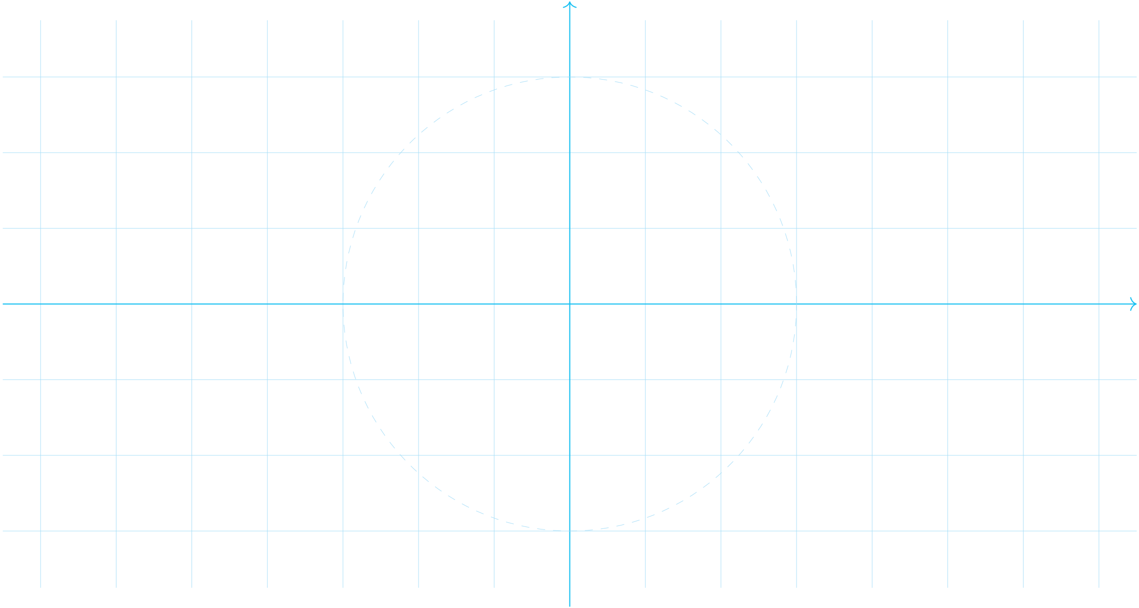
memo



memo

離散数学

授業開始までしばらくお待ちください。

2024

離散数学
Discrete Mathematics

『束』

bit.ly/d-math

小林裕之

大阪工業大学 RD 学部システムデザイン工学科

OSAKA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

12 of 14

a LaTeX + Beamer slideshow

授業の受講に関して

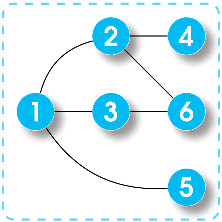
- 講義資料（スライド等）は **Google Drive** (https://bit.ly/d-math) に置く (紙の配布資料は行わない)。授業前には虫喰い状態のスライドのみを提供するが、授業後に uncoveredフォルダに穴埋め版を置くので復習に活用されたい。
- ミニレポートは**Google Forms** (https://forms.gle/hCyJBbFBMW9AisAt7) に提出。
- 授業の録画はできるだけスライドと同じフォルダ内のフォルダに置くように努力する（が、必ず置きますとお約束はしません)。
- 授業中に計算間違い等を指摘してくれたらその都度 1 点。(内容に依るけど。)

成績評価について

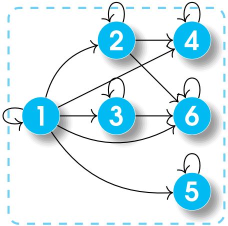
- 出席そのものは評価せず。極論するとテストのみ出席で他は全欠席でも A 評価はあり得る。
- 基本的には**中間演習**と**期末試験**で評価。
- 毎回ミニレポートを課す。出す者は提出期間を厳守すること。
- 試験の不合格者は**毎回のミニレポート**と**出席**で少し救済する。
(**しっかりした内容の**ミニレポートを概ね 9 割以上提出し、かつ大学の出欠管理システムで 8 割以上遅刻せず出席していた場合最大 10 点程度の救済。提出数や出席数が少ない場合は救済幅が縮小する。いずれかが 7 割を下回ったら一切救済しない。締め切り後の提出は認めない。)
- **授業中に**スライドの誤りを見つけて指摘してくれた者には、誤り一箇所につき先着一名様限り 100 点満点 1 点相当の加点を行う。(ただしごく軽微なものなど、内容によっては加点しない場合もあり。)

前回の練習問題解答

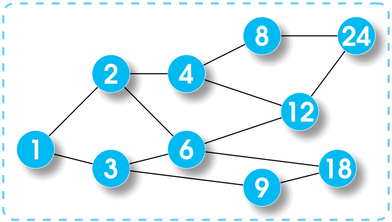
1. ハッセ図



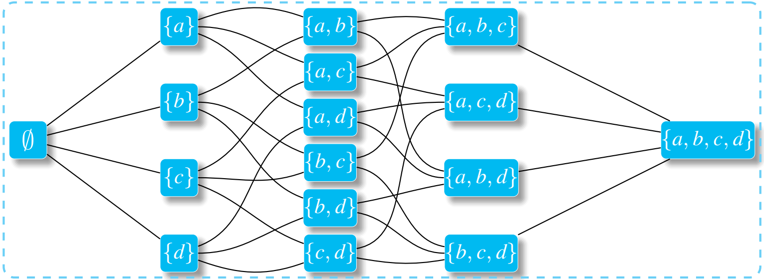
1. 関係グラフ



2. ハッセ図



3. ハッセ図



最大元と最小元

maximum minimum

どれと比べても上（あるいは下）！

- 半順序集合 $(A; \preceq)$ の $a \in A$ が**最大元**である:
- 半順序集合 $(A; \preceq)$ の $b \in A$ が**最小元**である:
- A の最大元を $\max A$、最小元を $\min A$ と書く。

要するに、**どれと比較しても**順序が上 (下) であるなら最大 (小) 元。(**比較できないもの**があってはダメ。)

最大元と最小元

どれと比べても上（あるいは下）！

- 半順序集合 $(A; \preceq)$ の $a \in A$ が**最大元**である:
$$\forall x \in A, x \preceq a$$
- 半順序集合 $(A; \preceq)$ の $b \in A$ が**最小元**である:

- A の最大元を $\max A$、最小元を $\min A$ と書く。

要するに、**どれと比較しても**順序が上 (下) であるなら最大 (小) 元。(**比較できないもの**があってはダメ。)

最大元と最小元

maximum　minimum

どれと比べても上（あるいは下）！

- 半順序集合 $(A; \preceq)$ の $a \in A$ が**最大元**である:
$$\forall x \in A, x \preceq a$$
- 半順序集合 $(A; \preceq)$ の $b \in A$ が**最小元**である:
$$\forall x \in A, b \preceq x$$
- A の最大元を $\max A$、最小元を $\min A$ と書く。

要するに、**どれと比較しても**順序が上 (下) であるなら最大 (小) 元。(**比較できないもの**があってはダメ。)

極大元 (maximal) と極小元 (minimal)

少なくとも俺様より上（下）はいない！

- 半順序集合 $(A;\preceq)$ の $a \in A$ が**極大元**である:
- 半順序集合 $(A;\preceq)$ の $a \in A$ が**極小元**である:

要するに、**比較できる範囲で**順序が一番上 (下) であるなら極大 (小) 元。(**比較できないもの**については気にしない。)

極大元と極小元

maximal　minimal

少なくとも俺様より上（下）はいない！

- 半順序集合 $(A; \preceq)$ の $a \in A$ が**極大元**である:
  $a \preceq x$ かつ $x \in A$ ならば $a = x$ である。
- 半順序集合 $(A; \preceq)$ の $a \in A$ が**極小元**である:

要するに、**比較できる範囲で**順序が一番上 (下) であるなら極大 (小) 元。(**比較できないもの**については気にしない。)

極大元と極小元

maximal: 極大元, minimal: 極小元

少なくとも俺様より上（下）はいない！

- 半順序集合 $(A;\preceq)$ の $a\in A$ が**極大元**である:

  $a\preceq x$ かつ $x\in A$ ならば $a=x$ である。
- 半順序集合 $(A;\preceq)$ の $a\in A$ が**極小元**である:

  $x\preceq a$ かつ $x\in A$ ならば $a=x$ である。

要するに、**比較できる範囲で**順序が一番上 (下) であるなら極大 (小) 元。(**比較できないもの**については気にしない。)

練習

$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とする。

1. $(\mathbb{Z}_7; |)$ のハッセ図を作れ。
2. $(\mathbb{Z}_7; |)$ の最大元、最小元があれば求めよ。
3. $(\mathbb{Z}_7; |)$ の極大元、極小元を求めよ。
4. $(\mathbb{Z}_7 \backslash \{0\}; |)$ の最大元、最小元があれば求めよ。
5. $(\mathbb{Z}_7 \backslash \{0\}; |)$ の極大元、極小元を求めよ。

練習

$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **とする。**

1. $(\mathbb{Z}_7; |)$ のハッセ図を作れ。
2. $(\mathbb{Z}_7; |)$ の最大元、最小元があれば求めよ。

ない

3. $(\mathbb{Z}_7; |)$ の極大元、極小元を求めよ。
4. $(\mathbb{Z}_7 \backslash \{0\}; |)$ の最大元、最小元があれば求めよ。
5. $(\mathbb{Z}_7 \backslash \{0\}; |)$ の極大元、極小元を求めよ。

練習

$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とする。

1. $(\mathbb{Z}_7; |)$ のハッセ図を作れ。
2. $(\mathbb{Z}_7; |)$ の最大元、最小元があれば求めよ。

   ない
3. $(\mathbb{Z}_7; |)$ の極大元、極小元を求めよ。

   極大元: 0, 4, 5, 6, 極小元: 0, 1
4. $(\mathbb{Z}_7 \backslash \{0\}; |)$ の最大元、最小元があれば求めよ。
5. $(\mathbb{Z}_7 \backslash \{0\}; |)$ の極大元、極小元を求めよ。

練習

$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とする。

1. $(\mathbb{Z}_7; \mid)$ のハッセ図を作れ。
2. $(\mathbb{Z}_7; \mid)$ の最大元、最小元があれば求めよ。

   ない
3. $(\mathbb{Z}_7; \mid)$ の極大元、極小元を求めよ。

   極大元: 0, 4, 5, 6, 極小元: 0, 1
4. $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}; \mid)$ の最大元、最小元があれば求めよ。

   最大元: ない, 最小元: 1
5. $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}; \mid)$ の極大元、極小元を求めよ。

練習

$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とする。

1. $(\mathbb{Z}_7; |)$ のハッセ図を作れ。
2. $(\mathbb{Z}_7; |)$ の最大元、最小元があれば求めよ。

   ない
3. $(\mathbb{Z}_7; |)$ の極大元、極小元を求めよ。

   極大元: 0, 4, 5, 6, 極小元: 0, 1
4. $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}; |)$ の最大元、最小元があれば求めよ。

   最大元: ない, 最小元: 1
5. $(\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}; |)$ の極大元、極小元を求めよ。

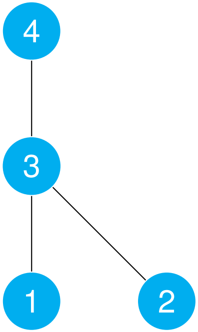
   極大元: 4, 5, 6, 極小元: 1

上界と上限

upper bound　supremum

半順序集合 $(A; \preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. 　　　　　　なる a を　　　　　という。
- M の　　　全体の集合に最小元が存在するなら、それを　　　　　といい、　　　　　と表す。
- 上界は**複数ある場合もある**が、**集合ではない**ので注意。

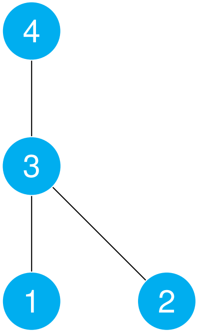


- $\{1,2,3\}$ の上界:
- $\sup\{1,2,3\}$:
- $\{1,2\}$ の上界:
- $\sup\{1,2\}$:

upper bound supremum
上界と上限

半順序集合 $(A; \preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, x \preceq a$ なる a を　　　　　という。
- M の　　　全体の集合に最小元が存在するなら、それを　　　　　といい、　　　　と表す。
- 上界は**複数ある場合もある**が、**集合ではない**ので注意。



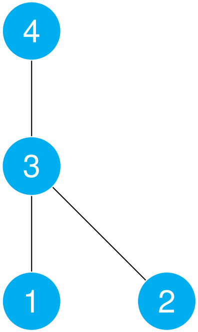
- $\{1, 2, 3\}$ の上界:
- $\sup\{1, 2, 3\}$:
- $\{1, 2\}$ の上界:
- $\sup\{1, 2\}$:

上界と上限

upper bound　supremum

半順序集合 $(A; \preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M,\ x \preceq a$ なる a をM **の上界**という。
- M の上界全体の集合に最小元が存在するなら、それを　　　といい、　　　　と表す。
- 上界は**複数ある場合もある**が、**集合ではない**ので注意。



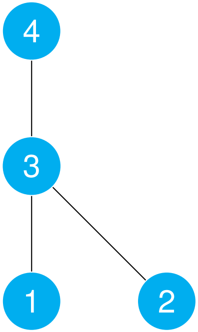
- $\{1, 2, 3\}$ の上界:
- $\sup\{1, 2, 3\}$:
- $\{1, 2\}$ の上界:
- $\sup\{1, 2\}$:

上界と上限

upper bound　supremum

半順序集合 $(A; \preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, x \preceq a$ なる a をM **の上界**という。
- M の上界全体の集合に最小元が存在するなら、それを M の上限といい、　　と表す。
- 上界は**複数ある場合もある**が、**集合ではない**ので注意。



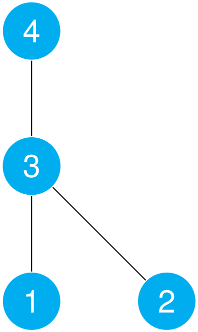
- $\{1,2,3\}$ の上界:
- $\sup\{1,2,3\}$:
- $\{1,2\}$ の上界:
- $\sup\{1,2\}$:

上界と上限

upper bound　supremum

半順序集合 $(A; \preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M,\ x \preceq a$ なる a を **M の上界**という。
- M の上界全体の集合に最小元が存在するなら、それを M の上限といい、$\sup M$ と表す。
- 上界は**複数ある場合もある**が、**集合ではない**ので注意。

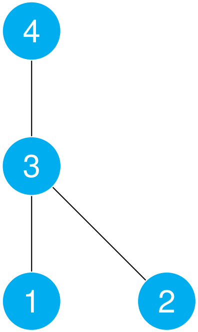


- $\{1,2,3\}$ の上界:
- $\sup\{1,2,3\}$:
- $\{1,2\}$ の上界:
- $\sup\{1,2\}$:

上界と上限
upper bound　supremum

半順序集合 $(A; \preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, x \preceq a$ なる a を**M の上界**という。
- M の上界全体の集合に最小元が存在するなら、それを M の上限といい、$\sup M$と表す。
- 上界は**複数ある場合もある**が、**集合ではない**ので注意。



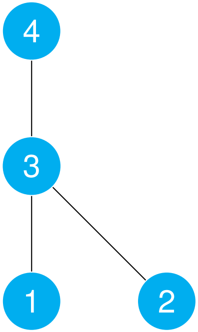
- $\{1, 2, 3\}$ の上界: 3 と 4
- $\sup \{1, 2, 3\}$:
- $\{1, 2\}$ の上界:
- $\sup \{1, 2\}$:

上界と上限

upper bound　supremum

半順序集合 $(A; \preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M,\ x \preceq a$ なる a を**M の上界**という。
- M の上界全体の集合に最小元が存在するなら、それを M の上限といい、$\sup M$と表す。
- 上界は**複数ある場合もある**が、**集合ではない**ので注意。

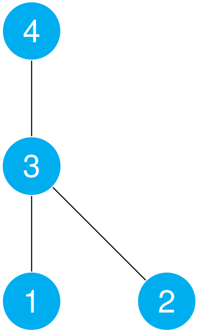


- $\{1, 2, 3\}$ の上界: 3 と 4
- $\sup\{1, 2, 3\}$: 3
- $\{1, 2\}$ の上界:
- $\sup\{1, 2\}$:

上界と上限
upper bound　supremum

半順序集合 $(A; \preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, x \preceq a$ なる a をM **の上界**という。
- M の上界全体の集合に最小元が存在するなら、それを M の上限といい、$\sup M$と表す。
- 上界は**複数ある場合もある**が、**集合ではない**ので注意。

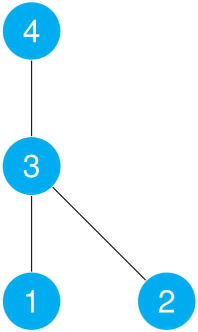


- $\{1, 2, 3\}$ の上界: 3 と 4
- $\sup \{1, 2, 3\}$: 3
- $\{1, 2\}$ の上界: 3 と 4
- $\sup \{1, 2\}$:

上界と上限
upper bound　supremum

半順序集合 $(A; \preceq)$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, x \preceq a$ なる a を**M の上界**という。
- M の上界全体の集合に最小元が存在するなら、それを M の上限といい、$\sup M$と表す。
- 上界は**複数ある場合もある**が、**集合ではない**ので注意。

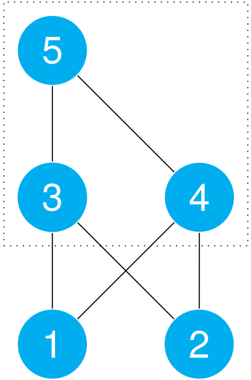


- $\{1, 2, 3\}$ の上界: 3 と 4
- $\sup \{1, 2, 3\}$: 3
- $\{1, 2\}$ の上界: 3 と 4
- $\sup \{1, 2\}$: 3

lower bound　infimum
下　界 と下限

半順序集合 $A; \preceq$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t.　　　　　　　　なる a を　　　　　という。
- M の　　　全体の集合に最大元が存在するなら、それを　　　　といい、　　　　と表す。
- 下界は**複数ある場合もある**が、**集合ではない**ので注意。

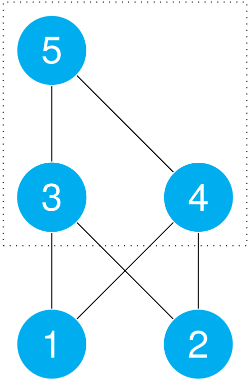


- $\{3, 4, 5\}$ の下界:
- $\inf \{3, 4, 5\}$:

下 界 と下限

半順序集合 $A; \preceq$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, a \preceq x$ なる a を　　　　　という。
- M の　　　全体の集合に最大元が存在するなら、それを　　　　といい、　　　　と表す。
- 下界は**複数ある場合もある**が、**集合ではない**ので注意。

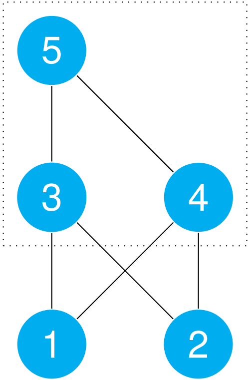


- $\{3, 4, 5\}$ の下界:
- $\inf\{3, 4, 5\}$:

下界と下限

半順序集合 $A; \preceq$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, a \preceq x$ なる a を**M の下界**という。
- M の下界全体の集合に最大元が存在するなら、それを といい、 と表す。
- 下界は**複数ある場合もある**が、**集合ではない**ので注意。

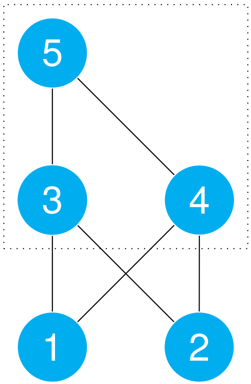


- $\{3, 4, 5\}$ の下界:
- $\inf \{3, 4, 5\}$:

下界 (lower bound) と下限 (infimum)

半順序集合 $A; \preceq$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, a \preceq x$ なる a を **M の下界**という。
- M の下界全体の集合に最大元が存在するなら、それを M の下限といい、　　　と表す。
- 下界は**複数ある場合もある**が、**集合ではない**ので注意。



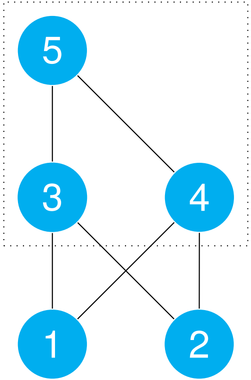
- $\{3, 4, 5\}$ の下界:
- $\inf \{3, 4, 5\}$:

下界と下限

lower bound　infimum

半順序集合 $A; \preceq$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M,\ a \preceq x$ なる a を ***M* の下界**という。
- M の下界全体の集合に最大元が存在するなら、それを M の下限といい、$\inf M$ と表す。
- 下界は**複数ある場合もある**が、**集合ではない**ので注意。

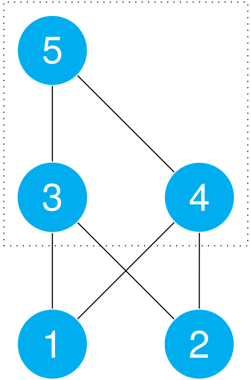


- $\{3, 4, 5\}$ の下界:
- $\inf \{3, 4, 5\}$:

下界と下限

半順序集合 $A; \preceq$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M, a \preceq x$ なる a を**M の下界**という。
- M の下界全体の集合に最大元が存在するなら、それを M の下限といい、$\inf M$と表す。
- 下界は**複数ある場合もある**が、**集合ではない**ので注意。



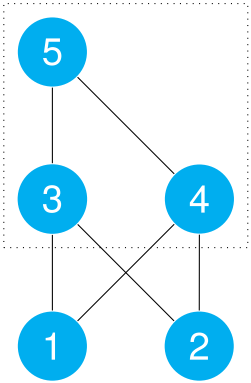
- $\{3, 4, 5\}$ の下界: 1 と 2
- $\inf\{3, 4, 5\}$:

下界と下限

lower bound　infimum

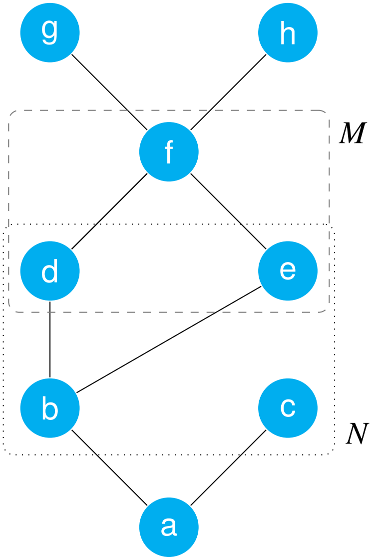
半順序集合 $A; \preceq$ とその部分集合 $M \subset A$ を考える。

- $a \in A$ s.t. $\forall x \in M,\ a \preceq x$ なる a をM **の下界**という。
- M の下界全体の集合に最大元が存在するなら、それを M の下限といい、$\inf M$と表す。
- 下界は**複数ある場合もある**が、**集合ではない**ので注意。



- $\{3, 4, 5\}$ の下界: 1 と 2
- $\inf \{3, 4, 5\}$: なし

ややこしい練習

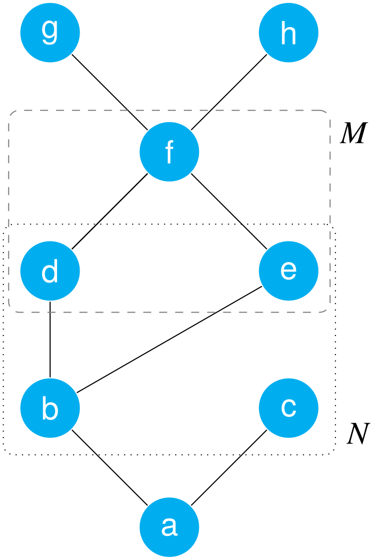


左の半順序集合 $(A;\preceq)$ について答えよ。

1. $M=\{d,e,f\}, N=\{b,c,d,e\}$ の極大元、極小元、最大元、最小元を求めよ。
2. 同様に上界、上限、下界、下限を求めよ。

	極大元	極小元	max	min	上界	sup	下界	inf
M								
N								

ややこしい練習

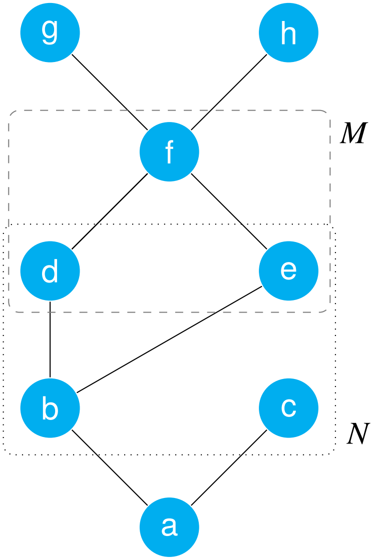


左の半順序集合 $(A; \preceq)$ について答えよ。

1. $M = \{d, e, f\}, N = \{b, c, d, e\}$ の極大元、極小元、最大元、最小元を求めよ。
2. 同様に上界、上限、下界、下限を求めよ。

	極大元	極小元	max	min	上界	sup	下界	inf
M	f							
N								

ややこしい練習

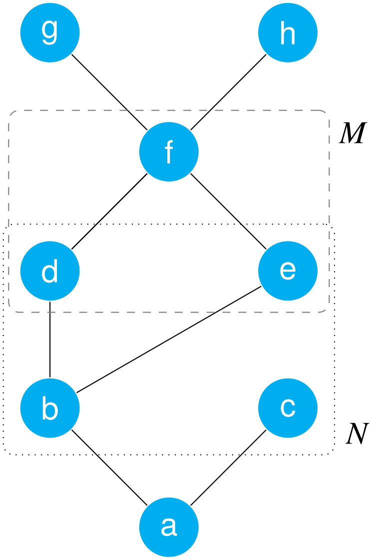


左の半順序集合 $(A; \preceq)$ について答えよ。

1. $M = \{d, e, f\}, N = \{b, c, d, e\}$ の極大元、極小元、最大元、最小元を求めよ。
2. 同様に上界、上限、下界、下限を求めよ。

	極大元	極小元	max	min	上界	sup	下界	inf
M	f	d, e						
N								

ややこしい練習

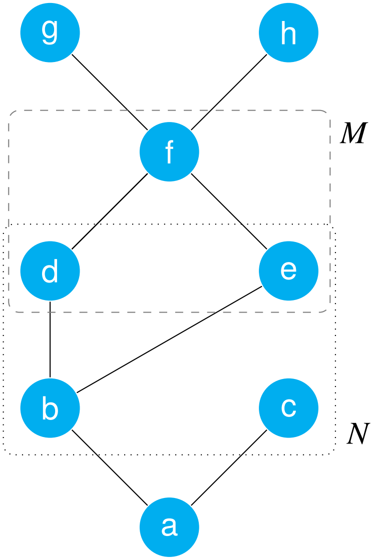


左の半順序集合 $(A;\preceq)$ について答えよ。

1. $M = \{d, e, f\}, N = \{b, c, d, e\}$ の極大元、極小元、最大元、最小元を求めよ。
2. 同様に上界、上限、下界、下限を求めよ。

	極大元	極小元	max	min	上界	sup	下界	inf
M	f	d, e	f					
N								

ややこしい練習

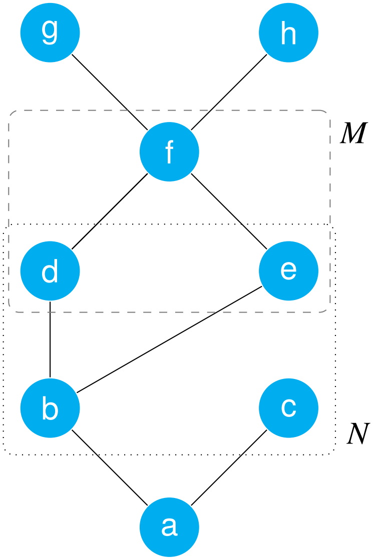


左の半順序集合 $(A;\preceq)$ について答えよ。

1. $M=\{d,e,f\}, N=\{b,c,d,e\}$ の極大元、極小元、最大元、最小元を求めよ。
2. 同様に上界、上限、下界、下限を求めよ。

	極大元	極小元	max	min	上界	sup	下界	inf
M	f	d, e	f	なし				
N								

ややこしい練習

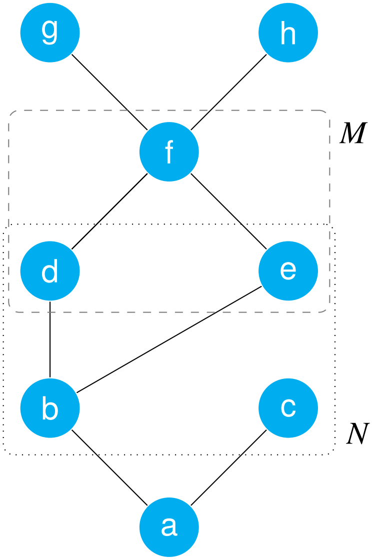


左の半順序集合 $(A; \preceq)$ について答えよ。

1. $M = \{d, e, f\}, N = \{b, c, d, e\}$ の極大元、極小元、最大元、最小元を求めよ。
2. 同様に上界、上限、下界、下限を求めよ。

	極大元	極小元	max	min	上界	sup	下界	inf
M	f	d, e	f	なし				
N	c, d, e							

ややこしい練習

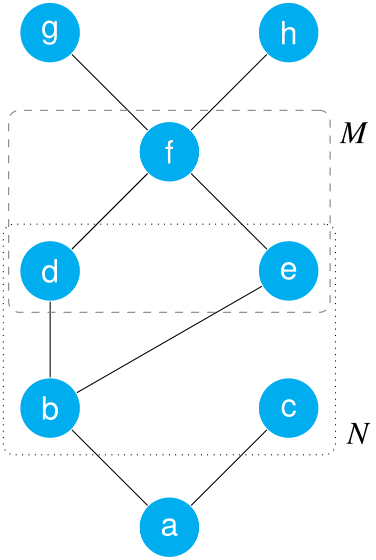


左の半順序集合 $(A;\ \preceq)$ について答えよ。

1. $M = \{d, e, f\}, N = \{b, c, d, e\}$ の極大元、極小元、最大元、最小元を求めよ。
2. 同様に上界、上限、下界、下限を求めよ。

	極大元	極小元	max	min	上界	sup	下界	inf
M	f	d, e	f	なし				
N	c, d, e	b, c						

ややこしい練習

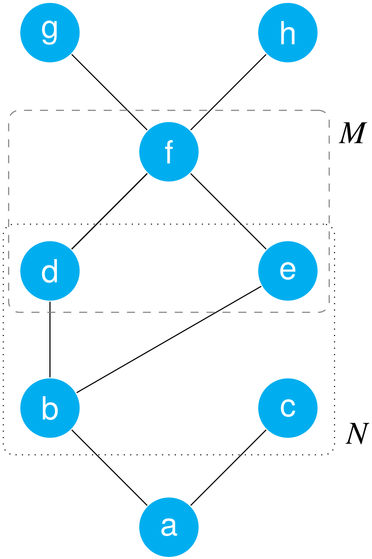


左の半順序集合 $(A; \preceq)$ について答えよ。

1. $M = \{d, e, f\}, N = \{b, c, d, e\}$ の極大元、極小元、最大元、最小元を求めよ。
2. 同様に上界、上限、下界、下限を求めよ。

	極大元	極小元	max	min	上界	sup	下界	inf
M	f	d, e	f	なし				
N	c, d, e	b, c	なし					

ややこしい練習

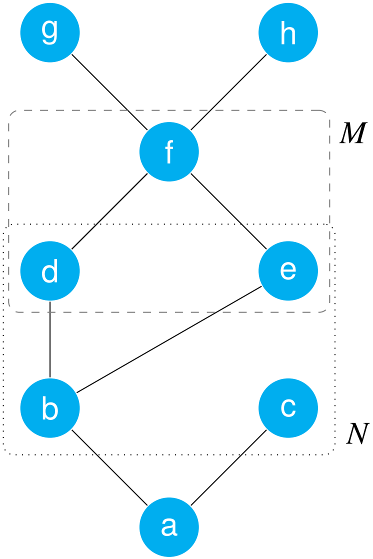


左の半順序集合 $(A; \preceq)$ について答えよ。

1. $M = \{d, e, f\}, N = \{b, c, d, e\}$ の極大元、極小元、最大元、最小元を求めよ。
2. 同様に上界、上限、下界、下限を求めよ。

	極大元	極小元	max	min	上界	sup	下界	inf
M	f	d, e	f	なし				
N	c, d, e	b, c	なし	なし				

ややこしい練習

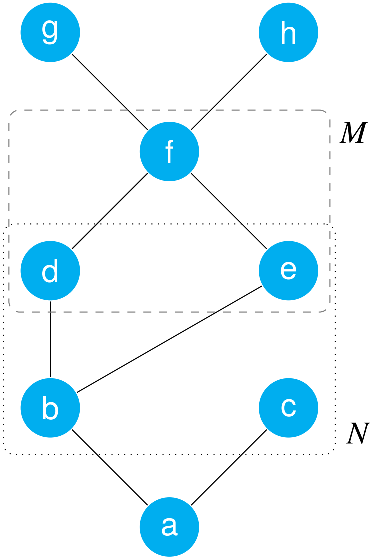


左の半順序集合 $(A;\preceq)$ について答えよ。

1. $M=\{d,e,f\}, N=\{b,c,d,e\}$ の極大元、極小元、最大元、最小元を求めよ。
2. 同様に上界、上限、下界、下限を求めよ。

	極大元	極小元	max	min	上界	sup	下界	inf
M	f	d, e	f	なし	f, g, h			
N	c, d, e	b, c	なし	なし				

ややこしい練習

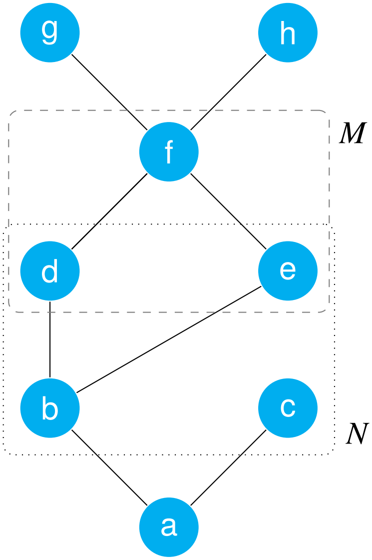


左の半順序集合 $(A; \preceq)$ について答えよ。

1. $M = \{d, e, f\}, N = \{b, c, d, e\}$ の極大元、極小元、最大元、最小元を求めよ。
2. 同様に上界、上限、下界、下限を求めよ。

	極大元	極小元	max	min	上界	sup	下界	inf
M	f	d, e	f	なし	f, g, h	f		
N	c, d, e	b, c	なし	なし				

ややこしい練習

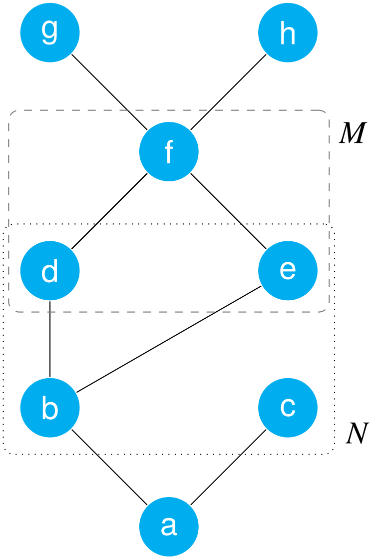


左の半順序集合 $(A; \preceq)$ について答えよ。

1. $M = \{d, e, f\}, N = \{b, c, d, e\}$ の極大元、極小元、最大元、最小元を求めよ。
2. 同様に上界、上限、下界、下限を求めよ。

	極大元	極小元	max	min	上界	sup	下界	inf
M	f	d, e	f	なし	f, g, h	f	a, b	
N	c, d, e	b, c	なし	なし				

ややこしい練習

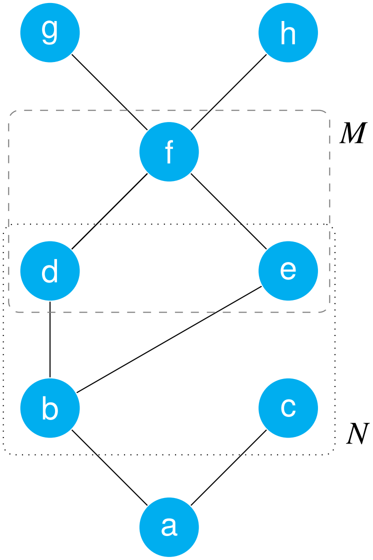


左の半順序集合 $(A; \preceq)$ について答えよ。

1. $M = \{d, e, f\}, N = \{b, c, d, e\}$ の極大元、極小元、最大元、最小元を求めよ。
2. 同様に上界、上限、下界、下限を求めよ。

	極大元	極小元	max	min	上界	sup	下界	inf
M	f	d, e	f	なし	f, g, h	f	a, b	b
N	c, d, e	b, c	なし	なし				

ややこしい練習

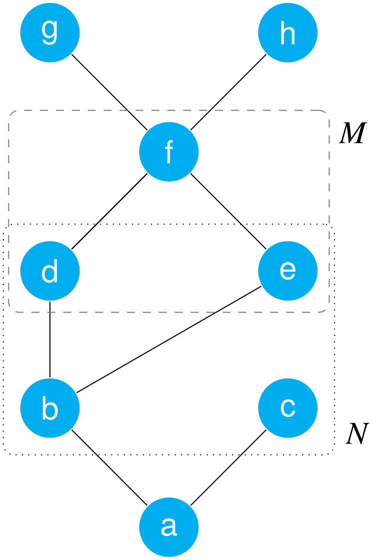


左の半順序集合 $(A;\ \preceq)$ について答えよ。

1. $M = \{d,\ e,\ f\}, N = \{b,\ c,\ d,\ e\}$ の極大元、極小元、最大元、最小元を求めよ。
2. 同様に上界、上限、下界、下限を求めよ。

	極大元	極小元	max	min	上界	sup	下界	inf
M	f	d, e	f	なし	f, g, h	f	a, b	b
N	c, d, e	b, c	なし	なし	なし			

ややこしい練習

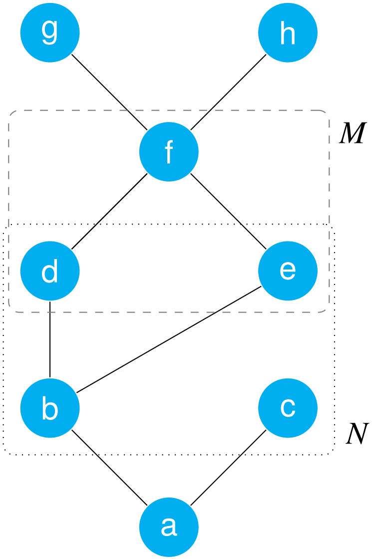


左の半順序集合 $(A; \preceq)$ について答えよ。

1. $M = \{d, e, f\}, N = \{b, c, d, e\}$ の極大元、極小元、最大元、最小元を求めよ。
2. 同様に上界、上限、下界、下限を求めよ。

	極大元	極小元	max	min	上界	sup	下界	inf
M	f	d, e	f	なし	f, g, h	f	a, b	b
N	c, d, e	b, c	なし	なし	なし	なし		

ややこしい練習

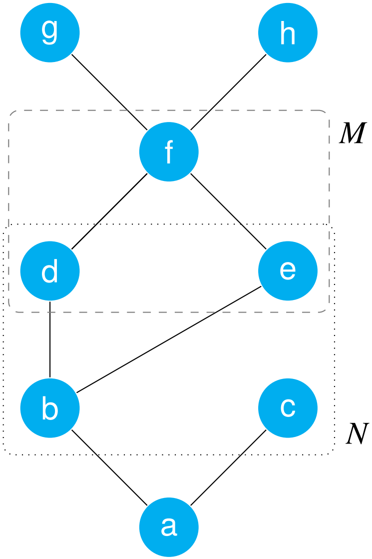


左の半順序集合 $(A; \preceq)$ について答えよ。

1. $M = \{d, e, f\}, N = \{b, c, d, e\}$ の極大元、極小元、最大元、最小元を求めよ。
2. 同様に上界、上限、下界、下限を求めよ。

	極大元	極小元	max	min	上界	sup	下界	inf
M	f	d, e	f	なし	f, g, h	f	a, b	b
N	c, d, e	b, c	なし	なし	なし	なし	a	

ややこしい練習



左の半順序集合 $(A; \preceq)$ について答えよ。

1. $M = \{d, e, f\}, N = \{b, c, d, e\}$ の極大元、極小元、最大元、最小元を求めよ。
2. 同様に上界、上限、下界、下限を求めよ。

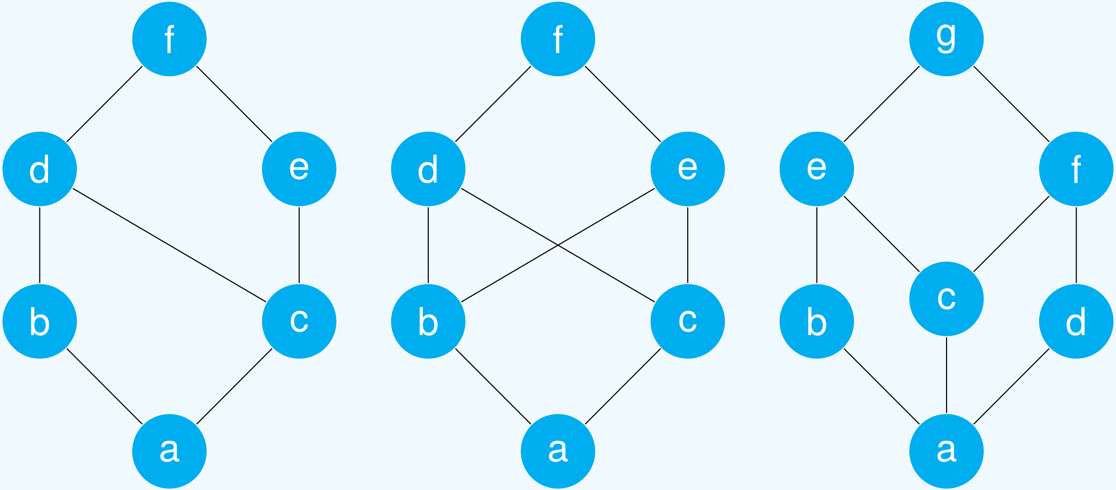
	極大元	極小元	max	min	上界	sup	下界	inf
M	f	d, e	f	なし	f, g, h	f	a, b	b
N	c, d, e	b, c	なし	なし	なし	なし	a	a

半順序集合 $(A;\preceq)$ において、$\forall a, b \in A$ に対し, $\sup\{a, b\}$ と $\inf\{a, b\}$ が存在するとき $(A;\preceq)$ を　という。要するにどの 2 つを持ってきても**上限と下限が存在**する、という意味。

半順序集合 $(A; \preceq)$ において、$\forall a, b \in A$ に対し, $\sup\{a, b\}$ と $\inf\{a, b\}$ が存在するとき $(A; \preceq)$ を**束**という。要するにどの 2 つを持ってきても**上限と下限が存在**する、という意味。

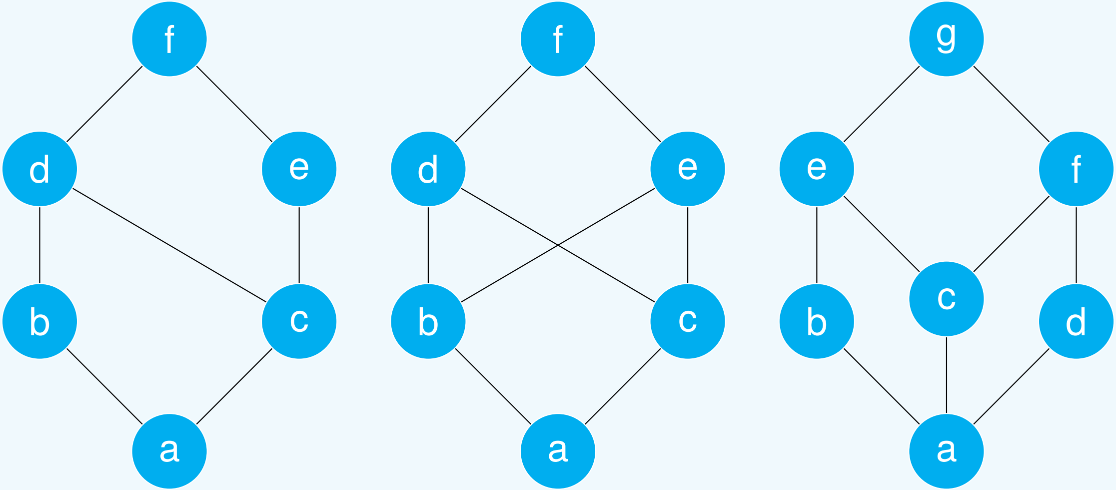
練習

Q: 束か否か?



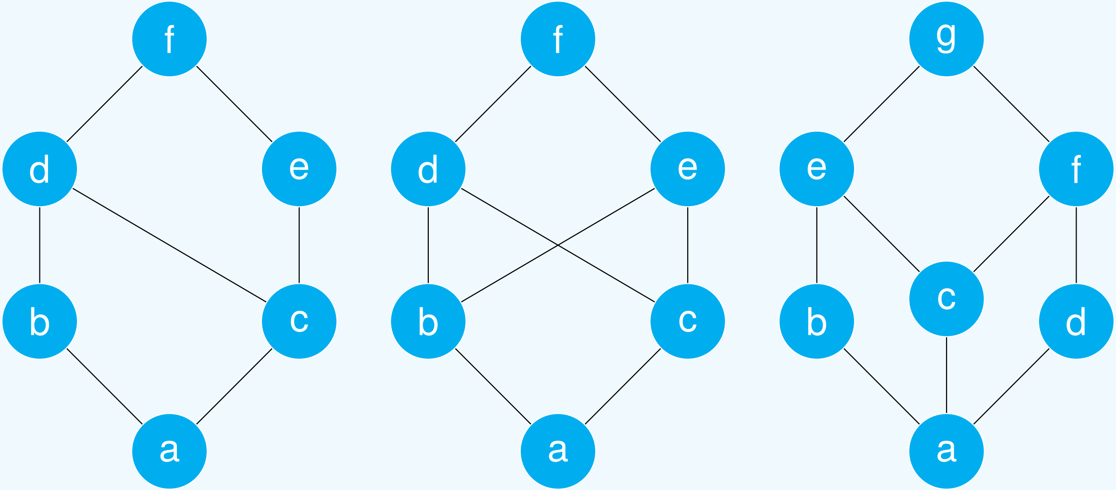
練習

Q: 束か否か? **A: 左は束。**



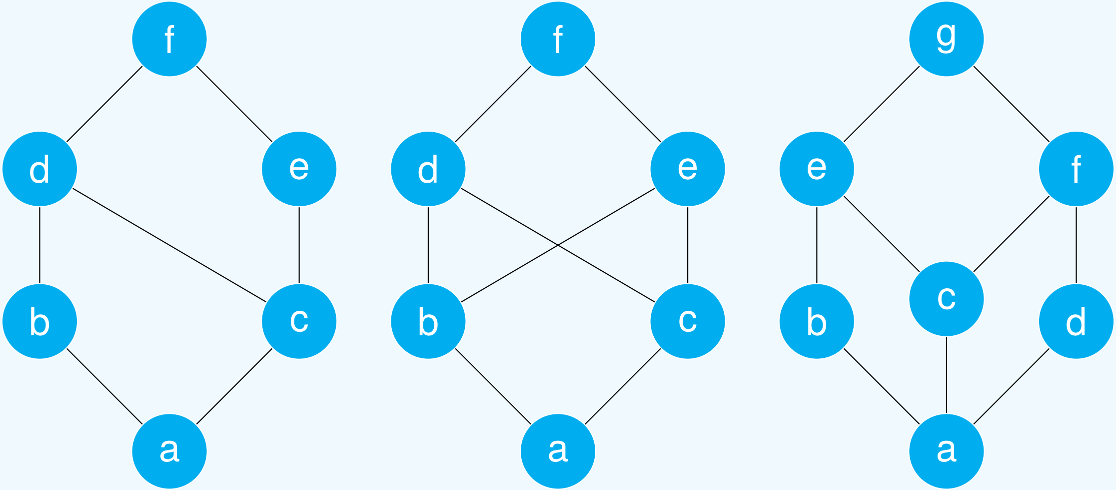
練習

Q: 束か否か? **A: 左は束。 中は否。**



練習

Q: 束か否か? **A: 左は束。 中は否。 右は束。**



束で作る代数系

順序集合 $(L; \preceq)$ が束であれば、2 つの**演算**

- $x \vee y \triangleq \sup\{x, y\}$
- $x \wedge y \triangleq \inf\{x, y\}$

で、**代数系** が作れる。

問

前ページの 2 つの束の $\vee, \wedge$ の演算表を作れ。

束で作る代数系

順序集合 $(L; \preceq)$ が束であれば、2 つの**演算**

- $x \vee y \triangleq \sup\{x, y\}$
- $x \wedge y \triangleq \inf\{x, y\}$

で、**代数系**$(L; \vee, \wedge)$が作れる。

問

前ページの 2 つの束の $\vee, \wedge$ の演算表を作れ。

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee, \wedge$ は以下を満たす。

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee, \wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a,\ a \wedge a = a$

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee, \wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a,\ a \wedge a = a$ べき等律

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee, \wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a,\ a \wedge a = a$ べき等律
- $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee, \wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a,\ a \wedge a = a$ べき等律
- $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$ 交換律 (対称律)

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee, \wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a,\ a \wedge a = a$ べき等律
- $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$ 交換律 (対称律)
- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee, \wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a,\ a \wedge a = a$ べき等律
- $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$ 交換律 (対称律)
- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ 結合律

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee, \wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a,\ a \wedge a = a$ べき等律
- $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$ 交換律 (対称律)
- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ 結合律
- $a \vee (a \wedge b) = a,\ a \wedge (a \vee b) = a$

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee, \wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a,\ a \wedge a = a$ べき等律
- $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$ 交換律 (対称律)
- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ 結合律
- $a \vee (a \wedge b) = a,\ a \wedge (a \vee b) = a$ 吸収律

束で作る代数系の定理

束における演算 $\vee$, $\wedge$ は以下を満たす。

- $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$ べき等律
- $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$ 交換律 (対称律)
- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ 結合律
- $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$ 吸収律

あれ？分配律は?

束で作る代数系における分配律

…は、前ページの定理と違って束であれば自動的に成り立つものではありません。

分配律

- $a \wedge (b \vee c) =$
- $a \vee (b \wedge c) =$

が成り立つ束を　　　　　という。

束で作る代数系における分配律

…は、前ページの定理と違って束であれば自動的に成り立つものではありません。

分配律

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

が成り立つ束を　　　　　という。

束で作る代数系における分配律

…は、前ページの定理と違って束であれば自動的に成り立つものではありません。

分配律

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

が成り立つ束を**分配束**という。

補元

補元は逆元とは違います。

束 L の**最大元を** I, **最小元を** O とする。$y \in L$ に対して、以下が成り立つ x を　　　　　という。

- $x \vee y =$
- $x \wedge y =$

すべての元に　　が存在する束を　　　　　という。

補元

補元は逆元とは違います。

束 L の**最大元を** I, **最小元を** O とする。$y \in L$ に対して、以下が成り立つ x を y **の補元**という。

- $x \vee y =$
- $x \wedge y =$

すべての元に補元が存在する束を　　　　　という。

補元

補元は逆元とは違います。

束 L の**最大元を** I, **最小元を** O とする。$y \in L$ に対して、以下が成り立つ x を y **の補元**という。

- $x \vee y = I$
- $x \wedge y =$

すべての元に補元が存在する束を　　　　　という。

補元

補元は逆元とは違います。

束 L の**最大元**を I, **最小元**を O とする。$y \in L$ に対して、以下が成り立つ x を y **の補元**という。

- $x \vee y = I$
- $x \wedge y = O$

すべての元に補元が存在する束を　　　　　という。

補元

補元は逆元とは違います。

束 L の**最大元を** I, **最小元を** O とする。$y \in L$ に対して、以下が成り立つ x を y **の補元**という。

- $x \vee y = I$
- $x \wedge y = O$

すべての元に補元が存在する束を **可補束** という。

Boole 束

束かつ　　束な束を　　　　　　という。

> 分配束かつ　　束な束を　　　　　という。

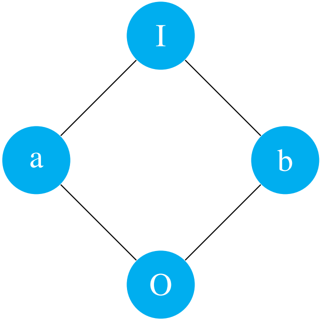
Boole 束

分配束かつ可補束な束を　　　　　　　という。

分配束かつ可補束な束を **ブール束** という。

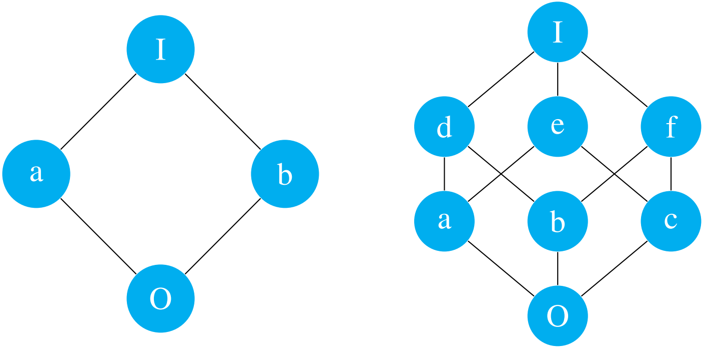
Boole 束

分配束かつ可補束な束を **ブール束** という。



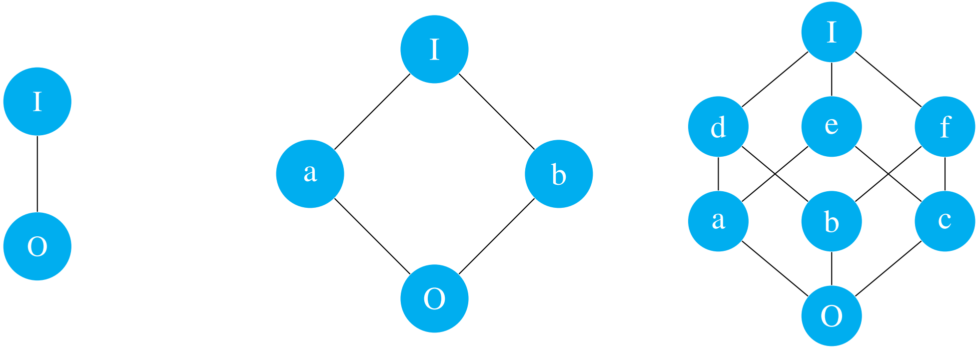
Boole 束

分配束かつ可補束な束を **ブール束** という。

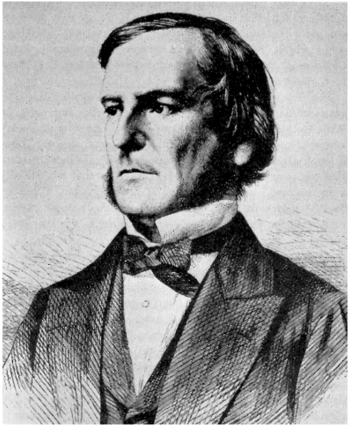


Boole 束

分配束かつ可補束な束を **ブール束** という。



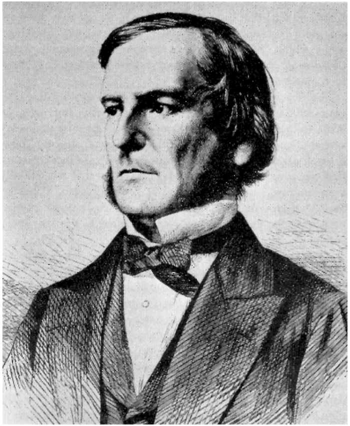
George Boole (1815-1864; 英)



img src=`http://ja.wikipedia.org/`

cf.

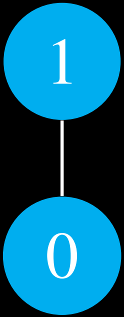
George Boole (1815-1864; 英)



img src=`http://ja.wikipedia.org/`

cf. そのころ日本は開国前夜（ペリー来航は 1853 年）

Epilogue

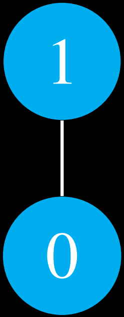


に

続く。

『束』〜完〜

Epilogue



ディジタル電子回路に
続く。

『東』〜完〜

練習

$A = \mathbb{Z}_{13} \backslash \{0\}$ としたとき、半順序集合 $(A; |)$ を考える。

- $(A; |)$ のハッセ図を描け。
- A の最大元, 最小元, 極大元, 極小元を求めよ。
- $\{2, 3\}$ の最大元, 最小元, 極大元, 極小元, 上界, 上限, 下界, 下限を求めよ。

ミニレポート課題 (提出期間: 本日〜次回の授業の前日)

p. 20の問題を解け。

解答を PC 文書や手書きで作成し、PDF にして Google Forms (**https://forms.gle/hCyJBbFBMW9AisAt7**) から提出せよ (要組織アカウントによるログイン)。ただし写真等の画像ファイルの場合は、解像度や露出・照明状態などを十分考慮し、きちんと読解可能なクオリティのものとすること。スマートフォンの場合はスキャナアプリの類の利用を必須とする。