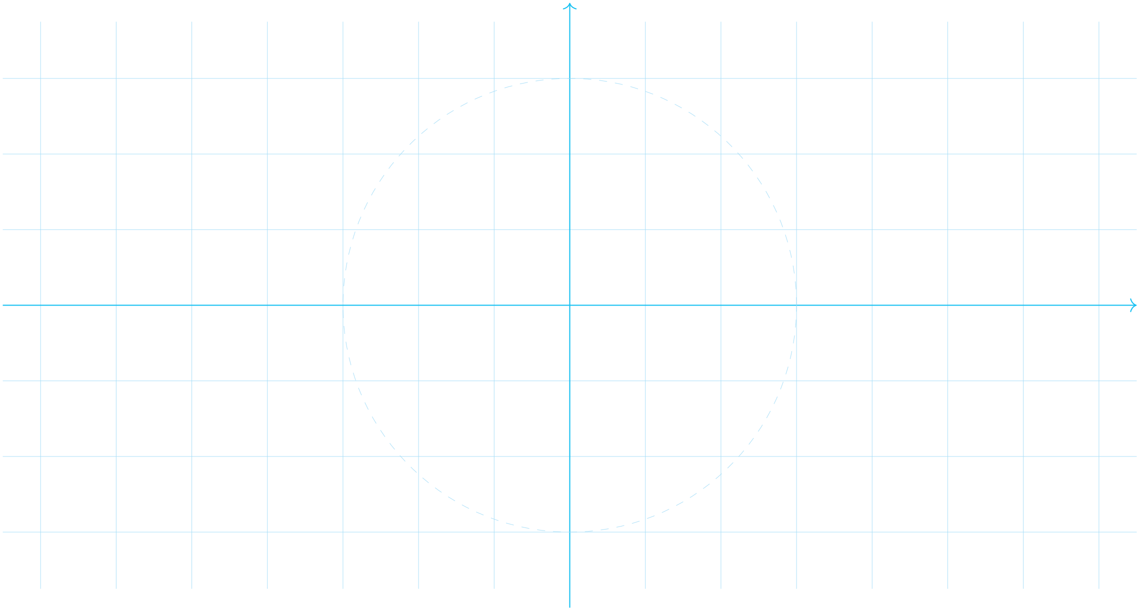
memo



離散数学

授業開始までしばらくお待ちください。

2024 離散数学
Discrete Mathematics

『代数系 II』

bit.ly/d-math

小林裕之

大阪工業大学 RD 学部システムデザイン工学科

OSAKA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

10 of 14

a LaTeX + Beamer slideshow

授業の受講に関して

- 講義資料（スライド等）は **Google Drive** (`https://bit.ly/d-math`) に置く (紙の配布資料は行わない)。授業前には虫喰い状態のスライドのみを提供するが、授業後に `uncovered`フォルダに穴埋め版を置くので復習に活用されたい。
- ミニレポートは**Google Forms** (`https://forms.gle/hCyJBbFBMW9AisAt7`) に提出。
- 授業の録画はできるだけスライドと同じフォルダ内のフォルダに置くように努力する（が、必ず置きますとお約束はしません）。
- 授業中に計算間違い等を指摘してくれたらその都度 1 点。(内容に依るけど。)

成績評価について

- 出席そのものは評価せず。極論するとテストのみ出席で他は全欠席でも A 評価はあり得る。
- 基本的には**中間演習**と**期末試験**で評価。
- 毎回ミニレポートを課す。出す者は提出期間を厳守すること。
- 試験の不合格者は**毎回のミニレポート**と**出席**で少し救済する。
(**しっかりした内容の**ミニレポートを概ね 9 割以上提出し、かつ大学の出欠管理システムで 8 割以上遅刻せず出席していた場合最大 10 点程度の救済。提出数や出席数が少ない場合は救済幅が縮小する。いずれかが 7 割を下回ったら一切救済しない。締め切り後の提出は認めない。)
- **授業中に**スライドの誤りを見つけて指摘してくれた者には、誤り一箇所につき先着一名様限り 100 点満点 1 点相当の加点を行う。(ただしごく軽微なものなど、内容によっては加点しない場合もあり。)

これまでのあらすじ

- 集合上には**演算**を定義できる。
- 演算には**閉じている**ものがある。
- 集合と閉じた演算をセットにして**代数系**を定義できる。
- 代数系は好きに作れる。…が、あまり好き勝手にやっても先が見えない。
- 演算の中には**結合律**と**交換律**を満たすものがある。(他にもあるけれど、さしあたり今はこのふたつ。)

↓

《XX 律を満たす演算》で定義される特別な代数系を見ていこう。

代数系

$(A, \star)$

代数系
$(A, \star)$

$\xrightarrow{\text{結合律}}$

代数系は結合律をみにつけた！

代数系

$(A, \star)$

$\xrightarrow{\text{結合律}}$

semigroup

半群

$(A, \star)$

$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

代数系は結合律をみにつけた！
代数系は半群になった！

特別な代数系その 1:

代数系 $(A;\star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たすとき、
$(A;\star)$ を　　　　　　　　　　　　という。

以下は　　　か?

1. $(\mathbb{N};+)$
2. $(\mathbb{N};\times)$
3. $(\mathbb{Z}_5;\oplus_5)$
4. (任意の文字列; 文字列同士の連結)

特別な代数系その 1: 半群 (semigroup)

代数系 $(A; \star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たすとき、$(A; \star)$ を **半群 (semigroup)** という。

以下は半群か?

1. $(\mathbb{N}; +)$
2. $(\mathbb{N}; \times)$
3. $(\mathbb{Z}_5; \oplus_5)$
4. (任意の文字列; 文字列同士の連結)

特別な代数系その 1: 半群 (semigroup)

代数系 $(A; \star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たすとき、$(A; \star)$ を **半群 (semigroup)** という。

以下は半群か?

1. $(\mathbb{N}; +)$ yes
2. $(\mathbb{N}; \times)$
3. $(\mathbb{Z}_5; \oplus_5)$
4. (任意の文字列; 文字列同士の連結)

特別な代数系その 1: 半群 (semigroup)

代数系 $(A; \star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たすとき、$(A; \star)$ を **半群 (semigroup)** という。

以下は半群か?

1. $(\mathbb{N}; +)$ yes
2. $(\mathbb{N}; \times)$ yes
3. $(\mathbb{Z}_5; \oplus_5)$
4. (任意の文字列; 文字列同士の連結)

特別な代数系その 1: 半群 (semigroup)

代数系 $(A; \star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たすとき、$(A; \star)$ を **半群 (semigroup)** という。

以下は半群か?

1. $(\mathbb{N}; +)$ yes
2. $(\mathbb{N}; \times)$ yes
3. $(\mathbb{Z}_5; \oplus_5)$ yes
4. (任意の文字列; 文字列同士の連結)

特別な代数系その 1: 半群 (semigroup)

代数系 $(A; \star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たすとき、$(A; \star)$ を **半群 (semigroup)** という。

以下は半群か?

1. $(\mathbb{N}; +)$ yes
2. $(\mathbb{N}; \times)$ yes
3. $(\mathbb{Z}_5; \oplus_5)$ yes
4. (任意の文字列; 文字列同士の連結) yes

単位元

$(A;\star)$ の $\forall a \in A$ に対して、

なる $e \in A$ を $(A;\star)$ **の単位元** という。

注: $\forall a \in A$ **に対して、** という下りを忘れぬよう。たまたま、特定の a に対してだけ成り立つものはダメ。

単位元

$(A;\star)$ の $\forall a \in A$ に対して、

$$a \star e = e \star a = a$$

なる $e \in A$ を $(A;\star)$ **の単位元**という。

注: $\forall a \in A$ **に対して、**という下りを忘れぬよう。たまたま、特定の a に対してだけ成り立つものはダメ。

単位元クイズ

1. $(\mathbb{R};\ +)$ の単位元は何か?
2. $(\mathbb{Z};\ \times)$ の単位元は何か?
3. (任意の文字列; 文字列同士の連結) の単位元は何か?
4. 演算が以下で定義される $(\mathbb{Z}_4, \star)$ の単位元は何か。

$\star$	0	1	2	3
0	3	2	0	0
1	2	3	1	1
2	0	1	2	3
3	0	1	3	1

単位元クイズ

1. $(\mathbb{R};\ +)$ の単位元は何か? 0
2. $(\mathbb{Z};\ \times)$ の単位元は何か?
3. (任意の文字列; 文字列同士の連結) の単位元は何か?
4. 演算が以下で定義される $(\mathbb{Z}_4, \star)$ の単位元は何か。

$\star$	0	1	2	3
0	3	2	0	0
1	2	3	1	1
2	0	1	2	3
3	0	1	3	1

単位元クイズ

1. $(\mathbb{R};\ +)$ の単位元は何か? 0
2. $(\mathbb{Z};\ \times)$ の単位元は何か? 1
3. (任意の文字列; 文字列同士の連結) の単位元は何か?
4. 演算が以下で定義される $(\mathbb{Z}_4, \star)$ の単位元は何か。

$\star$	0	1	2	3
0	3	2	0	0
1	2	3	1	1
2	0	1	2	3
3	0	1	3	1

単位元クイズ

1. $(\mathbb{R};\ +)$ の単位元は何か? 0
2. $(\mathbb{Z};\ \times)$ の単位元は何か? 1
3. (任意の文字列; 文字列同士の連結) の単位元は何か? 空文字列
4. 演算が以下で定義される $(\mathbb{Z}_4, \star)$ の単位元は何か。

$\star$	0	1	2	3
0	3	2	0	0
1	2	3	1	1
2	0	1	2	3
3	0	1	3	1

単位元クイズ

1. $(\mathbb{R};\ +)$ の単位元は何か? 0
2. $(\mathbb{Z};\ \times)$ の単位元は何か? 1
3. (任意の文字列; 文字列同士の連結) の単位元は何か? 空文字列
4. 演算が以下で定義される $(\mathbb{Z}_4, \star)$ の単位元は何か。 2

$\star$	0	1	2	3
0	3	2	0	0
1	2	3	1	1
2	0	1	2	3
3	0	1	3	1

単位元クイズ

1. $(\mathbb{R};\ +)$ の単位元は何か? 0
2. $(\mathbb{Z};\ \times)$ の単位元は何か? 1
3. (任意の文字列; 文字列同士の連結) の単位元は何か? 空文字列
4. 演算が以下で定義される $(\mathbb{Z}_4, \star)$ の単位元は何か。 2

$\star$	0	1	2	3
0	3	2	0	0
1	2	3	1	1
2	0	1	2	3
3	0	1	3	1

単位元は無条件に存在するものでもないので、それを持つ代数系には特別な呼び名を与えよう。

semigroup

半群

$$(A, \star)$$

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

semigroup
半群

$$(A, \star)$$

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

$\xrightarrow{\text{単位元}}$

半群は単位元をてにいれた！

semigroup
半群
$$(A, \star)$$
$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

$\xrightarrow{\text{単位元}}$

モノイド
$$(A, \star)$$
$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$
$$e$$

半群は単位元をてにいれた！
半群はモノイドになった！

特別な代数系その 2:

代数系 $(A; \star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たし、単位元を持つとき、$(A; \star)$ を　　　　　　　　という。

※ 要するに単位元が存在する、特殊な半群のこと。

以下は　　　　か?

1. $(\mathbb{N}; +)$
2. $(\mathbb{N}; \times)$
3. $(\mathbb{Z}_5; \oplus_5)$
4. (任意の文字列; 文字列同士の連結)

特別な代数系その 2: モノイド (monoid)

代数系 $(A;\star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たし、単位元を持つとき、$(A;\star)$ を **モノイド** という。
※ 要するに単位元が存在する、特殊な半群のこと。

以下はモノイドか?

1. $(\mathbb{N};+)$
2. $(\mathbb{N};\times)$
3. $(\mathbb{Z}_5;\oplus_5)$
4. (任意の文字列; 文字列同士の連結)

特別な代数系その 2: モノイド (monoid)

代数系 $(A;\star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たし、単位元を持つとき、$(A;\star)$ を **モノイド** という。
※ 要するに単位元が存在する、特殊な半群のこと。

以下はモノイドか?

1. $(\mathbb{N};+)$ no
2. $(\mathbb{N};\times)$
3. $(\mathbb{Z}_5;\oplus_5)$
4. (任意の文字列; 文字列同士の連結)

特別な代数系その 2: モノイド (monoid)

代数系 $(A; \star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たし、単位元を持つとき、$(A; \star)$ を **モノイド** という。

※ 要するに単位元が存在する、特殊な半群のこと。

以下はモノイドか?

1. $(\mathbb{N}; +)$ no
2. $(\mathbb{N}; \times)$ yes
3. $(\mathbb{Z}_5; \oplus_5)$
4. (任意の文字列; 文字列同士の連結)

特別な代数系その 2: モノイド (monoid)

代数系 $(A; \star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たし、単位元を持つとき、$(A; \star)$ を **モノイド** という。

※ 要するに単位元が存在する、特殊な半群のこと。

以下はモノイドか?

1. $(\mathbb{N}; +)$ no
2. $(\mathbb{N}; \times)$ yes
3. $(\mathbb{Z}_5; \oplus_5)$ yes
4. (任意の文字列; 文字列同士の連結)

特別な代数系その 2: モノイド (monoid)

代数系 $(A; \star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たし、単位元を持つとき、$(A; \star)$ を **モノイド** という。

※ 要するに単位元が存在する、特殊な半群のこと。

以下はモノイドか?

1. $(\mathbb{N}; +)$ no
2. $(\mathbb{N}; \times)$ yes
3. $(\mathbb{Z}_5; \oplus_5)$ yes
4. (任意の文字列; 文字列同士の連結) yes

ここで突然プログラミング演習

```
# 整数のリストをなにかするプログラム
a = [42, 6502, 4004, 1701]
```

```
# 文字列のリストをなにかするプログラム
a = ["sudo", "rm", "-rf", "/"]
```

Q1. 左のプログラムの続きを作り、**リストの値の和**を求めるものとせよ。

Q2. 左のプログラムの続きを作り、**リストの値の積**を求めるものとせよ。

Q3. 右のプログラムの続きを作り、**リストの値の連結**を求めるものとせよ。

解答

- ← これが、上記 3 つをより抽象化した、**その演算的に全部を合わせる**アルゴリズムと言える。
- このアルゴリズムが適用可能な対称は**モノイド**。
- **fold** とか**reduce**などとして知られている（ので知っておこう）。

解答

```
# 整数のリストの和
a = [42, 6502, 4004,
               1701]
s = 0
for i in a:
  s = s + i
print(s)
```

- ← これが、上記 3 つをより抽象化した、**その演算的に全部を合わせる**アルゴリズムと言える。
- このアルゴリズムが適用可能な対称は**モノイド**。
- **fold** とか **reduce** などとして知られている（ので知っておこう）。

解答

```
# 整数のリストの和
a = [42, 6502, 4004,
                1701]
s = 0
for i in a:
  s = s + i
print(s)
```

```
# 整数のリストの積
a = [42, 6502, 4004,
                1701]
s = 1
for i in a:
  s = s * i
print(s)
```

- ← これが、上記 3 つをより抽象化した、**その演算的に全部を合わせる**アルゴリズムと言える。
- このアルゴリズムが適用可能な対称は**モノイド**。
- **fold**とか**reduce**などとして知られている（ので知っておこう）。

解答

```
# 整数のリストの和
a = [42, 6502, 4004,
              1701]
s = 0
for i in a:
  s = s + i
print(s)
```

```
# 整数のリストの積
a = [42, 6502, 4004,
              1701]
s = 1
for i in a:
  s = s * i
print(s)
```

```
# 文字列のリストの連結
a = ["sudo ", "rm ",
        "-rf ", "/"]
s = ""
for i in a:
  s = s + i
print(s)
```

- ← これが、上記 3 つをより抽象化した、**その演算的に全部を合わせる**アルゴリズムと言える。
- このアルゴリズムが適用可能な対称は**モノイド**。
- **fold** とか **reduce** などとして知られている（ので知っておこう）。

解答

```
# 整数のリストの和
a = [42, 6502, 4004,
                1701]
s = 0
for i in a:
  s = s + i
print(s)
```

```
# 整数のリストの積
a = [42, 6502, 4004,
                1701]
s = 1
for i in a:
  s = s * i
print(s)
```

```
# 文字列のリストの連結
a = ["sudo ", "rm ",
        "-rf ", "/"]
s = ""
for i in a:
  s = s + i
print(s)
```

```
a = モノイドの元のリスト
s = 単位元
for i in a:
  s = s モノイドの演算 i
```

- ← これが、上記 3 つをより抽象化した、**その演算的に全部を合わせる**アルゴリズムと言える。
- このアルゴリズムが適用可能な対称は**モノイド**。
- **fold**とか**reduce**などとして知られている（ので知っておこう）。

Python の reduce の例

```
from functools import reduce

def op(x, y):                    # 二項演算 "op" の定義
    return x + y
e = 0                            # 単位元
a = [42, 6502, 4004, 1701]
s = reduce(op, a, e)             # 演算，対象，単位元
print(s)
```

(参考) ふつうに書くならたぶん無名関数で下記のような感じ。

```
from functools import reduce
print(reduce(lambda x, y: x + y, [42, 6502, 4004, 1701], 0))
```

JavaScript の reduce の例

```
function op(x, y) {              // 二項演算 "op" の定義
  return x + y;
}
e = 0;                           // 単位元
a = [42, 6502, 4004, 1701];
s = a.reduce(op, e);
console.log(s);
```

(参考) ふつうに書くならたぶん無名関数で下記のような感じ。

```
console.log([42, 6502, 4004, 1701].reduce((x, y) => x + y, 0));
```

Ruby の reduce の例

```
op = proc { |x, y| x + y }      # 二項演算 "op" の定義
e = 0                           # 単位元
a = [42, 6502, 4004, 1701]
s = a.reduce(e, &op)
puts s
```

(参考) ふつうに書くならたぶん proc など使わず下記のような感じ。

```
puts [42, 6502, 4004, 1701].reduce(0) { |x, y| x + y }
```

Haskell の fold の例

Haskell の場合、fold は右から版の foldr と左から版の foldl があります。

```
main = do
  let op x y = x + y              -- 二項演算 "op" の定義
  let e = 0                       -- 単位元
  let a = [42, 6502, 4004, 1701]
  let s = foldl op e a
  print s
```

(参考) ふつうに書くならたぶん無名関数で下記のような感じ。

```
main = print $ foldl (\x y -> x + y) 0 [42, 6502, 4004, 1701]
```

逆元

$(A; \star)$ が単位元 e を持つとき

なる $x \in A$ を a **の逆元**といい、a^{-1} と表す。

注: 逆元は a^{-1} と書くことからわかるように a **に依存する**点に注意しよう。単位元と違って一般的にはオールマイティなものではない。

逆元

$(A;\star)$ が単位元 e を持つとき

$$a \star x = x \star a = e$$

なる $x \in A$ を a **の逆元** といい、a^{-1} と表す。

注: 逆元は a^{-1} と書くことからわかるように a **に依存する**点に注意しよう。単位元と違って一般的にはオールマイティなものではない。

逆元クイズ

1. $(\mathbb{Z};\ +)$ において $a \in \mathbb{Z}$ の逆元は何か?
2. $(\mathbb{Q};\ \times)$ において $a \in \mathbb{Q}\,(a \neq 0)$ の逆元は何か?
3. $(\mathbb{Z}_6;\ \odot_6)$ において $a \in \mathbb{Z}$ の逆元は何か?

4. この演算の逆元を求めよ。

$\star$	0	1	2	3
0	3	2	0	0
1	2	3	1	1
2	0	1	2	3
3	0	1	3	1

逆元クイズ

1. $(\mathbb{Z};\ +)$ において $a \in \mathbb{Z}$ の逆元は何か?　$-a$
2. $(\mathbb{Q};\ \times)$ において $a \in \mathbb{Q}\,(a \neq 0)$ の逆元は何か?
3. $(\mathbb{Z}_6;\ \odot_6)$ において $a \in \mathbb{Z}$ の逆元は何か?

4. この演算の逆元を求めよ。

$\star$	0	1	2	3
0	3	2	0	0
1	2	3	1	1
2	0	1	2	3
3	0	1	3	1

逆元クイズ

1. $(\mathbb{Z};\ +)$ において $a \in \mathbb{Z}$ の逆元は何か? $-a$
2. $(\mathbb{Q};\ \times)$ において $a \in \mathbb{Q}\,(a \neq 0)$ の逆元は何か? $1/a$
3. $(\mathbb{Z}_6;\ \odot_6)$ において $a \in \mathbb{Z}$ の逆元は何か?

4. この演算の逆元を求めよ。

$\star$	0	1	2	3
0	3	2	0	0
1	2	3	1	1
2	0	1	2	3
3	0	1	3	1

逆元クイズ

1. $(\mathbb{Z};\, +)$ において $a \in \mathbb{Z}$ の逆元は何か? $-a$
2. $(\mathbb{Q};\, \times)$ において $a \in \mathbb{Q}\,(a \neq 0)$ の逆元は何か? $1/a$
3. $(\mathbb{Z}_6;\, \odot_6)$ において $a \in \mathbb{Z}$ の逆元は何か?

   $0, 2, 3, 4$ の逆元は存在しない。$1^{-1} = 1,\ 5^{-1} = 5$
4. この演算の逆元を求めよ。

$\star$	0	1	2	3
0	3	2	0	0
1	2	3	1	1
2	0	1	2	3
3	0	1	3	1

逆元クイズ

1. $(\mathbb{Z};+)$ において $a \in \mathbb{Z}$ の逆元は何か? $-a$
2. $(\mathbb{Q};\times)$ において $a \in \mathbb{Q}\,(a \neq 0)$ の逆元は何か? $1/a$
3. $(\mathbb{Z}_6;\odot_6)$ において $a \in \mathbb{Z}$ の逆元は何か?

   $0, 2, 3, 4$ の逆元は存在しない。$1^{-1}=1,\ 5^{-1}=5$
4. この演算の逆元を求めよ。 $0^{-1}=1,\ 1^{-1}=0,\ 2^{-1}=2$

$\star$	0	1	2	3
0	3	2	0	0
1	2	3	1	1
2	0	1	2	3
3	0	1	3	1

逆元クイズ

1. $(\mathbb{Z};\ +)$ において $a \in \mathbb{Z}$ の逆元は何か? $-a$
2. $(\mathbb{Q};\ \times)$ において $a \in \mathbb{Q}\,(a \neq 0)$ の逆元は何か? $1/a$
3. $(\mathbb{Z}_6;\ \odot_6)$ において $a \in \mathbb{Z}$ の逆元は何か?

   0, 2, 3, 4 の逆元は存在しない。$1^{-1} = 1,\ 5^{-1} = 5$
4. この演算の逆元を求めよ。 $0^{-1} = 1,\ 1^{-1} = 0,\ 2^{-1} = 2$

$\star$	0	1	2	3
0	3	2	0	0
1	2	3	1	1
2	0	1	2	3
3	0	1	3	1

全ての元が逆元を持つ代数系は希少なので特別な名前をつけよう。

モノイド

$$(A, \star)$$

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

$$e$$

モノイド

$$(A, \star)$$

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

$$e$$

$$\xrightarrow{\text{逆元}}$$

モノイドは逆元をてにいれた！

モノイド

$$(A, \star)$$

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

$$e$$

逆元 →

group

群

$$(A, \star)$$

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

$$e$$

$$a^{-1}$$

モノイドは逆元をてにいれた！
モノイドは群になった！

特別な代数系その 3:

代数系 $(A; \star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たし、**単位元**を持ち、$\forall a \in A$ に**逆元**a^{-1} が存在するとき $(A; \star)$ をという。 要するに全ての元に逆元が存在する、特殊なモノイド。

以下は　か?

1. $(\mathbb{R}; +)$
2. $(\mathbb{R} \backslash \{0\}; \times)$
3. $(\mathbb{Z}_5; \odot_5)$

特別な代数系その 3: 群 (group)

代数系 $(A; \star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たし、**単位元**を持ち、$\forall a \in A$ に**逆元**a^{-1} が存在するとき $(A; \star)$ を**群**という。 要するに全ての元に逆元が存在する、特殊なモノイド。

以下は群か?

1. $(\mathbb{R}; +)$
2. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \times)$
3. $(\mathbb{Z}_5; \odot_5)$

特別な代数系その 3: 群 (group)

代数系 $(A;\star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たし、**単位元**を持ち、$\forall a \in A$ に**逆元**a^{-1} が存在するとき $(A;\star)$ を**群**という。 要するに全ての元に逆元が存在する、特殊なモノイド。

以下は群か?

1. $(\mathbb{R};+)$ yes
2. $(\mathbb{R}\backslash\{0\};\times)$
3. $(\mathbb{Z}_5;\odot_5)$

特別な代数系その 3: 群 (group)

代数系 $(A;\star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たし、**単位元**を持ち、$\forall a \in A$ に**逆元**a^{-1} が存在するとき $(A;\star)$ を**群**という。 要するに全ての元に逆元が存在する、特殊なモノイド。

以下は群か?

1. $(\mathbb{R};+)$ yes
2. $(\mathbb{R}\backslash\{0\};\times)$ yes
3. $(\mathbb{Z}_5;\odot_5)$

特別な代数系その 3: 群 (group)

代数系 $(A;\star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たし、**単位元**を持ち、$\forall a \in A$ に**逆元**a^{-1} が存在するとき $(A;\star)$ を**群**という。 要するに全ての元に逆元が存在する、特殊なモノイド。

以下は群か?

1. $(\mathbb{R};+)$ yes
2. $(\mathbb{R}\backslash\{0\};\times)$ yes
3. $(\mathbb{Z}_5;\odot_5)$ no

特別な代数系その 3: 群 (group)

代数系 $(A; \star)$ において、$\star$ が**結合律**を満たし、**単位元**を持ち、$\forall a \in A$ に**逆元**a^{-1} が存在するとき $(A; \star)$ を**群**という。 要するに全ての元に逆元が存在する、特殊なモノイド。

以下は群か?

1. $(\mathbb{R}; +)$ yes
2. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \times)$ yes
3. $(\mathbb{Z}_5; \odot_5)$ no

group

$$(A, \star)$$

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

$$e$$

$$a^{-1}$$

group

群

$$(A, \star)$$

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

$$e$$

$$a^{-1}$$

交換律 →

群は交換律をみにつけた！

group
群

$$(A, \star)$$

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

$$e$$

$$a^{-1}$$

交換律 →

可換群
アーベル群

$$(A, \star)$$

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

$$e$$

$$a^{-1}$$

$$x \star y = y \star x$$

群は交換律をみにつけた！
群はアーベル群になった！

特別な代数系その 5:

代数系 $(A;\star)$ において、$\star$ が**結合律と交換律**を満たし、**単位元**を持ち、$\forall a \in A$ に**逆元**a^{-1} が存在するとき $(A;\star)$ を

という。

※ 要するに交換律が成り立つ、特殊な群のこと。

以下は　　　か?

1. $(\mathbb{R};\ +)$
2. $(\mathbb{R}\backslash\{0\};\ \times)$
3. $(\mathbb{Z}_5;\ \odot_5)$

特別な代数系その 5: 可換群 (アーベル群, abelian group)

代数系 $(A; \star)$ において、$\star$ が**結合律と交換律**を満たし、**単位元**を持ち、$\forall a \in A$ に**逆元**a^{-1} が存在するとき $(A; \star)$ を **可換群 (アーベル群)** という。

※ 要するに交換律が成り立つ、特殊な群のこと。

以下は可換群か?

1. $(\mathbb{R};\ +)$
2. $(\mathbb{R}\backslash\{0\};\ \times)$
3. $(\mathbb{Z}_5;\ \odot_5)$

特別な代数系その 5: 可換群 (アーベル群, abelian group)

代数系 $(A;\star)$ において、$\star$ が**結合律と交換律**を満たし、**単位元**を持ち、$\forall a \in A$ に**逆元**a^{-1} が存在するとき $(A;\star)$ を **可換群 (アーベル群)** という。

※ 要するに交換律が成り立つ、特殊な群のこと。

以下は可換群か?

1. $(\mathbb{R};\ +)$ yes
2. $(\mathbb{R}\backslash\{0\};\ \times)$
3. $(\mathbb{Z}_5;\ \odot_5)$

特別な代数系その 5: 可換群 (アーベル群, abelian group)

代数系 $(A;\star)$ において、$\star$ が**結合律と交換律**を満たし、**単位元**を持ち、$\forall a \in A$ に**逆元**a^{-1} が存在するとき $(A;\star)$ を **可換群 (アーベル群)** という。

※ 要するに交換律が成り立つ、特殊な群のこと。

以下は可換群か?

1. $(\mathbb{R};\ +)$ yes
2. $(\mathbb{R}\backslash\{0\};\ \times)$ yes
3. $(\mathbb{Z}_5;\ \odot_5)$

特別な代数系その 5: 可換群 (アーベル群, abelian group)

代数系 $(A;\star)$ において、$\star$ が**結合律と交換律**を満たし、**単位元**を持ち、$\forall a \in A$ に**逆元**a^{-1} が存在するとき $(A;\star)$ を **可換群 (アーベル群)** という。

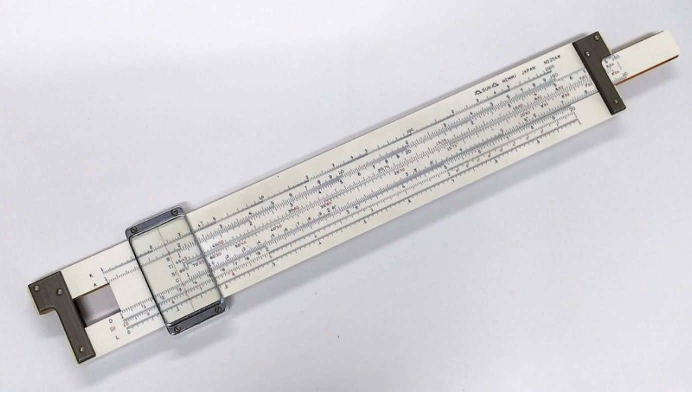
※ 要するに交換律が成り立つ、特殊な群のこと。

以下は可換群か?

1. $(\mathbb{R};\,+)$ yes
2. $(\mathbb{R}\backslash\{0\};\,\times)$ yes
3. $(\mathbb{Z}_5;\,\odot_5)$ no

計算尺 (slide rule)

電卓が普及するはるか以前、我々人類はディジタル計算器(　　) とアナログ計算器(計算尺) を使っていた…。

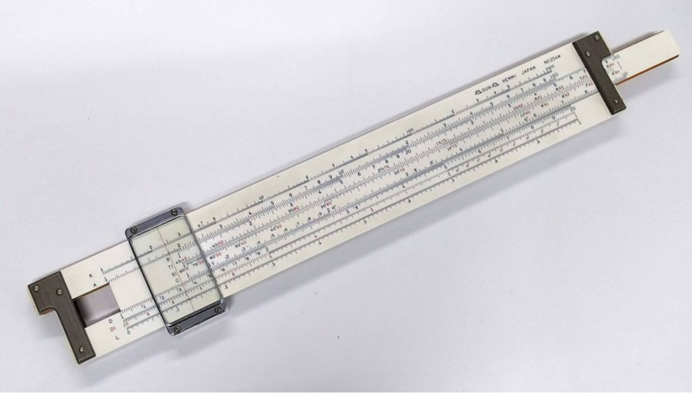


HEMMI NO.254W 型計算尺 (小林所蔵)

しかしなぜ今その話をここでする…?

計算尺 (slide rule)

電卓が普及するはるか以前、我々人類はディジタル計算器(算盤) とアナログ計算器(計算尺) を使っていた…。



HEMMI NO.254W 型計算尺 (小林所蔵)

しかしなぜ今その話をここでする…?

計算尺の計算の原理

応用範囲は広いので知っておいてソンはない。

- 足し算は物理的にふたつのものをくっつけるだけなのでリアルなモノで置き換えるのが簡単。(10 cm 棒 + 20 cm 棒 = 30 cm 棒)
- 掛け算はそうはいかない。(10 cm 棒と 20 cm 棒から 200 cm^2 はイメージできるが、面積を見ても元の長さと比べようがない。)
- ところが事前に対数にしておけば、**掛け算が足し算扱い**できる！

$$a \qquad b \qquad (a \times b)$$

- **長さ** log 10 **の棒**と **長さ** log 20 **の棒**をくっつけて、全体の長さを**対数目盛りで**測ればイイ！！
- **好きな長さでくっつけられる対数目盛りの定規**が 2 つあれば、かけ算・わり算ができる？

計算尺の計算の原理

応用範囲は広いので知っておいてソンはない。

- 足し算は物理的にふたつのものをくっつけるだけなのでリアルなモノで置き換えるのが簡単。(10 cm 棒 + 20 cm 棒 = 30 cm 棒)
- 掛け算はそうはいかない。(10 cm 棒と 20 cm 棒から 200 cm^2 はイメージできるが、面積を見ても元の長さと比べようがない。)
- ところが事前に対数にしておけば、**掛け算が足し算扱い**できる！

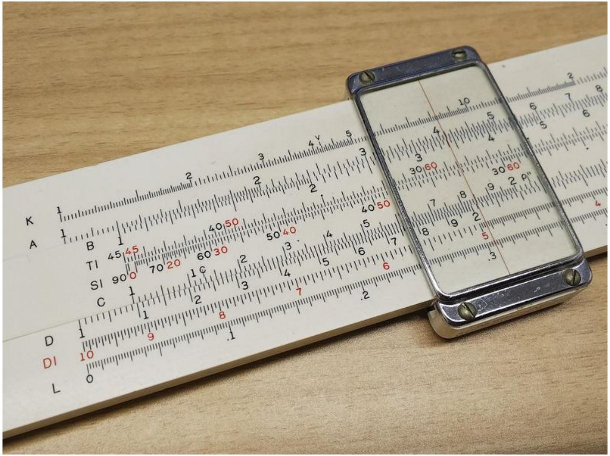
$$\log a + \log b = \log(a \times b)$$

- **長さ** log 10 **の棒**と **長さ** log 20 **の棒**をくっつけて、全体の長さを**対数目盛りで**測ればイイ !!
- **好きな長さでくっつけられる対数目盛りの定規**が 2 つあれば、かけ算・わり算ができる？

計算尺での計算例

ソロバンと違ってアナログです。

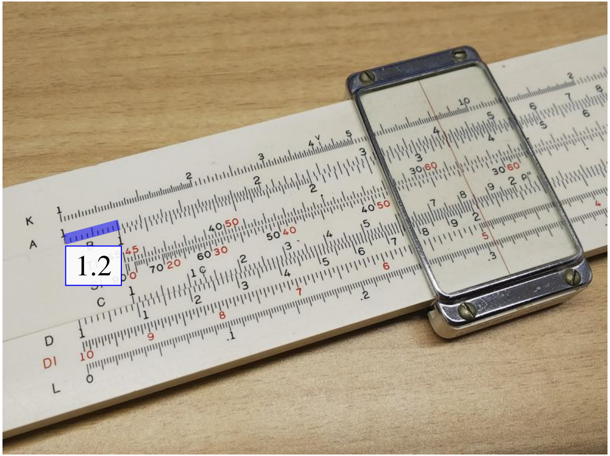
$$1.2 \times 3.4$$



計算尺での計算例

ソロバンと違ってアナログです。

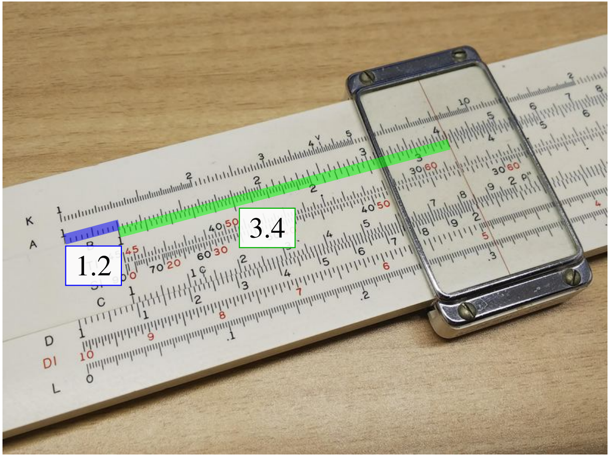
$$1.2 \times 3.4$$



計算尺での計算例

ソロバンと違ってアナログです。

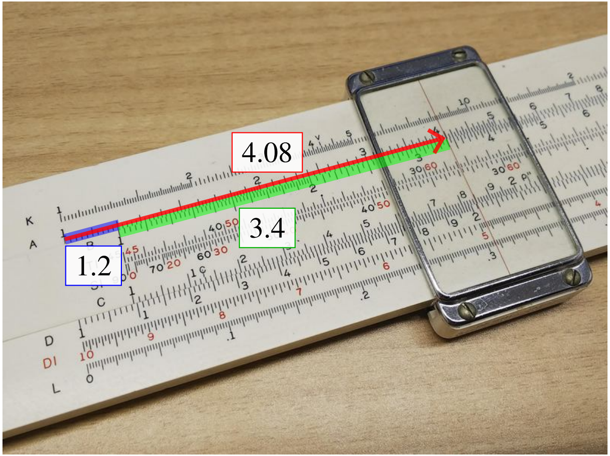
$$1.2 \times 3.4 \quad 4.1\text{弱}$$



計算尺での計算例

ソロバンと違ってアナログです。

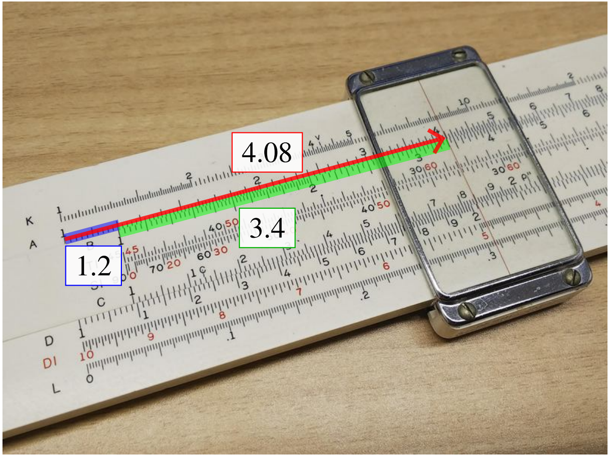
$$1.2 \times 3.4 \quad 4.1\text{弱}$$



計算尺での計算例

ソロバンと違ってアナログです。

$$1.2 \times 3.4 \simeq 4.1\text{弱}$$



おまけ: ディジタル計算器＋ディジタル計算機＝

目の付けどころが……

おまけ: ディジタル計算器＋ディジタル計算機＝ソロカル

目の付けどころが……

おまけ: ディジタル計算器＋ディジタル計算機＝ソロカル

目の付けどころが……

手前から順に EL-8148 (1978), EL-8048 (1979), EL-428 (1981), EL-429 (1984)

計算尺の話を考え直してみよう

離散数学との関係がついに明らかに！

$(\mathbb{R}_+;\ \times)$ $\qquad$ $(\mathbb{R};\ +)$

$$1.2 \xrightarrow{\log(\cdot)} \log 1.2$$

$$3.4 \xrightarrow{\log(\cdot)} \log 3.4$$

$$4.08 \xrightarrow{\log(\cdot)} \log 4.08$$

$$\begin{aligned} 1.2 \times 3.4 &= 4.08 \\ \log 1.2 + \log 3.4 &= \log 4.08 \end{aligned}$$

log という**写像**は、代数系 $(\mathbb{R}_+;\ \times)$ と $(\mathbb{R};\ +)$ の結びつけている。

→『　　』という考え方

計算尺の話を考え直してみよう

離散数学との関係がついに明らかに！

$$
\begin{array}{ccc}
(\mathbb{R}_+;\ \times) & & (\mathbb{R};\ +) \\
1.2 & \xrightarrow{\log(\cdot)} & \log 1.2 \\
3.4 & \xrightarrow{\log(\cdot)} & \log 3.4 \\
4.08 & \xrightarrow{\log(\cdot)} & \log 4.08
\end{array}
$$

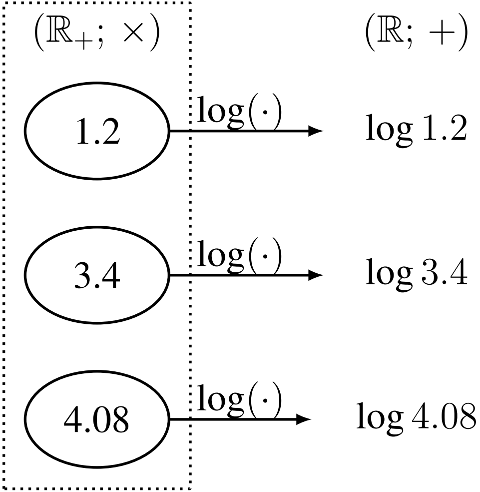
$$
\begin{aligned}
1.2 \times 3.4 &= 4.08 \\
\log 1.2 + \log 3.4 &= \log 4.08
\end{aligned}
$$

log という**写像**は、代数系 $(\mathbb{R}_+;\ \times)$ と $(\mathbb{R};\ +)$ の**演算の構造を保ったまま**結びつけている。

$\rightarrow$ 『　　　』という考え方

計算尺の話を考え直してみよう

離散数学との関係がついに明らかに！



$$
\begin{aligned}
1.2 \times 3.4 &= 4.08 \\
\log 1.2 + \log 3.4 &= \log 4.08
\end{aligned}
$$

log という**写像**は、代数系 $(\mathbb{R}_+;\ \times)$ と $(\mathbb{R};\ +)$ の**演算の構造を保ったまま**結びつけている。

→ 『**同型**』という考え方

準同型写像

ちゃんとした定義です。

代数系 $(G; \star)$ と $(G'; \diamond)$ において、

$$\forall a, b \in G,$$

のとき、f を

といい、$(G; \star)$ と $(G'; \diamond)$ は　　　　で

あるという。

準同型写像

ちゃんとした定義です。

代数系 $(G; \star)$ と $(G'; \diamond)$ において、

$$\forall a, b \in G, \qquad f(a \star b) = f(a) \diamond f(b)$$

のとき、f を
といい、$(G; \star)$ と $(G'; \diamond)$ は で
あるという。

準同型写像

ちゃんとした定義です。

代数系 $(G; \star)$ と $(G'; \diamond)$ において、

$$\forall a, b \in G, \qquad f(a \star b) = f(a) \diamond f(b)$$

のとき、f を $(G; \star)$ から $(G'; \diamond)$ への **準同型写像** といい、$(G; \star)$ と $(G'; \diamond)$ は　　　　で あるという。

準同型写像

ちゃんとした定義です。

代数系 $(G; \star)$ と $(G'; \diamond)$ において、

$$\forall a, b \in G, \qquad f(a \star b) = f(a) \diamond f(b)$$

のとき、f を $(G; \star)$ から $(G'; \diamond)$ への **準同型写像** といい、$(G; \star)$ と $(G'; \diamond)$ は **準同型**であるという。

同型写像

準同型 (前ページ) であることに加えて、f が　　　　　　であるとき、　　　　　　といい、$(G;\star)$ と $(G';\diamond)$ は　　　であるという。

さらに　　　　　のとき、f を　　　　　　　　　という。

同型写像

準同型 (前ページ) であることに加えて、f が全単射写像であるとき、　　　　　　といい、$(G;\star)$ と $(G';\diamond)$ は　　　であるという。

さらに　　　　　　のとき、f を　　　　　　　　　　という。

準同型 (前ページ) であることに加えて、f が全単射写像であるとき、**同型写像**といい、$(G; \star)$ と $(G'; \diamond)$ は　　　であるという。

さらに　　　　　のとき、f を　　　　　　　　　　という。

同型写像

準同型 (前ページ) であることに加えて、f が全単射写像であるとき、**同型写像**といい、$(G; \star)$ と $(G'; \diamond)$ は**同型**であるという。

さらに のとき、f を というう。

同型写像

準同型 (前ページ) であることに加えて、f が全単射写像であるとき、**同型写像**といい、$(G;\star)$ と $(G';\diamond)$ は **同型**であるという。

さらに$G = G'$のとき、fを　　　　　　　　　という。

同型写像

準同型 (前ページ) であることに加えて、f が全単射写像であるとき、**同型写像** といい、$(G;\star)$ と $(G';\diamond)$ は **同型**であるという。

さらに$G=G'$のとき、fを 自己同型写像 という。

練習いろいろ

以下の $f(x)$ が準同型写像あるいは同型写像か答えよ。

1. $(\mathbb{R}_+;\ \times)$ から $(\mathbb{R};\ +)$ への $f(x) = \log(x)$
2. $(\mathbb{R};\ +)$ から $(\mathbb{R};\ \times)$ への $f(x) = e^x$
3. $(\mathbb{N};\ +)$ から $(\{3n \mid n \in \mathbb{N};\ +\})$ への $f(x) = 3n$

同型写像は推移的かどうか調べよ。

f は $(A;\ \star)$ から $(B;\ \triangle)$ への同型写像で、g は $(B;\ \triangle)$ から $(C;\ \diamond)$ への同型写像である。合成写像 $g \circ f$ は $(A;\ \star)$ から $(C;\ \diamond)$ への同型写像か?

同型写像は単位元をどこに写像するか考えよ。

f は $(A;\ \star)$ から $(B;\ \triangle)$ への同型写像とする。f により直観的には $(A;\ \star)$ の単位元は $(B;\ \triangle)$ の単位元に写像されそうな気がするが、これを示せ（もしくは否定せよ）。

練習いろいろ

以下の $f(x)$ が準同型写像あるいは同型写像か答えよ。

1. $(\mathbb{R}_+;\ \times)$ から $(\mathbb{R};\ +)$ への $f(x) = \log(x)$ 同型写像
2. $(\mathbb{R};\ +)$ から $(\mathbb{R};\ \times)$ への $f(x) = e^x$
3. $(\mathbb{N};\ +)$ から $(\{3n \mid n \in \mathbb{N};\ +\})$ への $f(x) = 3n$

同型写像は推移的かどうか調べよ。

f は $(A;\ \star)$ から $(B;\ \triangle)$ への同型写像で、g は $(B;\ \triangle)$ から $(C;\ \diamond)$ への同型写像である。合成写像 $g \circ f$ は $(A;\ \star)$ から $(C;\ \diamond)$ への同型写像か?

同型写像は単位元をどこに写像するか考えよ。

f は $(A;\ \star)$ から $(B;\ \triangle)$ への同型写像とする。f により直観的には $(A;\ \star)$ の単位元は $(B;\ \triangle)$ の単位元に写像されそうな気がするが、これを示せ（もしくは否定せよ）。

練習いろいろ

以下の $f(x)$ が準同型写像あるいは同型写像か答えよ。

1. $(\mathbb{R}_+;\ \times)$ から $(\mathbb{R};\ +)$ への $f(x) = \log(x)$ 同型写像
2. $(\mathbb{R};\ +)$ から $(\mathbb{R};\ \times)$ への $f(x) = e^x$ 準同型写像
3. $(\mathbb{N};\ +)$ から $(\{3n \mid n \in \mathbb{N};\ +\})$ への $f(x) = 3n$

同型写像は推移的かどうか調べよ。

f は $(A;\ \star)$ から $(B;\ \triangle)$ への同型写像で、g は $(B;\ \triangle)$ から $(C;\ \diamond)$ への同型写像である。合成写像 $g \circ f$ は $(A;\ \star)$ から $(C;\ \diamond)$ への同型写像か?

同型写像は単位元をどこに写像するか考えよ。

f は $(A;\ \star)$ から $(B;\ \triangle)$ への同型写像とする。f により直観的には $(A;\ \star)$ の単位元は $(B;\ \triangle)$ の単位元に写像されそうな気がするが、これを示せ（もしくは否定せよ）。

練習いろいろ

以下の $f(x)$ が準同型写像あるいは同型写像か答えよ。

1. $(\mathbb{R}_+;\ \times)$ から $(\mathbb{R};\ +)$ への $f(x) = \log(x)$ 同型写像
2. $(\mathbb{R};\ +)$ から $(\mathbb{R};\ \times)$ への $f(x) = e^x$ 準同型写像
3. $(\mathbb{N};\ +)$ から $(\{3n \mid n \in \mathbb{N};\ +\})$ への $f(x) = 3n$ 同型写像

同型写像は推移的かどうか調べよ。

f は $(A;\ \star)$ から $(B;\ \triangle)$ への同型写像で、g は $(B;\ \triangle)$ から $(C;\ \diamond)$ への同型写像である。合成写像 $g \circ f$ は $(A;\ \star)$ から $(C;\ \diamond)$ への同型写像か?

同型写像は単位元をどこに写像するか考えよ。

f は $(A;\ \star)$ から $(B;\ \triangle)$ への同型写像とする。f により直観的には $(A;\ \star)$ の単位元は $(B;\ \triangle)$ の単位元に写像されそうな気がするが、これを示せ（もしくは否定せよ）。

練習いろいろ

以下の $f(x)$ が準同型写像あるいは同型写像か答えよ。

1. $(\mathbb{R}_+;\ \times)$ から $(\mathbb{R};\ +)$ への $f(x) = \log(x)$ 同型写像
2. $(\mathbb{R};\ +)$ から $(\mathbb{R};\ \times)$ への $f(x) = e^x$ 準同型写像
3. $(\mathbb{N};\ +)$ から $(\{3n \mid n \in \mathbb{N};\ +\})$ への $f(x) = 3n$ 同型写像

同型写像は推移的かどうか調べよ。

f は $(A;\ \star)$ から $(B;\ \triangle)$ への同型写像で、g は $(B;\ \triangle)$ から $(C;\ \diamond)$ への同型写像である。合成写像 $g \circ f$ は $(A;\ \star)$ から $(C;\ \diamond)$ への同型写像か? yes

同型写像は単位元をどこに写像するか考えよ。

f は $(A;\ \star)$ から $(B;\ \triangle)$ への同型写像とする。f により直観的には $(A;\ \star)$ の単位元は $(B;\ \triangle)$ の単位元に写像されそうな気がするが、これを示せ（もしくは否定せよ）。

そろそろふたつ目の演算を考えよう。

- 半群 →(中略)→ 可換群まで、演算は 1 つだった。
- 2 つにするともっと素晴らしい代数系が作れる。
- 2 つとは即ち**加法**と**乗法**である。

可換群

アーベル群

$$(A,\, \star)$$

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

$$e_\star \,,\, a_\star^{-1}$$

$$x \star y = y \star x$$

可換群

アーベル群

$(A,\ \star)$

$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

$e_\star\ ,\ a_\star^{-1}$

$x \star y = y \star x$

モノイド

$(A,\ \diamond)$

$(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$

$e_\diamond$

モノイドが（演算が分配的に）なかまになった！

可換群

アーベル群

$$(A,\ \star)$$

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

$$e_\star\ ,\ a_\star^{-1}$$

$$x \star y = y \star x$$

モノイド

$$(A,\ \diamond)$$

$$(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$$

$$e_\diamond$$

ring

環

$$(A,\ \star,\ \diamond)$$

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

$$e_\star\ ,\ a_\star^{-1}\ ,\ e_\diamond$$

$$x \star y = y \star x$$

$$(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$$

$$x \diamond (y \star z) = (x \diamond y) \star (x \diamond z)$$

モノイドが（演算が分配的に）なかまになった！
アーベル群は環になった！

特別な代数系その 5:

代数系 $(A; \star, \diamond)$ は以下の条件を満たすとき　　　　　　　　　という。

- $(A; \star)$ は　　　　　　　　　　である。
- $(A; \diamond)$ は　　　　　　　である。(注: 半群とする定義もある)
- $\star$ と $\diamond$ の間に以下の　　　　　が成り立つ。

$$a \diamond (b \star c) = (a \diamond b) \star (a \diamond c),\ (b \star c) \diamond a = (b \diamond a) \star (c \diamond a)$$

例: $(\mathbb{Z}; +, \times)$

特別な代数系その 5: 環

代数系 $(A; \star, \diamond)$ は以下の条件を満たすとき**環**という。

- $(A; \star)$ は　　　　　　　　　　である。
- $(A; \diamond)$ は　　　　　　である。(注: 半群とする定義もある)
- $\star$ と $\diamond$ の間に以下の　　　　　が成り立つ。

$$a \diamond (b \star c) = (a \diamond b) \star (a \diamond c),\ (b \star c) \diamond a = (b \diamond a) \star (c \diamond a)$$

例: $(\mathbb{Z}; +, \times)$

特別な代数系その 5: 環

代数系 $(A; \star, \diamond)$ は以下の条件を満たすとき**環**という。

- $(A; \star)$ は**可換群 (アーベル群)**である。
- $(A; \diamond)$ は　　　　　　である。(注: 半群とする定義もある)
- $\star$ と $\diamond$ の間に以下の　　　　　が成り立つ。

$$a \diamond (b \star c) = (a \diamond b) \star (a \diamond c),\ (b \star c) \diamond a = (b \diamond a) \star (c \diamond a)$$

例: $(\mathbb{Z}; +, \times)$

特別な代数系その 5: 環

代数系 $(A; \star, \diamond)$ は以下の条件を満たすとき**環**という。

- $(A; \star)$ は**可換群 (アーベル群)**である。
- $(A; \diamond)$ は**モノイド**である。(注: 半群とする定義もある)
- $\star$ と $\diamond$ の間に以下の　　　　が成り立つ。

$$a \diamond (b \star c) = (a \diamond b) \star (a \diamond c),\ (b \star c) \diamond a = (b \diamond a) \star (c \diamond a)$$

例: $(\mathbb{Z}; +, \times)$

特別な代数系その 5: 環

代数系 $(A; \star, \diamond)$ は以下の条件を満たすとき**環**という。

- $(A; \star)$ は**可換群 (アーベル群)**である。
- $(A; \diamond)$ は**モノイド**である。(注: 半群とする定義もある)
- $\star$ と $\diamond$ の間に以下の**分配律**が成り立つ。

$$a \diamond (b \star c) = (a \diamond b) \star (a \diamond c), \ (b \star c) \diamond a = (b \diamond a) \star (c \diamond a)$$

例: $(\mathbb{Z}; +, \times)$

特別な代数系その 5: 環

代数系 $(A;\ \star,\ \diamond)$ は以下の条件を満たすとき**環**という。

- $(A;\ \star)$ は**可換群 (アーベル群)**である。 (加法)
- $(A;\ \diamond)$ は**モノイド**である。(注: 半群とする定義もある)
- $\star$ と $\diamond$ の間に以下の**分配律**が成り立つ。

$$a \diamond (b \star c) = (a \diamond b) \star (a \diamond c),\ (b \star c) \diamond a = (b \diamond a) \star (c \diamond a)$$

例: $(\mathbb{Z};\ +,\ \times)$

特別な代数系その 5: 環

代数系 $(A;\, \star,\, \diamond)$ は以下の条件を満たすとき**環**という。

- $(A;\, \star)$ は**可換群 (アーベル群)**である。 (加法)
- $(A;\, \diamond)$ は**モノイド**である。 (注: 半群とする定義もある) (乗法)
- $\star$ と $\diamond$ の間に以下の**分配律**が成り立つ。

$$a \diamond (b \star c) = (a \diamond b) \star (a \diamond c),\ (b \star c) \diamond a = (b \diamond a) \star (c \diamond a)$$

例: $(\mathbb{Z};\, +,\, \times)$

特別な代数系その 5':

代数系 $(A; \star, \diamond)$ は以下の条件を満たすとき**可換環**という。

- $(A; \star, \diamond)$ は環である。
- 乗法 $(\diamond)$ に**交換律**が成り立つ。

例: $(\mathbb{Z}; +, \times)$

特別な代数系その 5': 可換環

代数系 $(A; \star, \diamond)$ は以下の条件を満たすとき**可換環**という。

- $(A; \star, \diamond)$ は環である。
- 乗法 $(\diamond)$ に**交換律**が成り立つ。

例: $(\mathbb{Z}; +, \times)$

特別な代数系その 6:
ようやくたどり着いた、これが日常生活で使うふつうの計算。

代数系 $(A;+,\times)$ は以下の条件を満たすとき
という。

- $(A;+,\times)$ は　　　である。
- $(A\backslash\{e_+\};\times)$ が　　　　　　である。(ただし e_+ は $+$ 演算の単位元。)

例: $(\mathbb{Q};+,\times)$, $(\mathbb{R};+,\times)$, $(\mathbb{C};+,\times)$

特別な代数系その 6: 体

ようやくたどり着いた、これが日常生活で使うふつうの計算。

代数系 $(A;\ +,\ \times)$ は以下の条件を満たすとき**体**という。

- $(A;\ +,\ \times)$ は　　　　である。
- $(A \backslash \{e_+\};\ \times)$ が　　　　　　　　である。(ただし e_+ は $+$ 演算の単位元。)

例: $(\mathbb{Q};\ +,\ \times), (\mathbb{R};\ +,\ \times), (\mathbb{C};\ +,\ \times)$

特別な代数系その 6: 体

ようやくたどり着いた、これが日常生活で使うふつうの計算。

代数系 $(A;\ +,\ \times)$ は以下の条件を満たすとき**体**という。

- $(A;\ +,\ \times)$ は**可換環**である。
- $(A \backslash \{e_+\};\ \times)$ が　　　　　　　　　　である。(ただし e_+ は $+$ 演算の単位元。)

例: $(\mathbb{Q};\ +,\ \times)$, $(\mathbb{R};\ +,\ \times)$, $(\mathbb{C};\ +,\ \times)$

特別な代数系その 6: 体

ようやくたどり着いた、これが日常生活で使うふつうの計算。

代数系 $(A;\ +,\ \times)$ は以下の条件を満たすとき**体**という。

- $(A;\ +,\ \times)$ は**可換環**である。
- $(A\backslash\{e_+\};\ \times)$ が**可換群 (アーベル群)**である。(ただし e_+ は $+$ 演算の単位元。)

例: $(\mathbb{Q};\ +,\ \times)$, $(\mathbb{R};\ +,\ \times)$, $(\mathbb{C};\ +,\ \times)$

練習

集合 $A = \{a, b, c\}$ と A 上で定義される 2 項演算 $\star$ からなる代数系 $(A; \star)$ を考える。

- c は演算 $\star$ における単位元である。
- この演算にはすべての元に逆元が一つ存在する。
- $\forall x \in A$ について $x \star x = x$ が成り立つ。

$\star$ の演算表を求めよ。

なお、この代数系は結合律を満たさないので半群ですらない。可能であれば（結合律を満たさないことを）示せ。

ミニレポート課題 (提出期間: 本日〜次回の授業の前日)

36 ページの問題を解け。

解答を PC 文書や手書きで作成し、PDF にして Google Forms (**https://forms.gle/hCyJBbFBMW9AisAt7**) から提出せよ (要組織アカウントによるログイン)。ただし写真等の画像ファイルの場合は、解像度や露出・照明状態などを十分考慮し、きちんと読解可能なクオリティのものとすること。スマートフォンの場合はスキャナアプリの類の利用を必須とする。