





# 離散数学

授業開始までしばらくお待ちください。

2024

# 離散数学

## Discrete Mathematics

### 『順序関係』



[bit.ly/d-math](http://bit.ly/d-math)

小林裕之

大阪工業大学 RD 学部システムデザイン工学科



OSAKA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

11 of 14

a L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X + Beamer slideshow

# 授業の受講に関して

- 講義資料（スライド等）は **Google Drive** (<https://bit.ly/d-math>) に置く（紙の配布資料は行わない）。授業前には虫喰い状態のスライドのみを提供するが、授業後に uncovered フォルダに穴埋め版を置くので復習に活用されたい。
- ミニレポートは **Google Forms** (<https://forms.gle/hCyJBbFBMW9AisAt7>) に提出。
- 授業の録画はできるだけスライドと同じフォルダ内のフォルダに置くように努力する（が、必ず置きますとお約束はしません）。
- 授業中に計算間違い等を指摘してくれたらその都度 1 点。（内容に依るけど。）

# 成績評価について

- 出席そのものは評価せず。極論するとテストのみ出席で他は全欠席でも A 評価はあり得る。
- 基本的には**中間演習と期末試験**で評価。
- 毎回ミニレポートを課す。出す者は提出期間を厳守すること。
- 試験の不合格者は**毎回のミニレポートと出席**で少し救済する。  
(しっかりした内容のミニレポートを概ね 9 割以上提出し、かつ大学の出欠管理システムで 8 割以上遅刻せず出席していた場合最大 10 点程度の救済。提出数や出席数が少ない場合は救済幅が縮小する。いずれかが 7 割を下回ったら一切救済しない。締め切り後の提出は認めない。)
- 授業中に**スライドの誤りを見つけて指摘してくれた者には、誤り一箇所につき先着一名様限り 100 点満点 1 点相当の加点を行う。(ただしごく軽微なものなど、内容によっては加点しない場合もあり。)

そく  
東

## 関係の性質 (#6 の復習)

- $\forall a \in A$  について  $aRa$  ならば、 $R$  は \_\_\_\_\_。
- $\forall a, b \in A$  について  $aRb$  ならば  $bRa$  であるとき、 $R$  は \_\_\_\_\_。
- $\forall a, b \in A$  について  $aRb$  かつ  $bRa$  ならば  $a = b$  であるとき、 $R$  は \_\_\_\_\_。
- $\forall a, b, c \in A$  について  $aRb$  かつ  $bRc$  ならば  $aRc$  であるとき、 $R$  は \_\_\_\_\_。

## 関係の性質 (#6 の復習)

- $\forall a \in A$  について  $aRa$  ならば、 $R$  は **反射的**。
- $\forall a, b \in A$  について  $aRb$  ならば  $bRa$  であるとき、 $R$  は
  -
- $\forall a, b \in A$  について  $aRb$  かつ  $bRa$  ならば  $a = b$  であるとき、 $R$  は
  -
- $\forall a, b, c \in A$  について  $aRb$  かつ  $bRc$  ならば  $aRc$  であるとき、 $R$  は
  -

## 関係の性質 (#6 の復習)

- $\forall a \in A$  について  $aRa$  ならば、 $R$  は **反射的**。
- $\forall a, b \in A$  について  $aRb$  ならば  $bRa$  であるとき、 $R$  は **対称的**。
- $\forall a, b \in A$  について  $aRb$  かつ  $bRa$  ならば  $a = b$  であるとき、 $R$  は **反自反的**。
- $\forall a, b, c \in A$  について  $aRb$  かつ  $bRc$  ならば  $aRc$  であるとき、 $R$  は **トランジット的**。

## 関係の性質 (#6 の復習)

- $\forall a \in A$  について  $aRa$  ならば、 $R$  は **反射的**。
- $\forall a, b \in A$  について  $aRb$  ならば  $bRa$  であるとき、 $R$  は **対称的**。
- $\forall a, b \in A$  について  $aRb$  かつ  $bRa$  ならば  $a = b$  であるとき、 $R$  は **反対称的**。
- $\forall a, b, c \in A$  について  $aRb$  かつ  $bRc$  ならば  $aRc$  であるとき、 $R$  は \_\_\_\_\_。

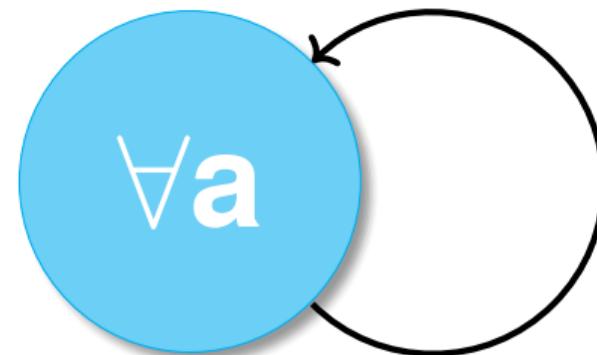
## 関係の性質 (#6 の復習)

- $\forall a \in A$  について  $aRa$  ならば、 $R$  は **反射的**。
- $\forall a, b \in A$  について  $aRb$  ならば  $bRa$  であるとき、 $R$  は **対称的**。
- $\forall a, b \in A$  について  $aRb$  かつ  $bRa$  ならば  $a = b$  であるとき、 $R$  は **反対称的**。
- $\forall a, b, c \in A$  について  $aRb$  かつ  $bRc$  ならば  $aRc$  であるとき、 $R$  は **推移的**。

# 関係が反射的であるとは？

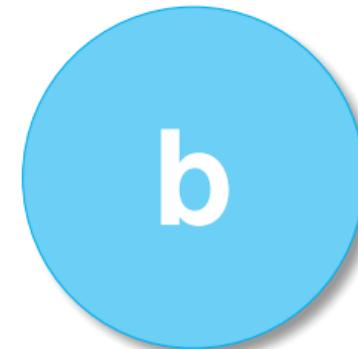
$\forall a$

# 関係が反射的であるとは？

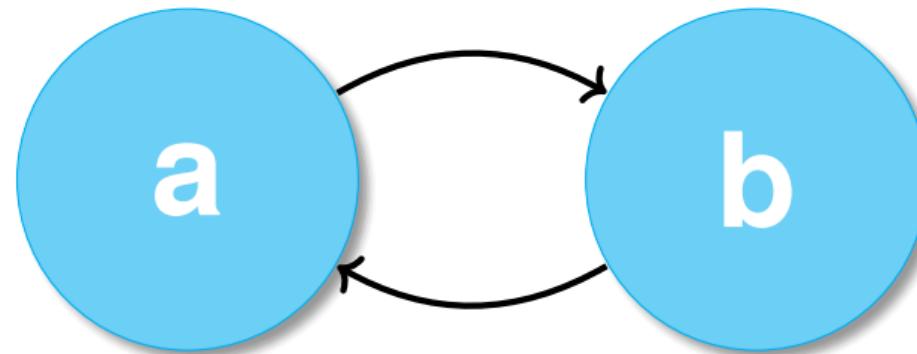


これが全ての元について成り立つ。

# 関係が対称的であるとは？



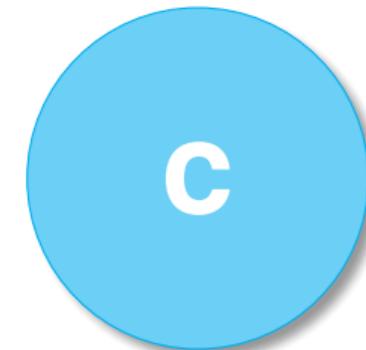
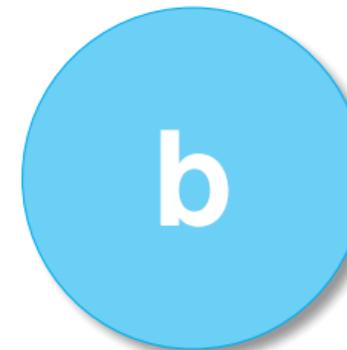
# 関係が対称的であるとは？



関係があるものの同士であるならば、必ず双方向

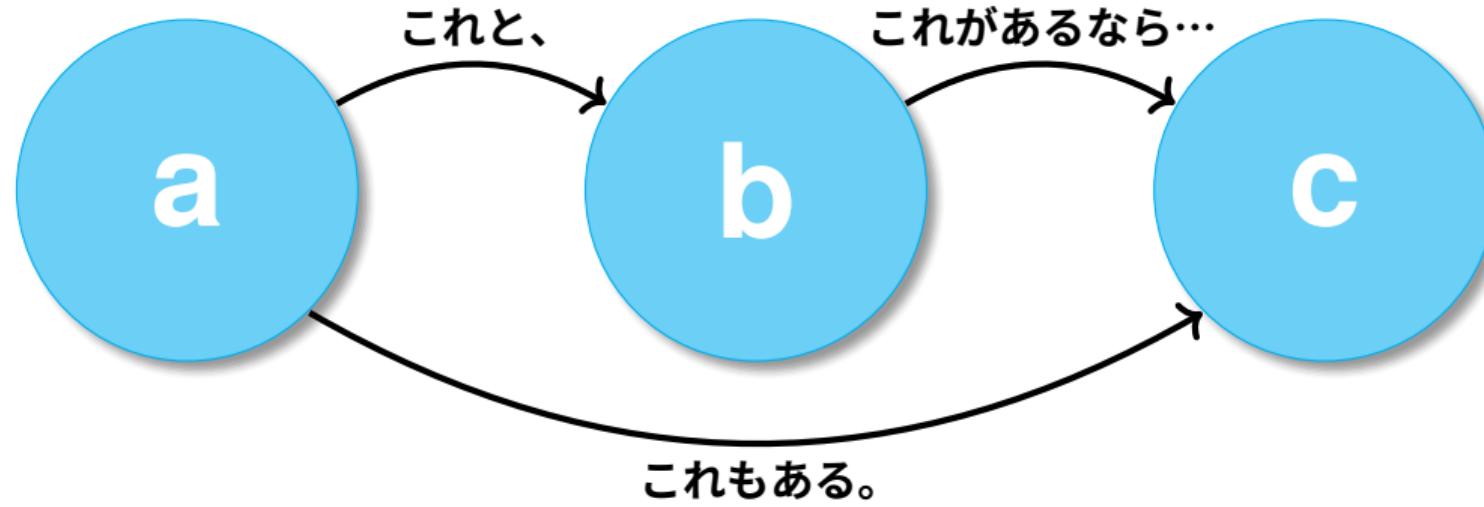
関係が推移的であるとは？

指示代名詞だらけですみません。



# 関係が推移的であるとは？

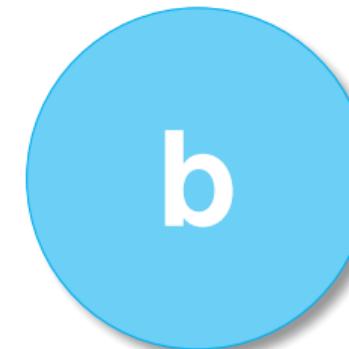
指示代名詞だらけですみません。



これが必ず言える。

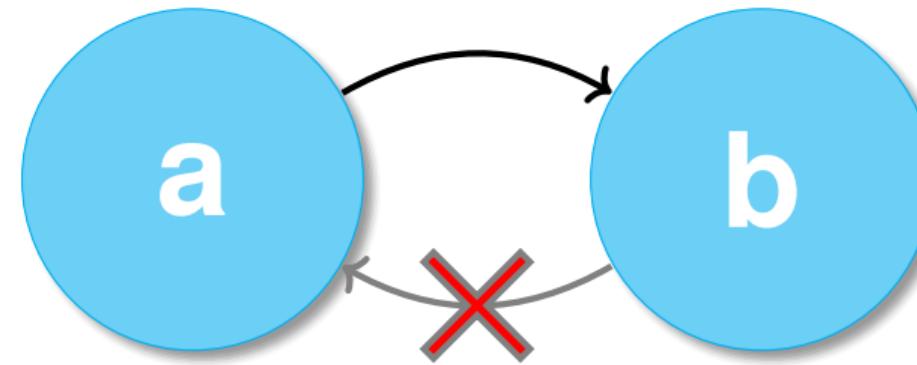
# 関係が反対称的であるとは？

これが多分一番わかりにくい



# 関係が反対称的であるとは？

これが多分一番わかりにくい



それ自身以外とは対称なペアはない。

# 同値関係 (#7 の復習)

## 同値関係 (equivalence relation)

$S$  上の関係  $R$  が、

のとき という。

例:  $\mathbb{Z}$  上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$  は(『イコール』の関係なのでいかにも同値っぽく感じられるが、実際に) 同値関係と言えるかどうか調べよ。

$a, b$  が同値関係にあるとき、 と書く。

# 同値関係 (#7 の復習)

## 同値関係 (equivalence relation)

$S$  上の関係  $R$  が、

- **反射的**かつ

のとき という。

例:  $\mathbb{Z}$  上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$  は(『イコール』の関係なのでいかにも同値っぽく感じられるが、実際に) 同値関係と言えるかどうか調べよ。

$a, b$  が同値関係にあるとき、 と書く。

# 同値関係 (#7 の復習)

## 同値関係 (equivalence relation)

$S$  上の関係  $R$  が、

- **反射的**かつ
- **対称的**かつ

のとき

という。

例:  $\mathbb{Z}$  上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$  は(『イコール』の関係なのでいかにも同値っぽく感じられるが、実際に) 同値関係と言えるかどうか調べよ。

$a, b$  が同値関係にあるとき、  
と書く。

# 同値関係 (#7 の復習)

## 同値関係 (equivalence relation)

$S$  上の関係  $R$  が、

- **反射的**かつ
- **対称的**かつ
- **推移的**

のとき

という。

例:  $\mathbb{Z}$  上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$  は(『イコール』の関係なのでいかにも同値っぽく感じられるが、実際に) 同値関係と言えるかどうか調べよ。

$a, b$  が同値関係にあるとき、  
と書く。

# 同値関係 (# 7 の復習)

## 同値関係 (equivalence relation)

$S$  上の関係  $R$  が、

- **反射的**かつ
- **対称的**かつ
- **推移的**

のとき **同値関係** という。

例:  $\mathbb{Z}$  上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$  は(『イコール』の関係なのでいかにも同値ぽく感じられるが、実際に) 同値関係と言えるかどうか調べよ。

$a, b$  が同値関係にあるとき、  
と書く。

# 同値関係 (#7 の復習)

## 同値関係 (equivalence relation)

$S$  上の関係  $R$  が、

- **反射的**かつ
- **対称的**かつ
- **推移的**

のとき **同値関係** という。

例:  $\mathbb{Z}$  上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$  は(『イコール』の関係なのでいかにも同値ぽく感じられるが、実際に) 同値関係と言えるかどうか調べよ。

$a, b$  が同値関係にあるとき、 $a \sim b$ と書く。

# 半順序関係

## 半順序関係 (partial order relation)

$S$  上の関係  $R$  が、

のとき

という。

例:  $\mathbb{Z}$  上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a \geq b\}$  はいかにも半順序関係ぽく感じられるが、実際に半順序関係と言えるかどうか調べよ。

$a, b$  が半順序関係にあるとき、(この授業では) と書く。

# 半順序関係

## 半順序関係 (partial order relation)

$S$  上の関係  $R$  が、

- **反射的**かつ

のとき

という。

例:  $\mathbb{Z}$  上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a \geq b\}$  はいかにも半順序関係ぽく感じられるが、実際に半順序関係と言えるかどうか調べよ。

$a, b$  が半順序関係にあるとき、(この授業では) **と書く。**

# 半順序関係

## 半順序関係 (partial order relation)

$S$  上の関係  $R$  が、

- **反射的**かつ
- **反対称的**かつ

のとき

という。

例:  $\mathbb{Z}$  上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a \geq b\}$  はいかにも半順序関係ぽく感じられるが、実際に半順序関係と言えるかどうか調べよ。

$a, b$  が半順序関係にあるとき、(この授業では) **と書く。**

# 半順序関係

## 半順序関係 (partial order relation)

$S$  上の関係  $R$  が、

- **反射的**かつ
- **反対称的**かつ
- **推移的**

のとき

という。

例:  $\mathbb{Z}$  上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a \geq b\}$  はいかにも半順序関係ぽく感じられるが、実際に半順序関係と言えるかどうか調べよ。

$a, b$  が半順序関係にあるとき、(この授業では) **と書く。**

# 半順序関係

## 半順序関係 (partial order relation)

$S$  上の関係  $R$  が、

- **反射的**かつ
- **反対称的**かつ
- **推移的**

のとき**半順序関係**という。

例:  $\mathbb{Z}$  上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a \geq b\}$  はいかにも半順序関係ぽく感じられるが、実際に半順序関係と言えるかどうか調べよ。

$a, b$  が半順序関係にあるとき、(この授業では) **と書く。**

## 半順序関係 (partial order relation)

$S$  上の関係  $R$  が、

- **反射的**かつ
- **反対称的**かつ
- **推移的**

のとき**半順序関係**という。

例:  $\mathbb{Z}$  上の関係

$\{\langle a, b \rangle \mid a \geq b\}$  はいかにも半順序関係ぽく感じられるが、実際に半順序関係と言えるかどうか調べよ。

$a, b$  が半順序関係にあるとき、(この授業では)  $a \preceq b$  と書く。

# 半順序集合の例題

$(\mathcal{P}(\{a, b\}); \subset)$  が半順序集合であることを確認し、関係グラフで表わせ。ヒント:

# 半順序集合の例題

$(\mathcal{P}(\{a, b\}); \subset)$  が半順序集合であることを確認し、関係グラフで表わせ。 ヒント:  $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

# 半順序集合の例題

$(\mathcal{P}(\{a, b\}); \subset)$  が半順序集合であることを確認し、関係グラフで表わせ。 ヒント:  $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$\emptyset$

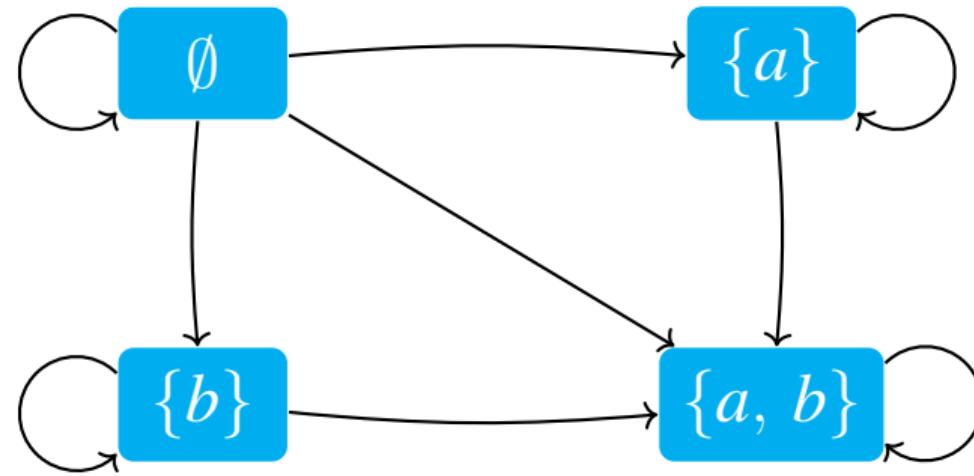
$\{a\}$

$\{b\}$

$\{a, b\}$

# 半順序集合の例題

$(\mathcal{P}(\{a, b\}); \subset)$  が半順序集合であることを確認し、関係グラフで表わせ。 ヒント:  $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$



# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1.  $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$
2.  $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$
3.  $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$
4.  $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$
5.  $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$
6.  $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$
7.  $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$
8.  $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1.  $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$       ✗反射,
2.  $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$
3.  $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$
4.  $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$
5.  $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$
6.  $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$
7.  $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$
8.  $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1.  $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$       ✗反射, ✗対称,
2.  $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$
3.  $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$
4.  $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$
5.  $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$
6.  $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$
7.  $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$
8.  $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1.  $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$  ✗反射, ✗対称, ○反対称,
2.  $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$
3.  $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$
4.  $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$
5.  $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$
6.  $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$
7.  $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$
8.  $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1.  $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$  ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移
2.  $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$
3.  $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$
4.  $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$
5.  $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$
6.  $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$
7.  $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$
8.  $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1.  $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移

2.  $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$

○反射,

3.  $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$

4.  $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

5.  $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6.  $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7.  $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8.  $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1.  $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移

2.  $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$

○反射, ○対称,

3.  $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$

4.  $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

5.  $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6.  $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7.  $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8.  $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1.  $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移

2.  $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✗反対称,

3.  $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$

4.  $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

5.  $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6.  $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7.  $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8.  $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1.  $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$

✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移

2.  $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$

○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移

3.  $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$

4.  $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$

5.  $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$

6.  $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$

7.  $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$

8.  $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |   |
|---|---|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | $\times$ 反射, $\times$ 対称, $\circlearrowleft$ 反対称, $\circlearrowright$ 推移            |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | $\circlearrowleft$ 反射, $\circlearrowright$ 対称, $\times$ 反対称, $\circlearrowright$ 推移 |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | $\times$ 反射,  |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ |   |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      |   |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   |   |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             |   |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        |   |

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |   |
|---|---|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | <input checked="" type="checkbox"/> 反射, <input checked="" type="checkbox"/> 対称, <input type="checkbox"/> 反対称, <input type="checkbox"/> 推移 |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | <input type="checkbox"/> 反射, <input type="checkbox"/> 対称, <input checked="" type="checkbox"/> 反対称, <input type="checkbox"/> 推移            |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | <input checked="" type="checkbox"/> 反射, <input type="checkbox"/> 対称,  |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ |   |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      |   |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   |   |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             |   |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        |   |

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1.  $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$       ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移
2.  $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$       ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移
3.  $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$       ✗反射, ○対称, ✗反対称,
4.  $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$
5.  $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$
6.  $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$
7.  $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$
8.  $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1.  $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$       ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移
2.  $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$       ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移
3.  $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$       ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移
4.  $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$
5.  $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$
6.  $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$
7.  $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$
8.  $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1.  $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$  ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移
2.  $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$  ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移
3.  $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$  ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移
4.  $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$  ○反射,
5.  $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$
6.  $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$
7.  $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$
8.  $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |  |
|---|--|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | <span style="color: blue;">✗</span> 反射, <span style="color: blue;">✗</span> 対称, <span style="color: red;">○</span> 反対称, <span style="color: red;">○</span> 推移  |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | <span style="color: red;">○</span> 反射, <span style="color: red;">○</span> 対称, <span style="color: blue;">✗</span> 反対称, <span style="color: red;">○</span> 推移   |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | <span style="color: blue;">✗</span> 反射, <span style="color: red;">○</span> 対称, <span style="color: blue;">✗</span> 反対称, <span style="color: blue;">✗</span> 推移 |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ | <span style="color: red;">○</span> 反射, <span style="color: blue;">✗</span> 対称,   |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      |  |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   |  |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             |  |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        |  |

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1.  $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$       ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移
2.  $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$       ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移
3.  $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$       ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移
4.  $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$       ○反射, ✗対称, ○反対称,
5.  $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$
6.  $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$
7.  $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$
8.  $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1.  $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$       ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移
2.  $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$       ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移
3.  $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$       ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移
4.  $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$       ○反射, ✗対称, ○反対称, ○推移
5.  $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$
6.  $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$
7.  $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$
8.  $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

1.  $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$       ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移
2.  $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$       ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移
3.  $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$       ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移
4.  $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$       ○反射, ✗対称, ○反対称, ○推移
5.  $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$       ○反射,
6.  $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$
7.  $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid |a - b| \leq 1\}$
8.  $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |                     |
|---|---------------------|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移 |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ | ○反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      | ○反射, ○対称,           |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   |                     |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             |                     |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        |                     |

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |                     |
|---|---------------------|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移 |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ | ○反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      | ○反射, ○対称, ○反対称,     |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   |                     |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             |                     |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        |                     |

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |                     |
|---|---------------------|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移 |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ | ○反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      | ○反射, ○対称, ○反対称, ○推移 |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   |                     |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             |                     |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        |                     |

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |                     |
|---|---------------------|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移 |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ | ○反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      | ○反射, ○対称, ○反対称, ○推移 |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   | ✗反射,                |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             |                     |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        |                     |

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |                     |
|---|---------------------|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移 |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ | ○反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      | ○反射, ○対称, ○反対称, ○推移 |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   | ✗反射, ○対称,           |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             |                     |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        |                     |

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |                     |
|---|---------------------|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移 |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ | ○反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      | ○反射, ○対称, ○反対称, ○推移 |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   | ✗反射, ○対称, ✗反対称,     |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             |                     |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        |                     |

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |                     |
|---|---------------------|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移 |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ | ○反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      | ○反射, ○対称, ○反対称, ○推移 |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             |                     |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        |                     |

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |                     |
|---|---------------------|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移 |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ | ○反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      | ○反射, ○対称, ○反対称, ○推移 |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             | ○反射,                |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        |                     |

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |                     |
|---|---------------------|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移 |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ | ○反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      | ○反射, ○対称, ○反対称, ○推移 |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             | ○反射, ○対称,           |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        |                     |

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |                     |
|---|---------------------|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移 |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ | ○反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      | ○反射, ○対称, ○反対称, ○推移 |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             | ○反射, ○対称, ✗反対称,     |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        |                     |

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |                     |
|---|---------------------|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移 |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ | ○反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      | ○反射, ○対称, ○反対称, ○推移 |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             | ○反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        |                     |

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |                     |
|---|---------------------|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移 |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ | ○反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      | ○反射, ○対称, ○反対称, ○推移 |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             | ○反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        | ○反射,                |

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |                     |
|---|---------------------|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移 |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ | ○反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      | ○反射, ○対称, ○反対称, ○推移 |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             | ○反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        | ○反射, ✗対称,           |

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |  |
|---|--|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | <input checked="" type="checkbox"/> 反射, <input checked="" type="checkbox"/> 対称, <input type="checkbox"/> 反対称, <input type="checkbox"/> 推移            |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | <input type="checkbox"/> 反射, <input type="checkbox"/> 対称, <input checked="" type="checkbox"/> 反対称, <input type="checkbox"/> 推移                       |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | <input checked="" type="checkbox"/> 反射, <input type="checkbox"/> 対称, <input checked="" type="checkbox"/> 反対称, <input checked="" type="checkbox"/> 推移 |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ | <input type="checkbox"/> 反射, <input checked="" type="checkbox"/> 対称, <input type="checkbox"/> 反対称, <input type="checkbox"/> 推移                       |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      | <input type="checkbox"/> 反射, <input type="checkbox"/> 対称, <input type="checkbox"/> 反対称, <input type="checkbox"/> 推移                                  |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   | <input checked="" type="checkbox"/> 反射, <input type="checkbox"/> 対称, <input checked="" type="checkbox"/> 反対称, <input checked="" type="checkbox"/> 推移 |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             | <input type="checkbox"/> 反射, <input type="checkbox"/> 対称, <input checked="" type="checkbox"/> 反対称, <input checked="" type="checkbox"/> 推移            |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        | <input type="checkbox"/> 反射, <input checked="" type="checkbox"/> 対称, <input type="checkbox"/> 反対称,   |

# 練習 (15 分)

徹底的に鍛えよう！

問. 次の  $\mathbb{N}$  上の関係の反射律・対称律・反対称律・推移律を調べよ。

- |   |                     |
|---|---------------------|
| 1. $R_1 = \{\langle a, b \rangle \mid a < b\}$                      | ✗反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 2. $R_2 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が偶数}\}$           | ○反射, ○対称, ✗反対称, ○推移 |
| 3. $R_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a + b \text{が奇数}\}$           | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 4. $R_4 = \{\langle a, b \rangle \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{N}\}$ | ○反射, ✗対称, ○反対称, ○推移 |
| 5. $R_5 = \{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$                      | ○反射, ○対称, ○反対称, ○推移 |
| 6. $R_6 = \{\langle a, b \rangle \mid a \neq b\}$                   | ✗反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 7. $R_7 = \{\langle a, b \rangle \mid  a - b  \leq 1\}$             | ○反射, ○対称, ✗反対称, ✗推移 |
| 8. $R_8 = \{\langle a, b \rangle \mid 0 \leq a - b \leq 1\}$        | ○反射, ✗対称, ○反対称, ✗推移 |

# ところで半順序関係の『半』って何よ？

例えば『全』順序関係とかってあるんですか？

$A$  に半順序関係  $\preceq$  が定義されているとき  $A$  を  
(partially ordered set; poset) といい、  
と書く。

$(A; \preceq)$  の元  $a, b$  について もしくは が成  
り立つとき  $a$  と  $b$  は 、そうでないときは で  
あるという。

そして『全』が明らかに…

# ところで半順序関係の『半』って何よ？

例えば『全』順序関係とかってあるんですか？

$A$  に半順序関係  $\preceq$  が定義されているとき  $A$  を **半順序集合** (partially ordered set; poset) といい、  
と書く。

半順序集合( $A; \preceq$ ) の元  $a, b$  について もしくは が成  
り立つとき  $a$  と  $b$  は 、そうでないときは で  
あるという。

そして『全』が明らかに…

# ところで半順序関係の『半』って何よ？

例えば『全』順序関係とかってあるんですか？

$A$  に半順序関係  $\preceq$  が定義されているとき  $A$  を **半順序集合** (partially ordered set; poset) といい、 $(A; \preceq)$  と書く。

半順序集合 $(A; \preceq)$  の元  $a, b$  について もしくは が成  
り立つとき  $a$  と  $b$  は 、そうでないときは で  
あるという。

そして『全』が明らかに…

# ところで半順序関係の『半』って何よ？

例えば『全』順序関係とかってあるんですか？

$A$  に半順序関係  $\preceq$  が定義されているとき  $A$  を **半順序集合** (partially ordered set; poset) といい、 $(A; \preceq)$  と書く。

半順序集合 $(A; \preceq)$  の元  $a, b$  について  $a \preceq b$  もしくは  $b \preceq a$  が成り立つとき  $a$  と  $b$  は 、そうでないときは であるという。

そして『全』が明らかに…

# ところで半順序関係の『半』って何よ？

例えば『全』順序関係とかってあるんですか？

$A$  に半順序関係  $\preceq$  が定義されているとき  $A$  を **半順序集合** (partially ordered set; poset) といい、 $(A; \preceq)$  と書く。

半順序集合 $(A; \preceq)$  の元  $a, b$  について  $a \preceq b$  もしくは  $b \preceq a$  が成り立つとき  $a$  と  $b$  は **比較可能**、そうでないときは **比較不可能** であるという。

そして『全』が明らかに…

# ところで半順序関係の『半』って何よ？

例えば『全』順序関係とかってあるんですか？

$A$  に半順序関係  $\preceq$  が定義されているとき  $A$  を **半順序集合** (partially ordered set; poset) といい、 $(A; \preceq)$  と書く。

半順序集合 $(A; \preceq)$  の元  $a, b$  について  $a \preceq b$  もしくは  $b \preceq a$  が成り立つとき  $a$  と  $b$  は **比較可能**、そうでないときは **比較不能**であるという。

そして『全』が明らかに…

# 全順序

思っていたほど大したことなかった。

半順序集合  $(A; \preceq)$  の任意の元  $a, b$  が比較可能なとき  
 $(A; \preceq)$  を といい、 $\preceq$  を と言う。  
 要するに半順序の特殊な場合です。

**問.** 2 ページ前の問題の中で全順序関係はどれか?

## 全順序

思っていたほど大したことなかった。

半順序集合  $(A; \preceq)$  の任意の元  $a, b$  が比較可能なとき  
 $(A; \preceq)$  を **全順序集合** と言い、 $\preceq$  を **全順序関係** と言う。

要するに半順序の特殊な場合です。

問. 2 ページ前の問題の中で全順序関係はどれか?

## 全順序

思っていたほど大したことなかった。

半順序集合  $(A; \preceq)$  の任意の元  $a, b$  が比較可能なとき  
 $(A; \preceq)$  を **全順序集合** と言い、 $\preceq$  を **全順序関係** と言う。

要するに半順序の特殊な場合です。

問. 2 ページ前の問題の中で全順序関係はどれか?

# 全順序

思っていたほど大したことなかった。

半順序集合  $(A; \preceq)$  の任意の元  $a, b$  が比較可能なとき  
 $(A; \preceq)$  を **全順序集合** と言い、 $\preceq$  を **全順序関係** と言う。

要するに半順序の特殊な場合です。

問. 2 ページ前の問題の中で全順序関係はどれか?

答: どれも違う。

# 練習 (10 分)

『 $b$  が  $a$  の倍数である』という関係を**整除関係**といい、 $a|b$  と書く。(例:  $7|42$ )

## 問

1.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  上の関係  $R = \{\langle a, b \rangle \mid a|b\}$  は半順序関係か?
2. それでは前問の  $R$  は全順序関係か?
3. 10 以下の自然数の部分集合で、整除関係が全順序関係になるようなものをなにか挙げよ。ただし要素数を 3 以上とする。
4. 前問において、要素数を 3 以上としたのはなぜか? 1 や 2 ではダメなのか?

# 練習 (10 分)

『 $b$  が  $a$  の倍数である』という関係を**整除関係**といい、 $a|b$  と書く。(例:  $7|42$ )

## 問

1.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  上の関係  $R = \{\langle a, b \rangle \mid a|b\}$  は半順序関係か?
2. それでは前問の  $R$  は全順序関係か? 1. yes
3. 10 以下の自然数の部分集合で、整除関係が全順序関係になるようなものをなにか挙げよ。ただし要素数を 3 以上とする。
4. 前問において、要素数を 3 以上としたのはなぜか? 1 や 2 ではダメなのか?

# 練習 (10 分)

『 $b$  が  $a$  の倍数である』という関係を**整除関係**といい、 $a|b$  と書く。(例:  $7|42$ )

## 問

1.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  上の関係  $R = \{\langle a, b \rangle \mid a|b\}$  は半順序関係か?  
2. それでは前問の  $R$  は全順序関係か? 1. yes 2. no
3. 10 以下の自然数の部分集合で、整除関係が全順序関係になるようなものをなにか挙げよ。ただし要素数を 3 以上とする。
4. 前問において、要素数を 3 以上としたのはなぜか? 1 や 2 ではダメなのか?

# 練習 (10 分)

『 $b$  が  $a$  の倍数である』という関係を**整除関係**といい、 $a|b$  と書く。(例:  $7|42$ )

## 問

1.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  上の関係  $R = \{\langle a, b \rangle \mid a|b\}$  は半順序関係か?
2. それでは前問の  $R$  は全順序関係か? 1. yes 2. no
3. 10 以下の自然数の部分集合で、整除関係が全順序関係になるようなものをなにか挙げよ。ただし要素数を 3 以上とする。 3. 例: {2, 4, 8}
4. 前問において、要素数を 3 以上としたのはなぜか? 1 や 2 ではダメなのか?

# 練習 (10 分)

『 $b$  が  $a$  の倍数である』という関係を**整除関係**といい、 $a|b$  と書く。(例:  $7|42$ )

## 問

1.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  上の関係  $R = \{\langle a, b \rangle \mid a|b\}$  は半順序関係か?
2. それでは前問の  $R$  は全順序関係か? 1. yes 2. no
3. 10 以下の自然数の部分集合で、整除関係が全順序関係になるようなものをなにか挙げよ。ただし要素数を 3 以上とする。 3. 例: {2, 4, 8}
4. 前問において、要素数を 3 以上としたのはなぜか? 1 や 2 ではダメなのか?  
4. ダメではないが  $\{1, x\}$  は当たり前だし、1 要素はすべてがそうだから。

## Two more relations...

半順序集合  $(A; \preceq)$  において以下の関係を定義する。

- **関係  $\prec$ :**  $a \prec b \Leftrightarrow a \preceq b$ かつ $a \neq b$   
(要するにイコールを含まない不等号の関係)
- **関係  $\ll$ :**  $a \ll b \Leftrightarrow a \prec b$ かつ $x \notin A$  s.t.  $a \prec x$ かつ $x \prec b$   
(要するに直接隣り合った順序関係)

例: 整数におけるふつうの大小の順序関係で言うと…

$3 \preceq 4, 3 \ll 4, 3 \preceq 6, 5 \ll 6$ は正しいが、 $5 \ll 9$ は正しくない。

# ハッセ図 (Hasse diagram)

半順序集合をビジュアライズ

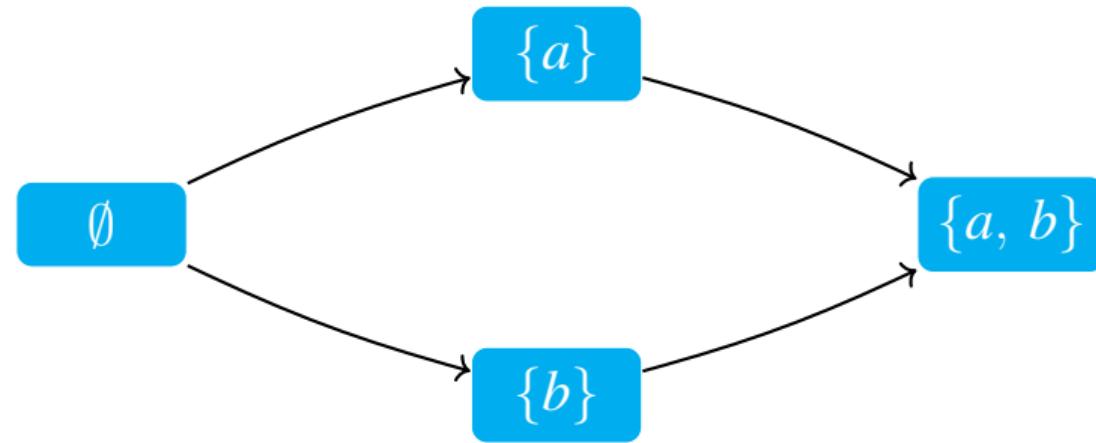
まずは例で説明:  $(P(\{a, b\}); \subset)$  のハッセ図



# ハッセ図 (Hasse diagram)

半順序集合をビジュアライズ

まずは例で説明:  $(P(\{a, b\}); \subset)$  のハッセ図



# Hasse 図とは？

ハッセ図は半順序関係に特化した関係グラフ的な図。

- 順序関係を上下（や左右）に並べる。
- $x \preceq x$  は常に成り立つので **は省略。**
- $(x \preceq y \text{かつ } y \preceq z \text{ のときの } x \preceq z \text{ のような})$  **を省略。**
- 向きが自明なので、**ではなく单なる線**で書くことが多い。

練習：次の半順序集合のハッセ図を書け。（10 分）

- $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; |)$  ( $\leftarrow$  関係グラフも書け。)
- $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}; |)$
- $(P(\{a, b, c, d\}); \subset)$

# Hasse 図とは？

ハッセ図は**半順序関係に特化**した関係グラフ的な図。

- 順序関係を上下（や左右）に並べる。
- $x \preceq x$  は常に成り立つので**反射性は省略**。
- ( $x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ のときの $x \preceq z$ のような) **を省略**。
- 向きが自明なので、**ではなく单なる線**で書くことが多い。

練習: 次の半順序集合のハッセ図を書け。 (10 分)

- $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; |)$  ( $\leftarrow$  関係グラフも書け。)
- $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}; |)$
- $(P(\{a, b, c, d\}); \subset)$

# Hasse 図とは？

ハッセ図は**半順序関係に特化**した関係グラフ的な図。

- 順序関係を上下（や左右）に並べる。
- $x \preceq x$  は常に成り立つので**反射性は省略**。
- ( $x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ のときの $x \preceq z$ のような)**推移性を省略**。
- 向きが自明なので、**ではなく单なる線**で書くことが多い。

練習：次の半順序集合のハッセ図を書け。（10 分）

- $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; |)$  ( $\leftarrow$  関係グラフも書け。)
- $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}; |)$
- $(P(\{a, b, c, d\}); \subset)$

# Hasse 図とは？

ハッセ図は**半順序関係に特化**した関係グラフ的な図。

- 順序関係を上下（や左右）に並べる。
- $x \preceq x$  は常に成り立つので**反射性は省略**。
- ( $x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ のときの $x \preceq z$ のような)**推移性を省略**。
- 向きが自明なので、**矢印ではなく单なる線**で書くことが多い。

練習：次の半順序集合のハッセ図を書け。（10 分）

- $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; |)$  ( $\leftarrow$  関係グラフも書け。)
- $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}; |)$
- $(P(\{a, b, c, d\}); \subset)$

# ミニレポート課題 (提出期間: 本日～次回の授業の前日)

p. 19の問題を解け。

解答を PC 文書や手書きで作成し、PDF にして Google Forms (<https://forms.gle/hCyJBbFBMW9AisAt7>) から提出せよ (要組織アカウントによるログイン)。ただし写真等の画像ファイルの場合は、解像度や露出・照明状態などを十分考慮し、きちんと読解可能なクオリティのものとすること。スマートフォンの場合はスキャナアプリの類の利用を必須とする。

