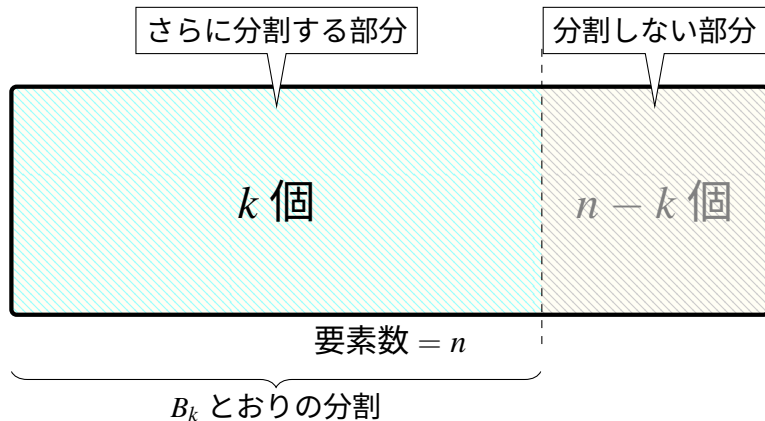
$$B_n =$$

(参考) ベル数の漸化式の考え方



$$B_n =$$

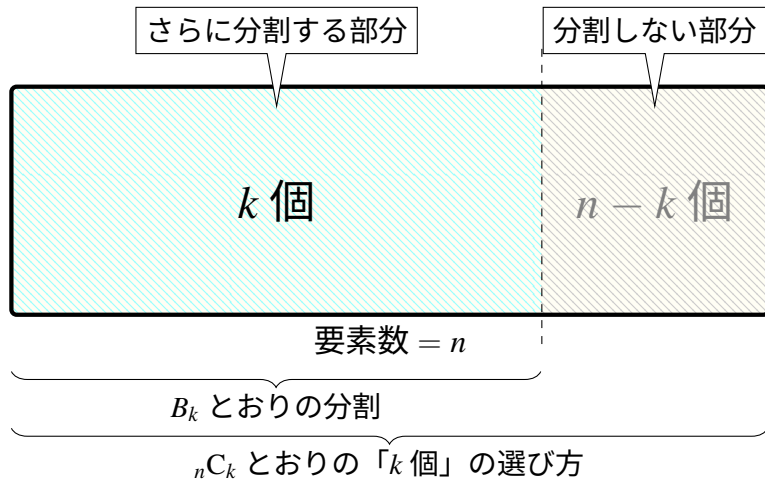
(参考) ベル数の漸化式の考え方



$$B_n =$$

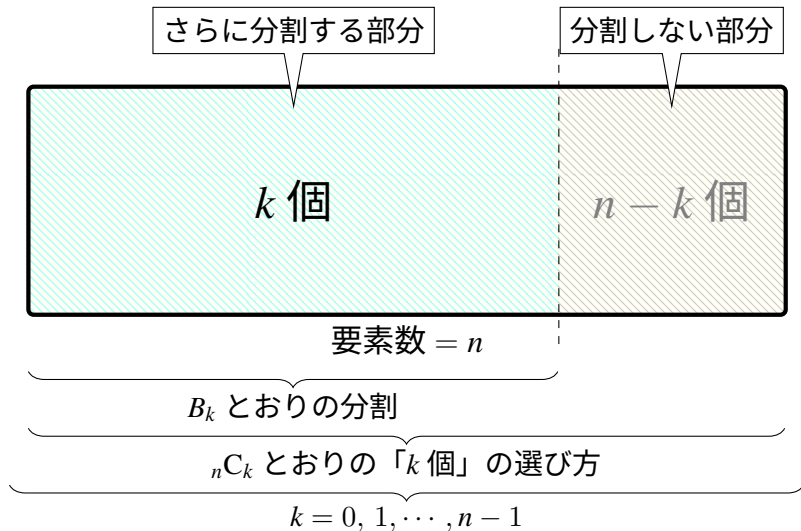
$$B_k$$

(参考) ベル数の漸化式の考え方



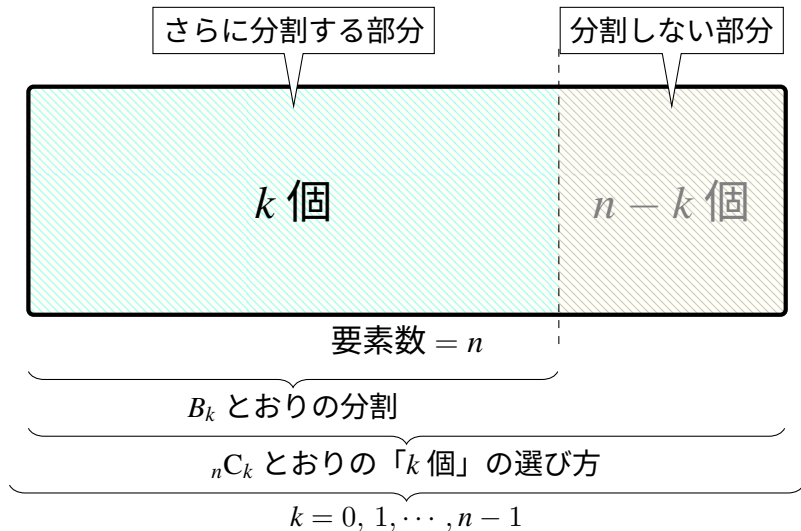
$$B_n = {}_nC_k B_k$$

(参考) ベル数の漸化式の考え方



$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k B_k$$

(参考) ベル数の漸化式の考え方



$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k B_k$$

(参考) ベル数と第 2 種スターリング数との関係

これで全部つながった。

n 個の分割 $= n$ 個を 0 分割 $+ n$ 個を 1 分割 $+ n$ 個を 2 分割
 $+ \cdots + n$ 個を n 分割

なので

$$B_n =$$

(参考) ベル数と第 2 種スターリング数との関係

これで全部つながった。

n 個の分割 = n 個を 0 分割 + n 個を 1 分割 + n 個を 2 分割
+ \cdots + n 個を n 分割

なので

$$B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$$

同値関係 (equivalence relation)

S 上の関係 R が、

のとき

という。

例: \mathbb{Z} 上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$ は (『イコール』の関係なのでいかにも同値ぽく感じられるが、実際に) 同値関係と言えるかどうか調べよ。

$\langle a, b \rangle$ が R 上の同値関係の元のとき、

と書く。

同値関係 (equivalence relation)

S 上の関係 R が、

- **反射的** かつ

のとき

という。

例: \mathbb{Z} 上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$ は (『イコール』の関係なのでいかにも同値ぽく感じられるが、実際に) 同値関係と言えるかどうか調べよ。

$\langle a, b \rangle$ が R 上の同値関係の元のとき、

と書く。

同値関係 (equivalence relation)

S 上の関係 R が、

- **反射的** かつ
- **対称的** かつ

のとき

という。

例: \mathbb{Z} 上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$ は (『イコール』の関係なのでいかにも同値ぽく感じられるが、実際に) 同値関係と言えるかどうか調べよ。

$\langle a, b \rangle$ が R 上の同値関係の元のとき、

と書く。

同値関係 (equivalence relation)

S 上の関係 R が、

- **反射的** かつ
- **対称的** かつ
- **推移的**

のとき

という。

例: \mathbb{Z} 上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$ は (『イコール』の関係なのでいかにも同値ぽく感じられるが、実際に) 同値関係と言えるかどうか調べよ。

$\langle a, b \rangle$ が R 上の同値関係の元するとき、

と書く。

同値関係 (equivalence relation)

S 上の関係 R が、

- **反射的** かつ
- **対称的** かつ
- **推移的**

のとき**同値関係**という。

例: \mathbb{Z} 上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$ は (『イコール』の関係なのでいかにも同値ぽく感じられるが、実際に) 同値関係と言えるかどうか調べよ。

$\langle a, b \rangle$ が R 上の同値関係の元するとき、

と書く。

同値関係 (equivalence relation)

S 上の関係 R が、

- **反射的** かつ
- **対称的** かつ
- **推移的**

のとき**同値関係**という。

例: \mathbb{Z} 上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$ は (『イコール』の関係なのでいかにも同値ぽく感じられるが、実際に) 同値関係と言えるかどうか調べよ。

$\langle a, b \rangle$ が R 上の同値関係の元するとき、 $a \sim_R b$ と書く。

コラム: 波ダッシュ問題

波ダッシュ (WAVE DASH) と全角チルダ (FULLWIDTH TILDE)

～の形をした文字はいくつかあって、特に『**波ダッシュ～(U+301C)**』と『**全角チルダ～(U+FF5E)**』が混乱を呼ぶ。

- 現在はどちらの文字も見た目では区別不能。(以前は波ダッシュについて、Windows のフォントと Unicode の例示における字形で誤ったものが使われていた。(macOS では今でも一部のソフトで誤グリフが表示される?))
- **Windows では普通に入力すると全角チルダ (U+FF5E) になる。**
- その他 (Linux, macOS, etc.) ではたいてい波ダッシュ (U+301C) になる。
- e-mail で使われることの多い、日本語の伝統的なエンコーディング ISO-2022-JP の場合、波ダッシュは『01 区 33 点』にあるが、**全角チルダに相当する文字はない**。(けれど、Windows は独自拡張で (ISO-2022-JP にも関わらず全角チルダを) 送ろうとしてしまう。→ いわゆる機種依存文字問題のひとつ。)

「整数の合同」という「関係」

$a, b, n \in \mathbb{Z}$ について、『 a を n で割った余り』と『 b を n で割った余り』が等しいとき、

- a, b が n を法として合同 と言い、
- $a \equiv_n b$ や $a \equiv b \pmod{n}$ などと書く。

ちなみに『余り』が怪しいとき (負数とか) は『 $a - b$ が n で割り切れるか』で考えると混乱しないのでおすすめ。

もう一つちなみに、プログラミング言語の `mod` は負数の結果についてはまちまち (バージョンによって異なったり、そもそも未定義 (実装依存) だったり) なので注意。

mini Q: 合同は同値関係であることを確認せよ。

同値関係にある元をすべて集めると…

$$\subset A$$

で定義される集合を、『 a を代表とする』という。 $(R$ が明らかな場合は省略することもある。)

練習 (4 分)

$S = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 20\}$ 上の関係 $R = \{\langle a, b \rangle \mid a \equiv_5 b\}$ について $[11]_R$ を求めよ。

参考) 合同の関係を用了同値類を**剰余類**とも言う。

同値関係にある元をすべて集めると…

$$[a]_R = \{x \mid a \sim_R x\} \subset A$$

で定義される集合を、『 a を代表とする』という。 $(R$ が明らかな場合は省略することもある。)

練習 (4 分)

$S = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 20\}$ 上の関係 $R = \{\langle a, b \rangle \mid a \equiv_5 b\}$ について $[11]_R$ を求めよ。

参考) 合同の関係を用了た同値類を**剰余類**とも言う。

同値関係にある元をすべて集めると…

同値類

$$[a]_R = \{x \mid a \sim_R x\} \subset A$$

で定義される集合を、『 a を代表とする **同値類**』という。 $(R$ が明らかな場合は省略することもある。)

練習 (4 分)

$S = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 20\}$ 上の関係 $R = \{\langle a, b \rangle \mid a \equiv_5 b\}$ について $[11]_R$ を求めよ。

参考) 合同の関係を用了た同値類を**剰余類**とも言う。

商とは

A 上の同値関係 R について、
を といい、 と表す。

$$\subset \mathcal{P}(A)$$

- 商は A の の一つである。
- 同値関係で A を分割することを という。

商とは

A 上の同値関係 R について、**同値類全体**
の集合を A/R といい、 A/R と表す。

$$A/R \subset \mathcal{P}(A)$$

- 商は A の A/R の一つである。
- 同値関係で A を分割することを A/R という。

商とは

A 上の同値関係 R について、**同値類全体**
の集合を**商**(商集合)といい、 A/R と表す。

$$A/R \subset \mathcal{P}(A)$$

- 商は A の A/R の一つである。
- 同値関係で A を分割することを A/R という。

商とは

A 上の同値関係 R について、**同値類全体の集合**を**商**(商集合)といい、 A/R と表す。

$$\subset \mathcal{P}(A)$$

- 商は A の の一つである。
- 同値関係で A を分割することを という。

商とは

A 上の同値関係 R について、**同値類全体の集合**を**商**(商集合)といい、 A/R と表す。

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\} \subset \mathcal{P}(A)$$

- 商は A の の一つである。
- 同値関係で A を分割することを という。

商とは

A 上の同値関係 R について、**同値類全体の集合**を**商**(商集合)といい、 A/R と表す。

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\} \subset \mathcal{P}(A)$$

- 商は A の分割の一つである。
- 同値関係で A を分割することを という。

商とは

A 上の同値関係 R について、**同値類全体の集合**を**商**(商集合)といい、 A/R と表す。

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\} \subset \mathcal{P}(A)$$

- 商は A の分割の一つである。
- 同値関係で A を分割することを類別という。

練習 (8 分)

問に答えよ。

集合 $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 < x < 12\}$ 上での関係
 $R = \{\langle a, b \rangle \mid a \equiv_3 b\}$ を考える。

1. R を外延的表記で表わせ。
2. $[5]_R$ を求めよ。
3. A/R を求めよ。

練習 (8 分)

問に答えよ。

集合 $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 < x < 12\}$ 上での関係
 $R = \{\langle a, b \rangle \mid a \equiv_3 b\}$ を考える。

1. R を外延的表記で表わせ。

2. $[5]_R$ を求めよ。

3. A/R を求めよ。

1. $\{\langle 4, 4 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 4, 10 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 5, 8 \rangle, \langle 5, 11 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 6, 9 \rangle, \langle 7, 4 \rangle, \langle 7, 7 \rangle, \langle 7, 10 \rangle, \langle 8, 5 \rangle, \langle 8, 8 \rangle, \langle 8, 11 \rangle, \langle 9, 6 \rangle, \langle 9, 9 \rangle, \langle 10, 4 \rangle, \langle 10, 7 \rangle, \langle 10, 10 \rangle, \langle 11, 5 \rangle, \langle 11, 8 \rangle, \langle 11, 11 \rangle\}$

練習 (8 分)

問に答えよ。

集合 $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 < x < 12\}$ 上での関係
 $R = \{\langle a, b \rangle \mid a \equiv_3 b\}$ を考える。

1. R を外延的表記で表わせ。

2. $[5]_R$ を求めよ。

3. A/R を求めよ。

- $\{\langle 4, 4 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 4, 10 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 5, 8 \rangle, \langle 5, 11 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 6, 9 \rangle, \langle 7, 4 \rangle, \langle 7, 7 \rangle, \langle 7, 10 \rangle, \langle 8, 5 \rangle, \langle 8, 8 \rangle, \langle 8, 11 \rangle, \langle 9, 6 \rangle, \langle 9, 9 \rangle, \langle 10, 4 \rangle, \langle 10, 7 \rangle, \langle 10, 10 \rangle, \langle 11, 5 \rangle, \langle 11, 8 \rangle, \langle 11, 11 \rangle\}$
- $\{5, 8, 11\}$

練習 (8 分)

問に答えよ。

集合 $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 < x < 12\}$ 上での関係
 $R = \{\langle a, b \rangle \mid a \equiv_3 b\}$ を考える。

1. R を外延的表記で表わせ。

2. $[5]_R$ を求めよ。

3. A/R を求めよ。

1. $\{\langle 4, 4 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 4, 10 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 5, 8 \rangle, \langle 5, 11 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 6, 9 \rangle, \langle 7, 4 \rangle, \langle 7, 7 \rangle, \langle 7, 10 \rangle, \langle 8, 5 \rangle, \langle 8, 8 \rangle, \langle 8, 11 \rangle, \langle 9, 6 \rangle, \langle 9, 9 \rangle, \langle 10, 4 \rangle, \langle 10, 7 \rangle, \langle 10, 10 \rangle, \langle 11, 5 \rangle, \langle 11, 8 \rangle, \langle 11, 11 \rangle\}$

2. $\{5, 8, 11\}$

3. $\{\{4, 7, 10\}, \{5, 8, 11\}, \{6, 9\}\}$

復習

以下の用語, 記号などを説明せよ。

集合, 元, 外延的表記, 内包的表記, \emptyset , U , \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , 部分集合, 真部分集合, 全体集合, 空集合, 濃度, 有限集合, 無限集合, \aleph_0 , 和集合, 積集合, 直積集合, 冪集合, 補集合, 差集合, \cap , \cup , \in , \subset , $P(A)$, $A \times B$, ベキ等律, 交換律, 結合律, 分配律, 吸収律, ド・モルガンの法則, 包除原理, 命題, 真理値, 複合命題, 条件命題, 論理和, 論理積, 論理否定, トートロジー, コントラディクション, 補元律, 対合律, 順, 逆, 裏, 対偶, 推論, 前提, 結論, 有効, 謬論, 関係, 順序対, A^2 , 逆関係, 合成関係, 関係グラフ, 有向グラフ, 隣接行列, 反射的, 対称的, 反対称的, 推移的, 分割, 細胞, スターリング数, ベル数, (整数の) 合同, 同値関係, 同値類, 剰余類, 商, 類別

練習 (2. は若干の雑学的知識が必要なのでそれが理由で間違えても気にしないでいいです。)

1. A 上の関係を表す以下の 2 つの隣接行列について反射・対称・推移・反対称の性質を

備えているかどうか答えよ。
$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 次の集合のうち、分割はどれか。理由とともに答えよ。

- 2.1 47 都道府県から「山の字がある県」「川の子がある県」「どちらもないもの」として作った 3 集合の集合
- 2.2 日本人の姓から「山の字がある姓」「川の子がある姓」「どちらもないもの」として作った 3 集合の集合
- 2.3 合格者ゼロの授業の受講生から「合格者」「不合格者」として作った 2 集合の集合
- 2.4 PC から「macOS で起動するもの」「Windows で起動するもの」「ChromeOS で起動するもの」として作った 3 集合の集合
- 2.5 PC から「macOS で起動するもの」「Windows で起動するもの」「その他の OS で起動するもの」として作った 3 集合の集合

p. 28 の問題を解け。

解答を PC 文書や手書きで作成し、PDF にして Google Forms (<https://forms.gle/hCyJBbFBMW9AisAt7>) から提出せよ (要組織アカウントによるログイン)。ただし写真等の画像ファイルの場合は、解像度や露出・照明状態などを十分考慮し、きちんと読解可能なクオリティのものとすること。スマートフォンの場合はスキャナアプリの類の利用を必須とする。

