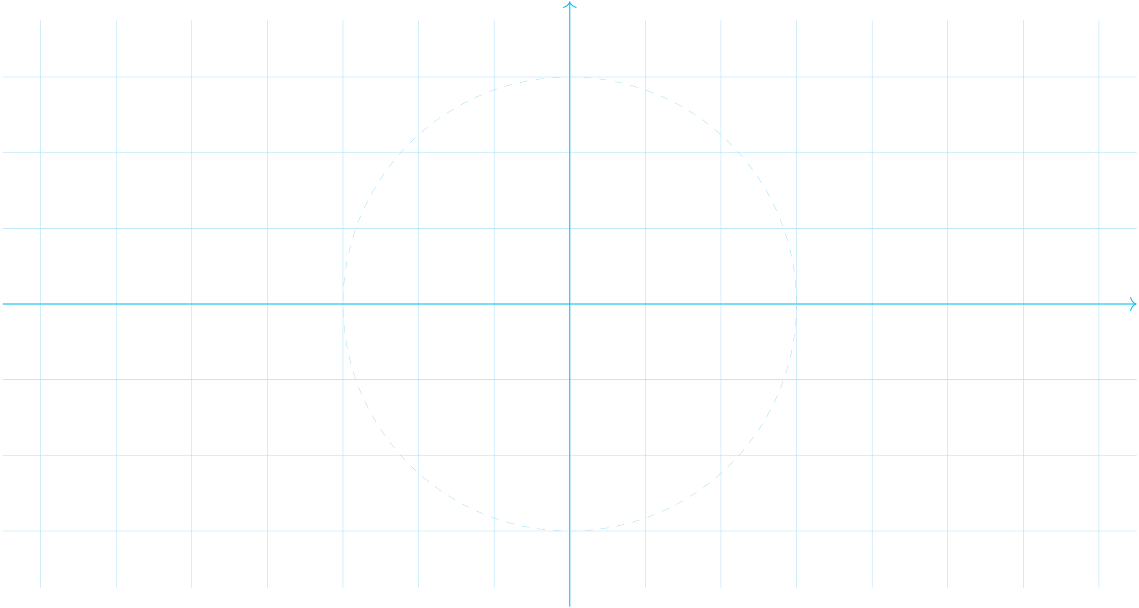
memo



離散数学

授業開始までしばらくお待ちください。

2024

離散数学
Discrete Mathematics

『グラフ理論』

bit.ly/d-math

小林裕之

大阪工業大学 RD 学部システムデザイン工学科

OSAKA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

13 of 14

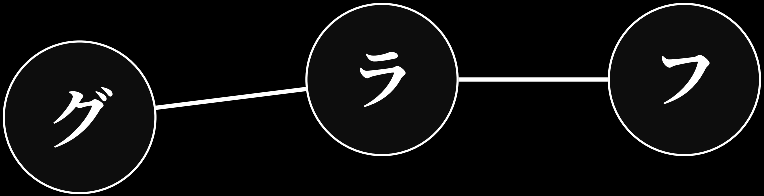
a LaTeX + Beamer slideshow

授業の受講に関して

- 講義資料（スライド等）は **Google Drive** (`https://bit.ly/d-math`) に置く (紙の配布資料は行わない)。授業前には虫喰い状態のスライドのみを提供するが、授業後に `uncovered`フォルダに穴埋め版を置くので復習に活用されたい。
- ミニレポートは**Google Forms** (`https://forms.gle/hCyJBbFBMW9AisAt7`) に提出。
- 授業の録画はできるだけスライドと同じフォルダ内のフォルダに置くように努力する（が、必ず置きますとお約束はしません)。
- 授業中に計算間違い等を指摘してくれたらその都度 1 点。(内容に依るけど。)

成績評価について

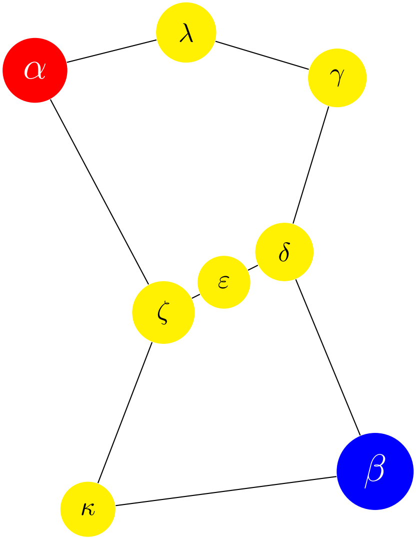
- 出席そのものは評価せず。極論するとテストのみ出席で他は全欠席でも A 評価はあり得る。
- 基本的には**中間演習**と**期末試験**で評価。
- 毎回ミニレポートを課す。出す者は提出期間を厳守すること。
- 試験の不合格者は**毎回のミニレポート**と**出席**で少し救済する。
(**しっかりした内容の**ミニレポートを概ね 9 割以上提出し、かつ大学の出欠管理システムで 8 割以上遅刻せず出席していた場合最大 10 点程度の救済。提出数や出席数が少ない場合は救済幅が縮小する。いずれかが 7 割を下回ったら一切救済しない。締め切り後の提出は認めない。)
- **授業中に**スライドの誤りを見つけて指摘してくれた者には、誤り一箇所につき先着一名様限り 100 点満点 1 点相当の加点を行う。(ただしごく軽微なものなど、内容によっては加点しない場合もあり。)


グ
ラ
フ

グラフとは

頂点を辺でつなげたもの

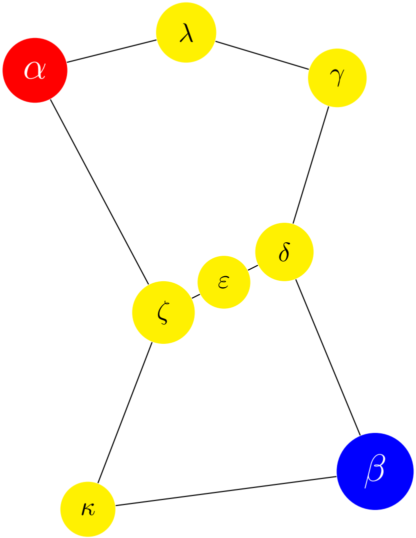
- グラフは　　　　　　と表す。
- V は　　　　　。『G の』頂点集合という意味で、$V(G)$ と表すこともある。
- E は　　　　。『G の』辺集合という意味で、$E(G)$ と表すこともある。V 上の関係であり、$E \subset V \times V$。
- $V =$
- $E =$
- 注: 辺は (α, λ) と書いたり $\alpha\lambda$ と書いたりする。



グラフとは

頂点を辺でつなげたもの

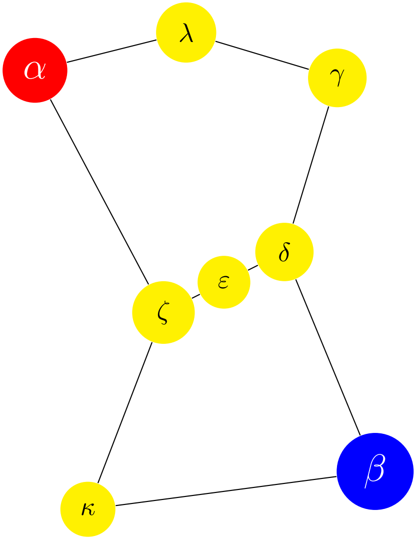
- グラフは$G = (V, E)$と表す。
- Vは　　　　。『Gの』頂点集合という意味で、$V(G)$と表すこともある。
- Eは　　　　。『Gの』辺集合という意味で、$E(G)$と表すこともある。V上の関係であり、$E \subset V \times V$。
- $V =$
- $E =$
- 注: 辺は(α, λ)と書いたり$\alpha\lambda$と書いたりする。



グラフとは

頂点を辺でつなげたもの

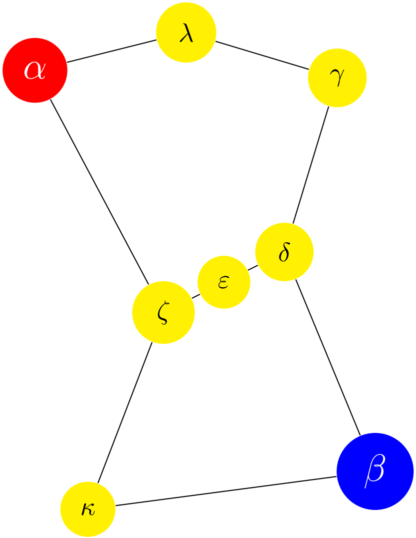
- グラフは$G = (V, E)$と表す。
- V は**頂点集合**（vertex）。『G の』頂点集合という意味で、$V(G)$ と表すこともある。
- E は　　　　。『G の』辺集合という意味で、$E(G)$ と表すこともある。V 上の関係であり、$E \subset V \times V$。
- $V =$
- $E =$
- 注: 辺は (α, λ) と書いたり $\alpha\lambda$ と書いたりする。



グラフとは

頂点を辺でつなげたもの

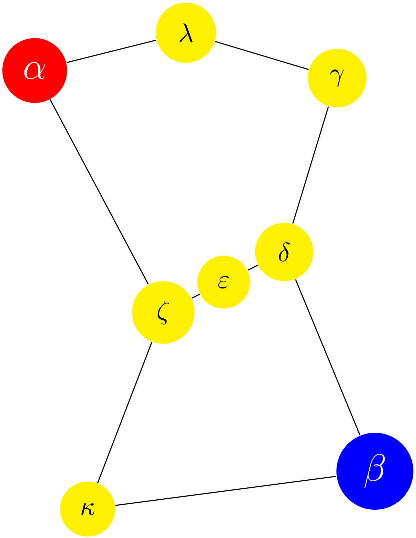
- グラフは$G = (V, E)$と表す。
- V は**頂点集合**（vertex）。『G の』頂点集合という意味で、$V(G)$ と表すこともある。
- E は**辺集合**（edge）。『G の』辺集合という意味で、$E(G)$ と表すこともある。V 上の関係であり、$E \subset V \times V$。
- $V =$
- $E =$



- 注: 辺は (α, λ) と書いたり $\alpha\lambda$ と書いたりする。

グラフとは
頂点を辺でつなげたもの

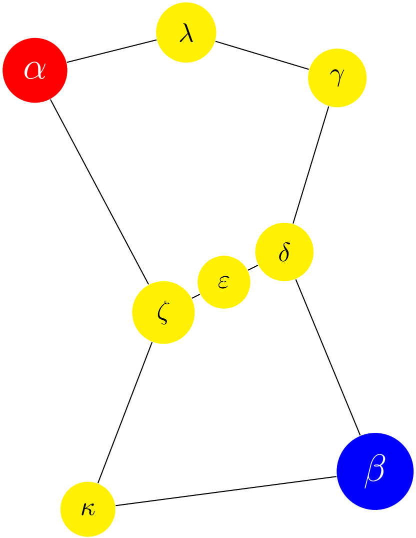
- グラフは$G = (V, E)$と表す。
- Vは**頂点集合**(vertex)。『Gの』頂点集合という意味で、$V(G)$と表すこともある。
- Eは**辺集合**(edge)。『Gの』辺集合という意味で、$E(G)$と表すこともある。V上の関係であり、$E \subset V \times V$。
- $V = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \lambda, \kappa\}$
- $E =$
- 注: 辺は(α, λ)と書いたり$\alpha\lambda$と書いたりする。



グラフとは

頂点を辺でつなげたもの

- グラフは$G = (V, E)$と表す。
- V は vertex **頂点集合**。『G の』頂点集合という意味で、$V(G)$ と表すこともある。
- E は edge **辺集合**。『G の』辺集合という意味で、$E(G)$ と表すこともある。V 上の関係であり、$E \subset V \times V$。
- $V = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \lambda, \kappa\}$
- $E =$ $\{\alpha\lambda, \alpha\zeta, \beta\delta, \beta\kappa, \gamma\delta, \gamma\lambda, \delta\epsilon, \epsilon\zeta, \zeta\kappa\}$
- 注: 辺は (α, λ) と書いたり $\alpha\lambda$ と書いたりする。

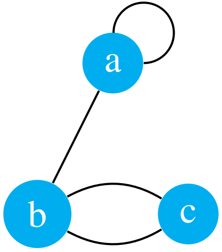


単純グラフと有向グラフ

複雑な単純グラフもあります。

- 同じ 2 頂点を結ぶ複数の辺. .
- ある 1 点を結ぶ辺. . . . .
- 多重辺とループがないグラフ. . . .

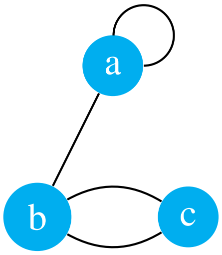
辺に向きが**ある**（矢印で表す）グラフを 、**ない**ものを という。(この授業では無向グラフを扱う。)



単純グラフと有向グラフ
複雑な単純グラフもあります。

- 同じ 2 頂点を結ぶ複数の辺. . **多重辺 (並列辺)**
- ある 1 点を結ぶ辺. . . . .
- 多重辺とループがないグラフ. . . .

辺に向きが**ある**（矢印で表す）グラフを
、**ない**ものを という。(この
授業では無向グラフを扱う。)

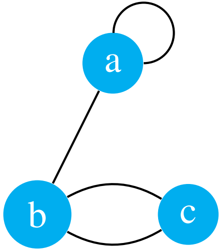


単純グラフと有向グラフ

複雑な単純グラフもあります。

- 同じ 2 頂点を結ぶ複数の辺. . **多重辺 (並列辺)**
- ある 1 点を結ぶ辺 . . . . **(自己) ループ**
- 多重辺とループがないグラフ . . . .

辺に向きが**ある**（矢印で表す）グラフを
　　　、**ない**ものを　　　　　　　　　という。(この
授業では無向グラフを扱う。)

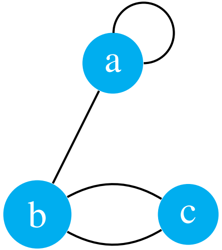


単純グラフと有向グラフ

複雑な単純グラフもあります。

- 同じ 2 頂点を結ぶ複数の辺 . . **多重辺 (並列辺)**
- ある 1 点を結ぶ辺 . . . . **(自己) ループ**
- 多重辺とループがないグラフ . . . . **単純グラフ**

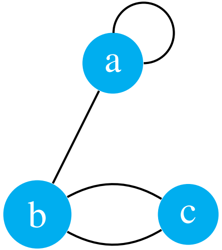
辺に向きが**ある**（矢印で表す）グラフを　　　　　　、**ない**ものを　　　　　　　　という。(この授業では無向グラフを扱う。)



単純グラフと有向グラフ

複雑な単純グラフもあります。

- 同じ 2 頂点を結ぶ複数の辺 . . **多重辺 (並列辺)**
- ある 1 点を結ぶ辺 . . . . **(自己) ループ**
- 多重辺とループがないグラフ . . . . **単純グラフ**

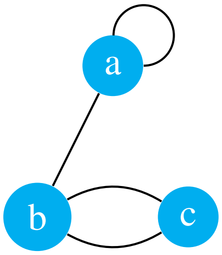


辺に向きが**ある**（矢印で表す）グラフを **有向グラフ**、**ない**ものを　　　　　　という。(この授業では無向グラフを扱う。)

単純グラフと有向グラフ

複雑な単純グラフもあります。

- 同じ 2 頂点を結ぶ複数の辺 . . **多重辺 (並列辺)**
- ある 1 点を結ぶ辺 . . . . **(自己) ループ**
- 多重辺とループがないグラフ . . . . **単純グラフ**



辺に向きが**ある**（矢印で表す）グラフを **有向グラフ**、**ない**ものを **無向グラフ** という。(この授業では無向グラフを扱う。)

いろいろ

- $u, v \in V$ について、uv という辺が存在すれば u と v は という。また、u と v は辺 uv に という。
- 同じ頂点が辺 $d, e \in E$ に接続しているとき d と e は という。 (辺の隣接)
- $v \in V$ に接続する辺の数を v の といい、 と表す。(ループは 2 カウント)
- $d(v) = 1$ である $v \in V$ を 、$d(v) = 0$ である $v \in V$ を という。$d(v)$ が偶数あるいは奇数である頂点をそれぞれ 、 という。

いろいろ

- $u, v \in V$ について、uv という辺が存在すれば u と v は **隣接**するという。また、u と v は辺 uv に　　　　　という。
- 同じ頂点が辺 $d, e \in E$ に接続しているとき d と e は　　　　　という。　　　　　(辺の隣接)
- $v \in V$ に接続する辺の数を v の　　　といいい、　　　と表す。(ループは 2 カウント)
- $d(v) = 1$ である $v \in V$ を　　　　　、$d(v) = 0$ である $v \in V$ を　　　　という。$d(v)$ が偶数あるいは奇数である頂点をそれぞれ　　　　、　　　　という。

いろいろ

- $u, v \in V$ について、uv という辺が存在すれば u と v は **隣接**するという。また、u と v は辺 uv に **接続**するという。
- 同じ頂点が辺 $d, e \in E$ に接続しているとき d と e は　　　　　と いう。　　　　　　　　　　　　(辺の隣接)
- $v \in V$ に接続する辺の数を v の　　　といい、　　　と表す。(ループは 2 カウント)
- $d(v) = 1$ である $v \in V$ を　　　　　　、$d(v) = 0$ である $v \in V$ を　　　　という。$d(v)$ が偶数あるいは奇数である頂点をそれぞれ　　　　、　　　　という。

いろいろ

- $u, v \in V$ について、uv という辺が存在すれば u と v は **隣接**するという。また、u と v は辺 uv に **接続**するという。
- 同じ頂点が辺 $d, e \in E$ に接続しているとき d と e は 隣接するという。 (辺の隣接)
- $v \in V$ に接続する辺の数を v の　　といい、　　と表す。(ループは 2 カウント)
- $d(v) = 1$ である $v \in V$ を　　　　、$d(v) = 0$ である $v \in V$ を　　　　という。$d(v)$ が偶数あるいは奇数である頂点をそれぞれ　　　　、　　　　という。

いろいろ

- $u, v \in V$ について、uv という辺が存在すれば u と v は **隣接**するという。また、u と v は辺 uv に **接続**するという。
- 同じ頂点が辺 $d, e \in E$ に接続しているとき d と e は 隣接するという。 (辺の隣接)
- $v \in V$ に接続する辺の数を v の**次数**といい、 と表す。(ループは 2 カウント)
- $d(v) = 1$ である $v \in V$ を 、$d(v) = 0$ である $v \in V$ を という。$d(v)$ が偶数あるいは奇数である頂点をそれぞれ 、 という。

いろいろ

- $u, v \in V$ について、uv という辺が存在すれば u と v は **隣接**するという。また、u と v は辺 uv に **接続**するという。
- 同じ頂点が辺 $d, e \in E$ に接続しているとき d と e は 隣接するという。 (辺の隣接)
- $v \in V$ に接続する辺の数を v の**次数**といい、$d(v)$ と表す。(ループは 2 カウント)
- $d(v) = 1$ である $v \in V$ を 、$d(v) = 0$ である $v \in V$ を という。$d(v)$ が偶数あるいは奇数である頂点をそれぞれ 、 という。

いろいろ

- $u, v \in V$ について、uv という辺が存在すれば u と v は **隣接**するという。また、u と v は辺 uv に **接続**するという。
- 同じ頂点が辺 $d, e \in E$ に接続しているとき d と e は 隣接するという。 (辺の隣接)
- $v \in V$ に接続する辺の数を v の**次数**といい、$d(v)$ と表す。(ループは 2 カウント)
- $d(v) = 1$ である $v \in V$ を**端点** or **葉**、$d(v) = 0$ である $v \in V$ を　　　という。$d(v)$ が偶数あるいは奇数である頂点をそれぞれ　　　、　　　という。

いろいろ

- $u, v \in V$ について、uv という辺が存在すれば u と v は **隣接**するという。また、u と v は辺 uv に **接続**するという。
- 同じ頂点が辺 $d, e \in E$ に接続しているとき d と e は 隣接するという。 (辺の隣接)
- $v \in V$ に接続する辺の数を v の**次数**といい、$d(v)$ と表す。(ループは 2 カウント)
- $d(v) = 1$ である $v \in V$ を**端点** or **葉**、$d(v) = 0$ である $v \in V$ を**孤立点**という。$d(v)$ が偶数あるいは奇数である頂点をそれぞれ 、 という。

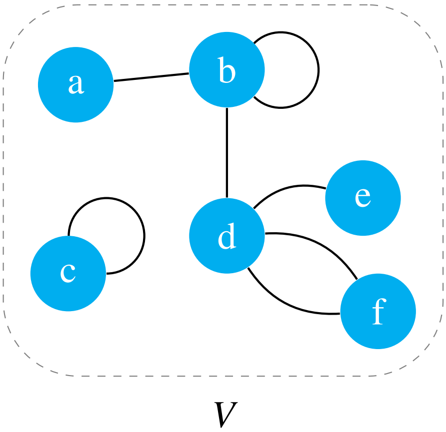
いろいろ

- $u, v \in V$ について、uv という辺が存在すれば u と v は **隣接**するという。また、u と v は辺 uv に **接続**するという。
- 同じ頂点が辺 $d, e \in E$ に接続しているとき d と e は 隣接すると いう。 (辺の隣接)
- $v \in V$ に接続する辺の数を v の**次数**といい、$d(v)$ と表す。(ループは 2 カウント)
- $d(v) = 1$ である $v \in V$ を**端点** or **葉**、$d(v) = 0$ である $v \in V$ を**孤立点**という。$d(v)$ が偶数あるいは奇数である頂点をそれぞれ**偶頂点**、 という。

いろいろ

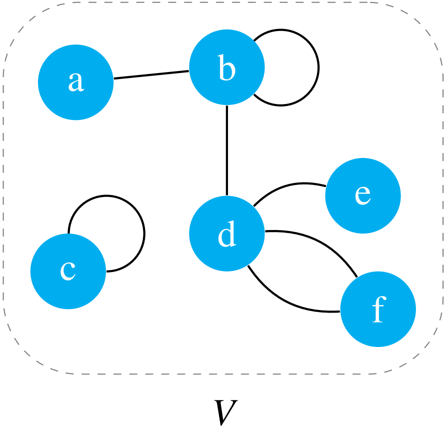
- $u, v \in V$ について、uv という辺が存在すれば u と v は **隣接**するという。また、u と v は辺 uv に **接続**するという。
- 同じ頂点が辺 $d, e \in E$ に接続しているとき d と e は 隣接するという。 (辺の隣接)
- $v \in V$ に接続する辺の数を v の**次数**といい、$d(v)$ と表す。(ループは 2 カウント)
- $d(v) = 1$ である $v \in V$ を**端点** or **葉**、$d(v) = 0$ である $v \in V$ を**孤立点**という。$d(v)$ が偶数あるいは奇数である頂点をそれぞれ**偶頂点**、**奇頂点**という。

練習



- 各頂点の次数を求めよ。
- 頂点 d に隣接する頂点を答えよ。
- 孤立点があれば答えよ。
- 端点があれば答えよ。
- 偶頂点・奇頂点をすべて挙げよ。

練習

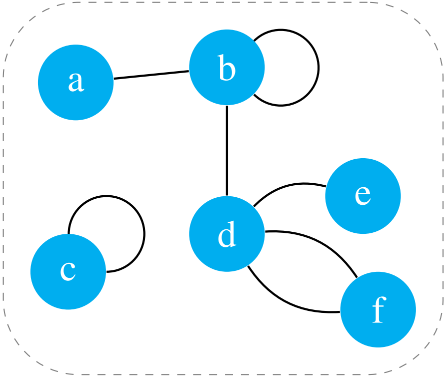


- 各頂点の次数を求めよ。

  $d(a) = 1$, $d(b) = 4$, $d(c) = 2$, $d(d) = 4$, $d(e) = 1$, $d(f) = 2$

- 頂点 d に隣接する頂点を答えよ。
- 孤立点があれば答えよ。
- 端点があれば答えよ。
- 偶頂点・奇頂点をすべて挙げよ。

練習



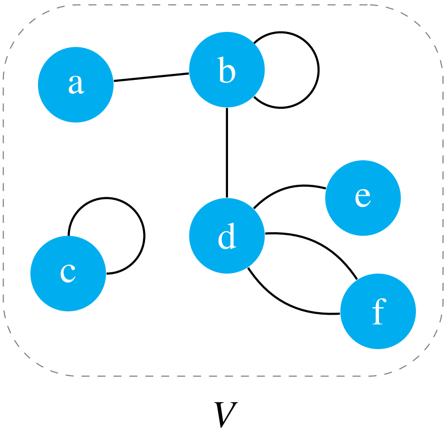
V

- 各頂点の次数を求めよ。

  $d(a) = 1$, $d(b) = 4$, $d(c) = 2$, $d(d) = 4$, $d(e) = 1$, $d(f) = 2$

- 頂点 d に隣接する頂点を答えよ。 b, e, f
- 孤立点があれば答えよ。
- 端点があれば答えよ。
- 偶頂点・奇頂点をすべて挙げよ。

練習

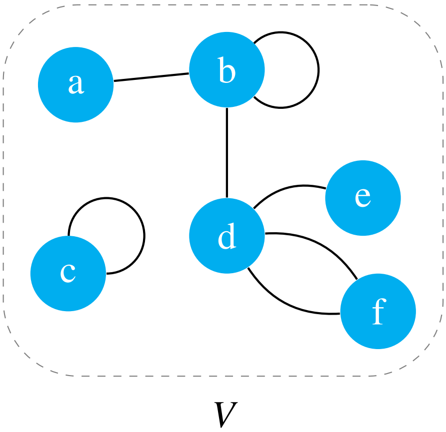


- 各頂点の次数を求めよ。

  $d(a) = 1$, $d(b) = 4$, $d(c) = 2$, $d(d) = 4$, $d(e) = 1$, $d(f) = 2$

- 頂点 d に隣接する頂点を答えよ。 b, e, f
- 孤立点があれば答えよ。 ない
- 端点があれば答えよ。
- 偶頂点・奇頂点をすべて挙げよ。

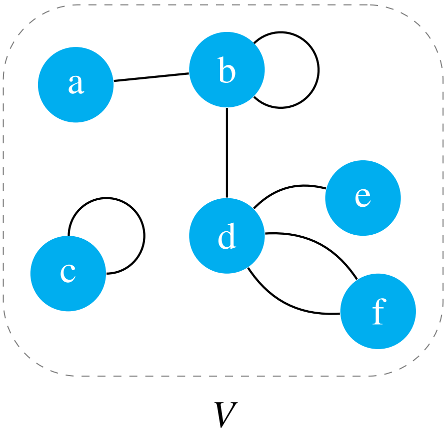
練習



- 各頂点の次数を求めよ。

  $d(a) = 1$, $d(b) = 4$, $d(c) = 2$, $d(d) = 4$, $d(e) = 1$, $d(f) = 2$
- 頂点 d に隣接する頂点を答えよ。 b, e, f
- 孤立点があれば答えよ。 ない
- 端点があれば答えよ。 a, e
- 偶頂点・奇頂点をすべて挙げよ。

練習



- 各頂点の次数を求めよ。
  $d(a) = 1$, $d(b) = 4$, $d(c) = 2$, $d(d) = 4$, $d(e) = 1$, $d(f) = 2$
- 頂点 d に隣接する頂点を答えよ。 b, e, f
- 孤立点があれば答えよ。 ない
- 端点があれば答えよ。 a, e
- 偶頂点・奇頂点をすべて挙げよ。 偶頂点: b, c, d, f　奇頂点: a, e

用語について

グラフ理論の用語は混沌としています。

頂点 (vertex)

- 節点 (node) ということもある。
- 木の端点のことを葉 (leaf) ということもある。

辺 (edge)

- 木の辺のことを枝ということもある。

順番変ですが木については後述。

定理 (握手補題)

は　　　　　　である。

$$=$$

次数が奇数である頂点は　　個存在する。

定理 (握手補題)

頂点の**次数の総和**は　　　　　　　　である。

$$\sum_{v \in V} d(v) =$$

次数が奇数である頂点は　　個存在する。

頂点の**次数の総和**は 辺の数の 2 倍である。

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

次数が奇数である頂点は　　個存在する。

定理 (握手補題)

頂点の**次数の総和**は 辺の数の 2 倍である。

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|E|$$

そりゃそうだ。

次数が奇数である頂点は　　　個存在する。

定理 (握手補題)

頂点の**次数の総和**は 辺の数の 2 倍である。

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|E|$$

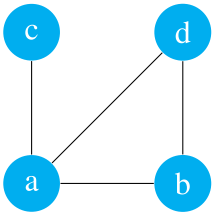
そりゃそうだ。

次数が奇数である頂点は **偶数**個存在する。

定理クイズ

単純グラフ$G = (V, E)$について答えよ。

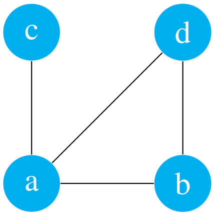
1. $|V| = n$ のとき、$v \in V$ の次数は高々　　　　である。
2. $|V| = n$ のとき、$|E|$ は高々　　　　　　　　である。



定理クイズ

単純グラフ$G = (V, E)$について答えよ。

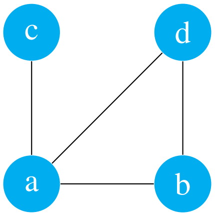
1. $|V| = n$のとき、$v \in V$の次数は高々$n-1$である。
2. $|V| = n$のとき、$|E|$は高々　　　　　　である。



定理クイズ

単純グラフ$G = (V, E)$について答えよ。

1. $|V| = n$ のとき、$v \in V$ の次数は高々 $n-1$である。
2. $|V| = n$ のとき、$|E|$ は高々 ${}_n\mathrm{C}_2 = \frac{n(n-1)}{2}$である。



同型グラフ

代数系の同型写像と本質的には同じ話

$G_1 = (V_1, E_1)$ と $G_2 = (V_2, E_2)$ を考える。$\forall u, v \in V_1$ に対して、

なる全単射写像 $f\colon V_1 \to V_2$ が存在するならば G_1 と G_2 は**同型**であるといい、　　　　と書く。

まあ要するに難しいことは考えず、グラフの接続構造が同じものは同型なグラフである、ということです。

同型グラフ

代数系の同型写像と本質的には同じ話

$G_1 = (V_1, E_1)$ と $G_2 = (V_2, E_2)$ を考える。$\forall u, v \in V_1$ に対して、

$$(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_2$$

なる全単射写像 $f\colon V_1 \to V_2$ が存在するならば G_1 と G_2 は**同型**であるといい、 と書く。

まあ要するに難しいことは考えず、グラフの接続構造が同じものは同型なグラフである、ということです。

同型グラフ

代数系の同型写像と本質的には同じ話

$G_1 = (V_1, E_1)$ と $G_2 = (V_2, E_2)$ を考える。$\forall u, v \in V_1$ に対して、

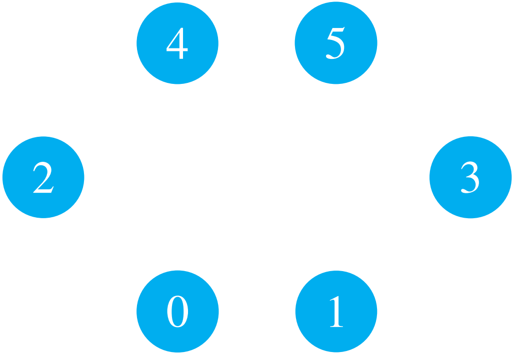
$$(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_2$$

なる全単射写像 $f : V_1 \to V_2$ が存在するならば G_1 と G_2 は**同型**であるといい、$G_1 \cong G_2$と書く。

まあ要するに難しいことは考えず、グラフの接続構造が同じものは同型なグラフである、ということです。

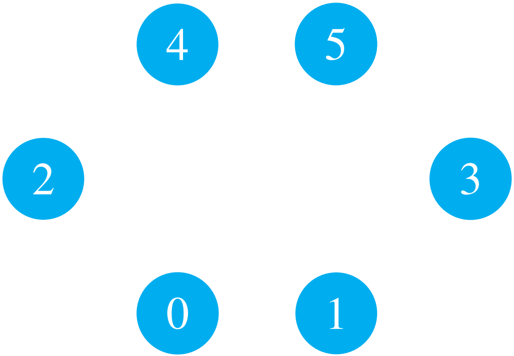
完全グラフ

- 任意の 2 頂点が隣接するグラフを**完全グラフ**という。
- 頂点数が n の完全グラフを　と書く。
- すべての頂点の次数が等しいグラフを**正則グラフ**という。



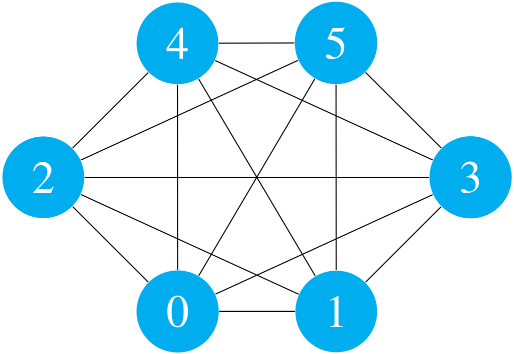
完全グラフ

- 任意の 2 頂点が隣接するグラフを**完全グラフ**という。
- 頂点数が n の完全グラフを K_n と書く。
- すべての頂点の次数が等しいグラフを**正則グラフ**という。



完全グラフ

- 任意の 2 頂点が隣接するグラフを**完全グラフ**という。
- 頂点数が n の完全グラフをK_nと書く。
- すべての頂点の次数が等しいグラフを**正則グラフ**という。



K_6 の例

- $G = (V, E)$ において、V が互いに素な部分集合 V_1 と V_2 に分割でき、すべての辺が V_1 と V_2 の頂点を結ぶものを　　　　という。
- さらに V_1 と V_2 の頂点が互いにすべて隣接している場合、　　　　　　といい、　　　で表す。
  $(m = |V_1|, n = |V_2|)$

$K_{3,4}$ の例

ものごとの「割り当て」を表すのに便利な【2 部グラフ】

- $G = (V, E)$ において、V が互いに素な部分集合 V_1 と V_2 に分割でき、すべての辺が V_1 と V_2 の頂点を結ぶものを **2 部グラフ**という。
- さらに V_1 と V_2 の頂点が互いにすべて隣接している場合、　　　　　　といい、　　で表す。
  $(m = |V_1|, n = |V_2|)$

$K_{3,4}$ の例

ものごとの「割り当て」を表すのに便利な【2部グラフ】

- $G = (V, E)$ において、V が互いに素な部分集合 V_1 と V_2 に分割でき、すべての辺が V_1 と V_2 の頂点を結ぶものを**2部グラフ**という。
- さらに V_1 と V_2 の頂点が互いにすべて隣接している場合、**完全2部グラフ**といい、　で表す。
  $(m = |V_1|, n = |V_2|)$

$K_{3,4}$ の例

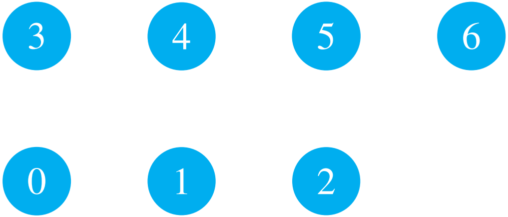
ものごとの「割り当て」を表すのに便利な【2 部グラフ】

- $G = (V, E)$ において、V が互いに素な部分集合 V_1 と V_2 に分割でき、すべての辺が V_1 と V_2 の頂点を結ぶものを **2 部グラフ**という。
- さらに V_1 と V_2 の頂点が互いにすべて隣接している場合、**完全 2 部グラフ**といい、$K_{m,n}$ で表す。
  $(m = |V_1|, n = |V_2|)$

$K_{3,4}$ の例

ものごとの「割り当て」を表すのに便利な【2 部グラフ】

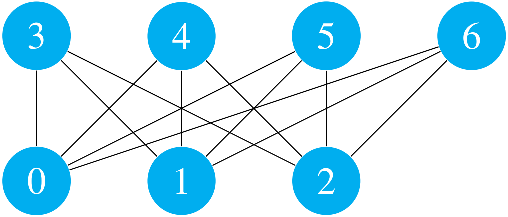
- $G = (V, E)$ において、V が互いに素な部分集合 V_1 と V_2 に分割でき、すべての辺が V_1 と V_2 の頂点を結ぶものを **2 部グラフ**という。
- さらに V_1 と V_2 の頂点が互いにすべて隣接している場合、**完全 2 部グラフ**といい、$K_{m,n}$で表す。
  $(m = |V_1|, n = |V_2|)$



$K_{3,4}$ の例

ものごとの「割り当て」を表すのに便利な【2 部グラフ】

- $G = (V, E)$ において、V が互いに素な部分集合 V_1 と V_2 に分割でき、すべての辺が V_1 と V_2 の頂点を結ぶものを **2 部グラフ**という。
- さらに V_1 と V_2 の頂点が互いにすべて隣接している場合、**完全 2 部グラフ**といい、$K_{m,n}$ で表す。
  $(m = |V_1|, n = |V_2|)$



$K_{3,4}$ の例

頂点から頂点への “経路”

- **walk**: 系列 $v_0, e_1, v_1, e_1, \cdots, e_n, v_n$ を　　　という。
- v_0 を**始点**, v_n を**終点**、含まれる辺の数を (経路の)**長さ**という。
- **trail**: 　　　のうち、$i \neq j$ ならば $e_i \neq e_j$ なものを　　　という。
- **path**: 　　　のうち、$i \neq j$ ならば $v_i \neq v_j$ なものを　　という。

※ ただし文献によって言葉にゆらぎがある。(例: 道を「単純道」と言ったり、いやそうではなく道は「初頭道」で小道が「単純道」としたり複雑。要するに、辺の重複を認めないものと頂点の重複を認めないものに分ける、ということ。)

任意の 2 点間に　　　が存在するグラフを　　　　　という。

頂点から頂点への "経路"

- **walk**: 系列 $v_0, e_1, v_1, e_1, \cdots, e_n, v_n$ を **経路**という。
- v_0 を**始点**, v_n を**終点**、含まれる辺の数を (経路の)**長さ**という。
- **trail**: **経路**のうち、$i \neq j$ ならば $e_i \neq e_j$ なものを という。
- **path**: **経路**のうち、$i \neq j$ ならば $v_i \neq v_j$ なものを という。

※ ただし文献によって言葉にゆらぎがある。(例: 道を「単純道」と言ったり、いやそうではなく道は「初頭道」で小道が「単純道」としたり複雑。要するに、辺の重複を認めないものと頂点の重複を認めないものに分ける、ということ。)

任意の 2 点間に **経路** が存在するグラフを という。

頂点から頂点への “経路”

- **walk**: 系列 $v_0, e_1, v_1, e_1, \cdots, e_n, v_n$ を **経路**という。
- v_0 を**始点**, v_n を**終点**、含まれる辺の数を (経路の)**長さ**という。
- **trail**: **経路**のうち、$i \neq j$ ならば $e_i \neq e_j$ なものを **小道**という。
- **path**: **経路**のうち、$i \neq j$ ならば $v_i \neq v_j$ なものを　　という。

※ ただし文献によって言葉にゆらぎがある。(例: 道を「単純道」と言ったり、いやそうではなく道は「初頭道」で小道が「単純道」としたり複雑。要するに、辺の重複を認めないものと頂点の重複を認めないものに分ける、ということ。)

任意の 2 点間に **経路** が存在するグラフを　　　　　という。

頂点から頂点への "経路"

- **walk**: 系列 $v_0, e_1, v_1, e_1, \cdots, e_n, v_n$ を **経路**という。
- v_0 を**始点**, v_n を**終点**、含まれる辺の数を (経路の)**長さ**という。
- **trail**: **経路**のうち、$i \neq j$ ならば $e_i \neq e_j$ なものを **小道**という。
- **path**: **経路**のうち、$i \neq j$ ならば $v_i \neq v_j$ なものを **道**という。

※ ただし文献によって言葉にゆらぎがある。(例: 道を「単純道」と言ったり、いやそうではなく道は「初頭道」で小道が「単純道」としたり複雑。要するに、辺の重複を認めないものと頂点の重複を認めないものに分ける、ということ。)

任意の 2 点間に **経路** が存在するグラフを　　　　　　という。

頂点から頂点への "経路"

- **walk**: 系列 $v_0, e_1, v_1, e_1, \cdots, e_n, v_n$ を **経路**という。
- v_0 を**始点**, v_n を**終点**、含まれる辺の数を (経路の)**長さ**という。
- **trail**: **経路**のうち、$i \neq j$ ならば $e_i \neq e_j$ なものを **小道**という。
- **path**: **経路**のうち、$i \neq j$ ならば $v_i \neq v_j$ なものを **道**という。

※ ただし文献によって言葉にゆらぎがある。(例: 道を「単純道」と言ったり、いやそうではなく道は「初頭道」で小道が「単純道」としたり複雑。要するに、辺の重複を認めないものと頂点の重複を認めないものに分ける、ということ。)

任意の 2 点間に **経路** が存在するグラフを**連結グラフ**という。

閉路

- 始点と終点が等しい経路を (cycle, circuit) という。
- その中でも特に、始点と終点以外に同じ頂点が 2 度出ないものを (simple cycle) という。
- 長さが n の を という。

閉路

- 始点と終点が等しい経路を**閉路** (cycle, circuit) という。
- その中でも特に、始点と終点以外に同じ頂点が 2 度出ないものを (simple cycle) という。
- 長さが n の 閉路を という。

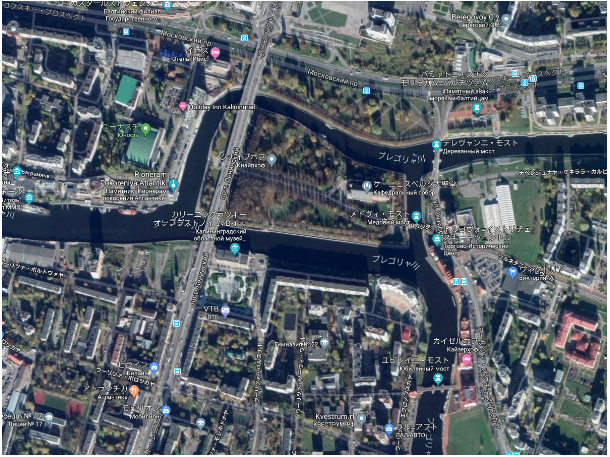
閉路

- 始点と終点が等しい経路を**閉路** (cycle, circuit) という。
- その中でも特に、始点と終点以外に同じ頂点が 2 度出ないものを **単純閉路** (simple cycle) という。
- 長さが n の 閉路を　　　　　という。

閉路

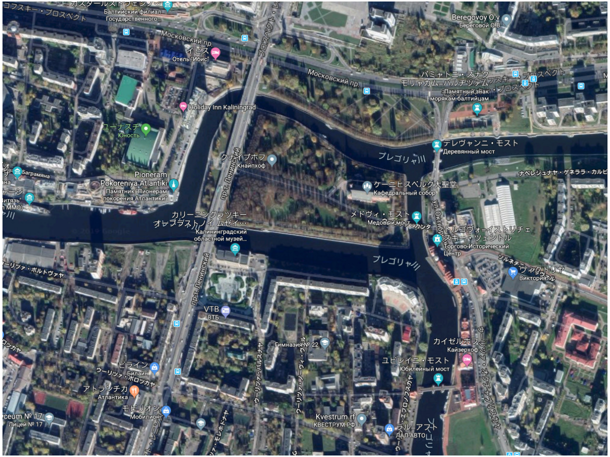
- 始点と終点が等しい経路を**閉路** (cycle, circuit) という。
- その中でも特に、始点と終点以外に同じ頂点が 2 度出ないものを **単純閉路** (simple cycle) という。
- 長さが n の 閉路を n-閉路という。

Königsberg (現在の Калининград(露)) の橋問題



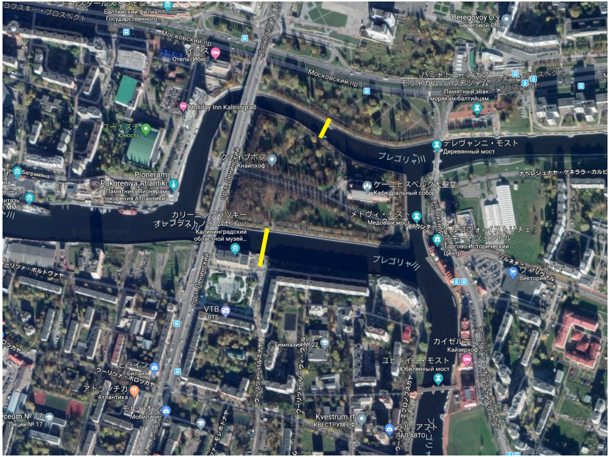
航空写真データ: `https://maps.google.com`, 古地図: `https://commons.wikimedia.org`

Königsberg (現在の Калининград(露)) の橋問題



航空写真データ: `https://maps.google.com`, 古地図: `https://commons.wikimedia.org`

Königsberg (現在の Калининград(露)) の橋問題



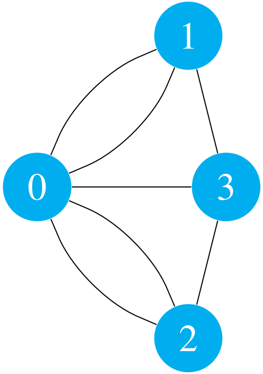
航空写真データ: `https://maps.google.com`, 古地図: `https://commons.wikimedia.org`

Königsberg (現在の Калининград(露)) の橋問題

同じ橋を二度通らずにすべて渡って元の場所に戻ってこられるか?

航空写真データ: `https://maps.google.com`, 古地図: `https://commons.wikimedia.org`

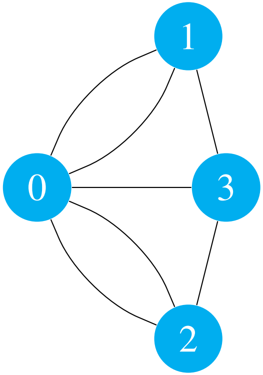
- すべての辺を含む小道があればそれを　　　　　　　　　　という。(要するに一筆書きルート)
- それが閉路なら　　　　　　　　　　という。(要するに閉じた一筆書き)
- そのような閉路を持つグラフを　　　　　　　　　　という。



Euler グラフ

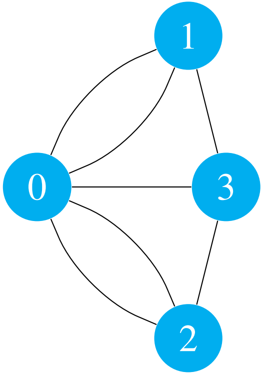
Königsberg の橋問題を解く

- すべての辺を含む小道があればそれを**オイラートレイル**という。(要するに一筆書きルート)
- それが閉路なら　　　　　　　　という。(要するに閉じた一筆書き)
- そのような閉路を持つグラフを　　　　　　　　という。

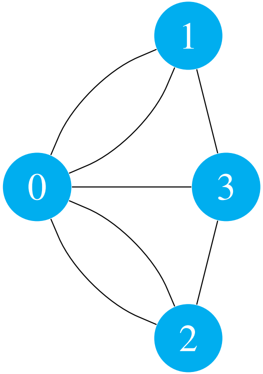


Euler グラフ
Königsberg の橋問題を解く

- すべての辺を含む小道があればそれを**オイラートレイル**という。(要するに一筆書きルート)
- それが閉路なら**オイラー閉路**という。(要するに閉じた一筆書き)
- そのような閉路を持つグラフをという。



- すべての辺を含む小道があればそれを**オイラートレイル**という。(要するに一筆書きルート)
- それが閉路なら**オイラー閉路**という。(要するに閉じた一筆書き)
- そのような閉路を持つグラフを**オイラーグラフ**という。



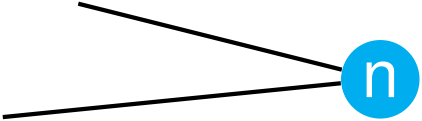
G が Euler グラフ $\Rightarrow$ すべての頂点の次数は偶数

こっちは当たり前。

オイラー閉路で一筆書きする様子を考えると、ある頂点について、**ある辺から入ったら (次数 +1)、必ず別の辺から出る (次数 +1)** ので、次数は必ず偶数。

G が Euler グラフ $\Rightarrow$ すべての頂点の次数は偶数

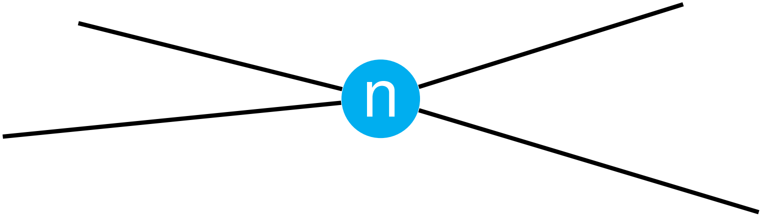
こっちは当たり前。



オイラー閉路で一筆書きする様子を考えると、ある頂点について、
ある辺から入ったら (次数 +1)、必ず別の辺から出る (次数 +1)ので、
次数は必ず偶数。

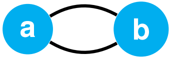
G が Euler グラフ $\Rightarrow$ すべての頂点の次数は偶数

こっちは当たり前。

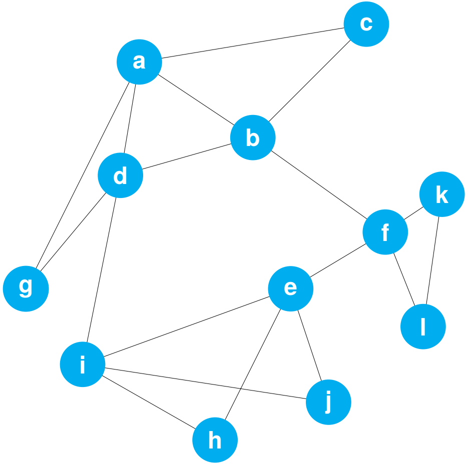


オイラー閉路で一筆書きする様子を考えると、ある頂点について、**ある辺から入ったら (次数 +1)、必ず別の辺から出る (次数 +1)**ので、次数は必ず偶数。

こっちはそれほど自明ではない。

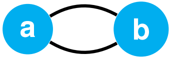
1. 辺の数が 2 のグラフについてこの命題は真。


2. 辺の数が n 以下でも真だとする。
3. 辺の数が $n+1$ の（すべての頂点の次数が偶数の）グラフ G を考える。
4. G の中の何でもいいから閉路 C を考える。
5. $G \backslash C = \cup_i H_i$ とする。仮定より H_i はオイラーグラフである。
6. C の適当な頂点から出発して、H_i の回り道をしながら C を一回りすることが可能！

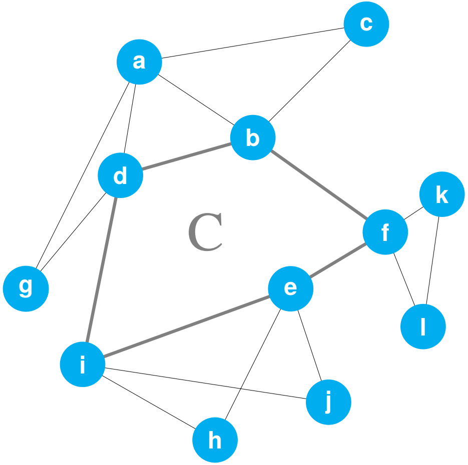


G が Euler グラフ $\Leftarrow$ すべての頂点の次数は偶数

こっちはそれほど自明ではない。

1. 辺の数が 2 のグラフについてこの命題は真。


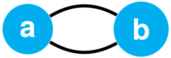
2. 辺の数が n 以下でも真だとする。
3. 辺の数が $n+1$ の（すべての頂点の次数が偶数の）グラフ G を考える。
4. G の中の何でもいいから閉路 C を考える。
5. $G \backslash C = \cup_i H_i$ とする。仮定より H_i はオイラーグラフである。
6. C の適当な頂点から出発して、H_i の回り道をしながら C を一回りすることが可能！



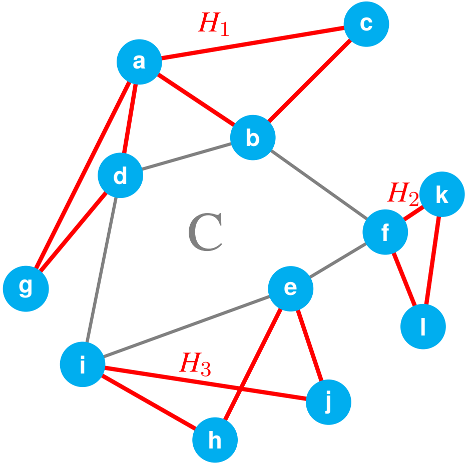
G が Euler グラフ $\Leftarrow$ すべての頂点の次数は偶数

こっちはそれほど自明ではない。

1. 辺の数が 2 のグラフについてこの命題は真。



2. 辺の数が n 以下でも真だとする。
3. 辺の数が $n+1$ の（すべての頂点の次数が偶数の）グラフ G を考える。
4. G の中の何でもいいから閉路 C を考える。
5. $G \backslash C = \cup_i H_i$ とする。仮定より H_i はオイラーグラフである。
6. C の適当な頂点から出発して、H_i の回り道をしながら C を一回りすることが可能！



$G = (V, E)$ は Euler グラフか?

結局 Königsberg はどうなのよ？

連結グラフ G がオイラーグラフである必要十分条件は **すべての** **の** **が** であることである。

連結グラフ G がオイラートレイルを持つ（ひと筆書きできる）必要十分条件は **の** **が** [a] であることである。

[a]奇頂点数は偶数だったので『2 以下』を『0 もしくは 2』と読み替えても良い。

$G=(V,E)$ は Euler グラフか?

結局 Königsberg はどうなのよ？

連結グラフ G がオイラーグラフである必要十分条件は **すべての 頂点の　　が　　** であることである。

連結グラフ G がオイラートレイルを持つ（ひと筆書きできる）必要十分条件は　　　**の　が**　　[a] であることである。

[a] 奇頂点数は偶数だったので『2 以下』を『0 もしくは 2』と読み替えても良い。

$G = (V, E)$ は Euler グラフか?

結局 Königsberg はどうなのよ？

連結グラフ G がオイラーグラフである必要十分条件は **すべての 頂点の 次数が** であることである。

連結グラフ G がオイラートレイルを持つ（ひと筆書きできる）必要十分条件は **の が** [a] であることである。

[a] 奇頂点数は偶数だったので『2 以下』を『0 もしくは 2』と読み替えても良い。

$G = (V, E)$ は Euler グラフか?

結局 Königsberg はどうなのよ？

連結グラフ G がオイラーグラフである必要十分条件は **すべての 頂点の 次数が 偶数** であることである。

連結グラフ G がオイラートレイルを持つ（ひと筆書きできる）必要十分条件は **の が** [a] であることである。

[a] 奇頂点数は偶数だったので『2 以下』を『0 もしくは 2』と読み替えても良い。

$G = (V, E)$ は Euler グラフか?

結局 Königsberg はどうなのよ？

連結グラフ G がオイラーグラフである必要十分条件は **すべての 頂点の 次数が 偶数** であることである。

連結グラフ G がオイラートレイルを持つ（ひと筆書きできる）必要十分条件は **奇頂点の　が**　[a]であることである。

[a] 奇頂点数は偶数だったので『2 以下』を『0 もしくは 2』と読み替えても良い。

$G = (V, E)$ は Euler グラフか?

結局 Königsberg はどうなのよ？

連結グラフ G がオイラーグラフである必要十分条件は **すべての 頂点の 次数が 偶数** であることである。

連結グラフ G がオイラートレイルを持つ（ひと筆書きできる）必要十分条件は **奇頂点の 数が** [a] であることである。

[a] 奇頂点数は偶数だったので『2 以下』を『0 もしくは 2』と読み替えても良い。

$G=(V,E)$ は Euler グラフか?
結局 Königsberg はどうなのよ？

連結グラフ G がオイラーグラフである必要十分条件は **すべての 頂点の 次数が 偶数** であることである。

連結グラフ G がオイラートレイルを持つ（ひと筆書きできる）必要十分条件は **奇頂点の 数が 2 以下**[a] であることである。

[a] 奇頂点数は偶数だったので『2 以下』を『0 もしくは 2』と読み替えても良い。

木

木 (tree)

連結で閉路を含まないグラフ。（任意の頂点間に経路が唯一存在するグラフ。）

クイズ:
$G = (V, E)$ が木のとき、$|V|$ と $|E|$ の間の関係を求めよ。

$$|V| =$$

木

木 (tree)

連結で閉路を含まないグラフ。（任意の頂点間に経路が唯一存在するグラフ。）

クイズ:
$G = (V, E)$ が木のとき、$|V|$ と $|E|$ の間の関係を求めよ。

$$|V| = |E| + 1$$

全域木

全域木

$G = (V, E)$ の部分グラフ $G' = (V', E')$ で $V' = V$ かつ木であるもの

クイズ:
任意の連結グラフに全域木は存在するか?

全域木

$G = (V, E)$ の部分グラフ $G' = (V', E')$ で $V' = V$ かつ木であるもの

クイズ:
任意の連結グラフに全域木は存在するか?

yes (木になるまで閉路から一本ずつ枝を抜けば作れる)

二分木 (binary tree)

二分木

- 根 (root) という頂点から開始する有向グラフ。
- 根の先には 0〜2 本の枝 (辺) があり、別の二分木の根が接続している。

……という説明で、イメージ湧きますか?

- 根を 0 として一つ進むごとにカウントアップする値をその頂点の**レベル**という。
- ある木の頂点の最大レベル数 +1 をその木の**深さ (高さ)**と言う。
- 頂点に値を持たせて DB として使うと便利。(検索・挿入・削除が速い!)

mini Q. 頂点数 n の木で最も浅いものの深さはいくつか?

二分木 (binary tree)

二分木

- 根 (root) という頂点から開始する有向グラフ。
- 根の先には 0〜2 本の枝 (辺) があり、別の二分木の根が接続している。

……という説明で、イメージ湧きますか?

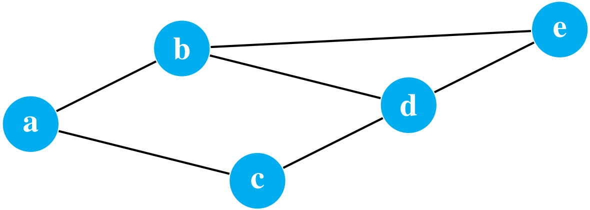
- 根を 0 として一つ進むごとにカウントアップする値をその頂点の**レベル**という。
- ある木の頂点の最大レベル数 +1 をその木の**深さ (高さ)**と言う。
- 頂点に値を持たせて DB として使うと便利。(検索・挿入・削除が速い!)

mini Q. 頂点数 n の木で最も浅いものの深さはいくつか?

A. $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

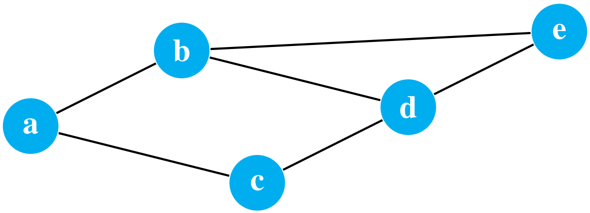
平面グラフ

- グラフ G を平面に描いたときに、辺が交差しない、もしくはそのような同型グラフが存在する場合、G を　　　　　　　という。
- G で分割された平面の領域を　　　　　　という。(下図は面数 3 の例)
- 辺で囲まれた部分を**内面**、そうでない部分 (1 箇所) を**外面**と言う。
- (例)K_4 は　　　　　　　　だが K_5 は違う。



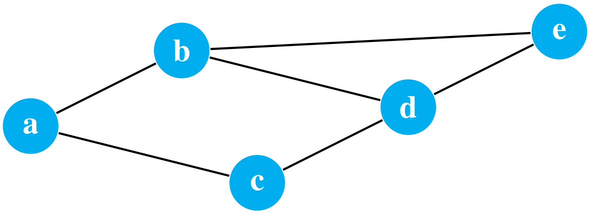
平面グラフ

- グラフ G を平面に描いたときに、辺が交差しない、もしくはそのような同型グラフが存在する場合、G を**平面グラフ**という。
- G で分割された平面の領域を　　　という。(下図は面数 3 の例)
- 辺で囲まれた部分を**内面**、そうでない部分 (1 箇所) を**外面**と言う。
- (例)K_4 は平面グラフだが K_5 は違う。



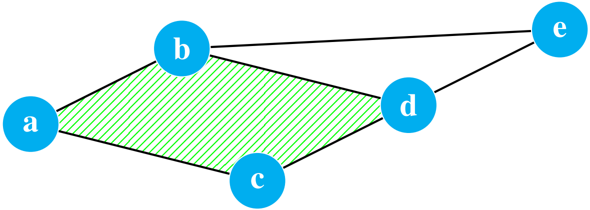
平面グラフ

- グラフ G を平面に描いたときに、辺が交差しない、もしくはそのような同型グラフが存在する場合、G を**平面グラフ**という。
- G で分割された平面の領域を**面** (face)という。(下図は面数 3 の例)
- 辺で囲まれた部分を**内面**、そうでない部分 (1 箇所) を**外面**と言う。
- (例)K_4 は平面グラフだが K_5 は違う。



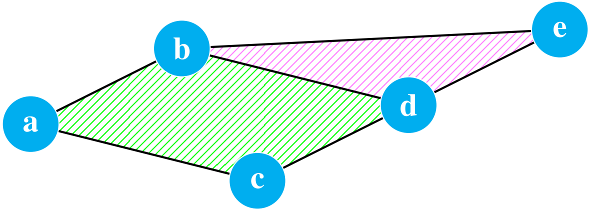
平面グラフ

- グラフ G を平面に描いたときに、辺が交差しない、もしくはそのような同型グラフが存在する場合、G を**平面グラフ**という。
- G で分割された平面の領域を**面** (face)という。(下図は面数 3 の例)
- 辺で囲まれた部分を**内面**、そうでない部分 (1 箇所) を**外面**と言う。
- (例)K_4 は平面グラフだが K_5 は違う。



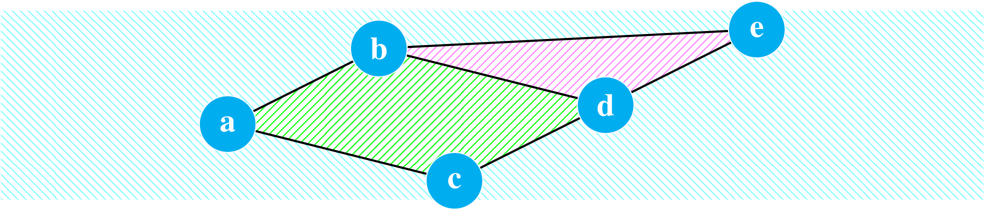
平面グラフ

- グラフ G を平面に描いたときに、辺が交差しない、もしくはそのような同型グラフが存在する場合、G を**平面グラフ**という。
- G で分割された平面の領域を**面** (face) という。(下図は面数 3 の例)
- 辺で囲まれた部分を**内面**、そうでない部分 (1 箇所) を**外面**と言う。
- (例)K_4 は平面グラフだが K_5 は違う。



平面グラフ

- グラフ G を平面に描いたときに、辺が交差しない、もしくはそのような同型グラフが存在する場合、G を**平面グラフ**という。
- G で分割された平面の領域を**面** (face)という。(下図は面数 3 の例)
- 辺で囲まれた部分を**内面**、そうでない部分 (1 箇所) を**外面**と言う。
- (例)K_4 は平面グラフだが K_5 は違う。



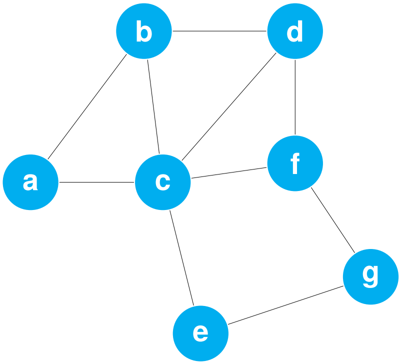
オイラーの多面体公式 (オイラー・ポアンカレ特性式)

連結な**平面グラフ**$G = (V, E)$ の面集合を F とするとき以下が成り立つ。(オイラーの多面体公式)

$$|V| + |F| = |E| + 2$$

Q: 簡単に証明せよ。(ヒント: 全域木を使う。)

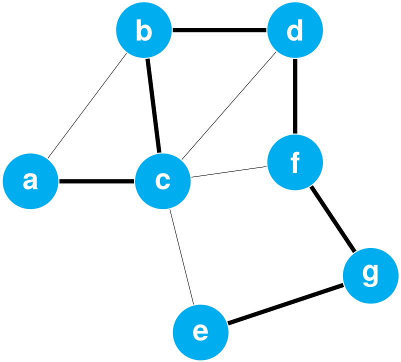
オイラーの多面体公式説明之圖



1. 平面グラフから辺を抜いていって連結木にする。

5. 故に $|V| + |F| = |E| + 2$。

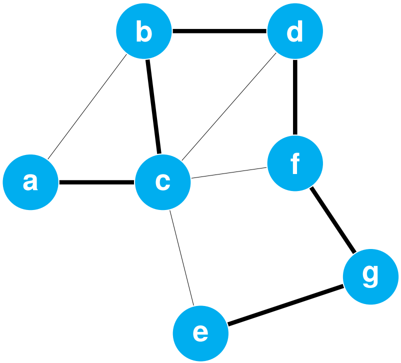
オイラーの多面体公式説明之圖



1. 平面グラフから辺を抜いていって連結木にする。

5. 故に $|V| + |F| = |E| + 2$。

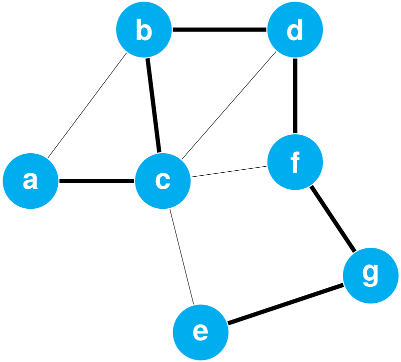
オイラーの多面体公式説明之圖



1. 平面グラフから辺を抜いていって連結木にする。
2. このときの頂点数 $|V|$ と辺数 $|E|$ の間には $|V| = |E| + 1$ の関係がある。(覚えてる?)

5. 故に $|V| + |F| = |E| + 2$。

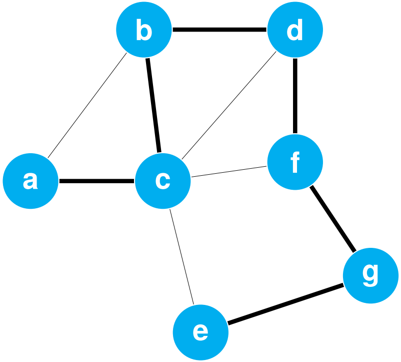
オイラーの多面体公式説明之圖



1. 平面グラフから辺を抜いていって連結木にする。
2. このときの頂点数 $|V|$ と辺数 $|E|$ の間には $|V| = |E| + 1$ の関係がある。(覚えてる?)
3. そして面数 $|F|$ は（当然）1。

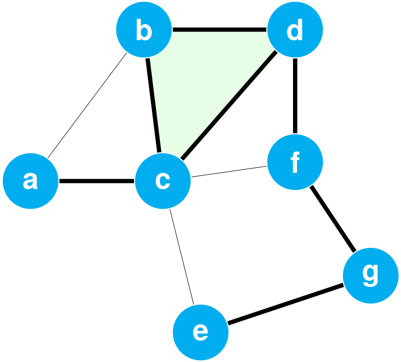
5. 故に $|V| + |F| = |E| + 2$。

オイラーの多面体公式説明之圖



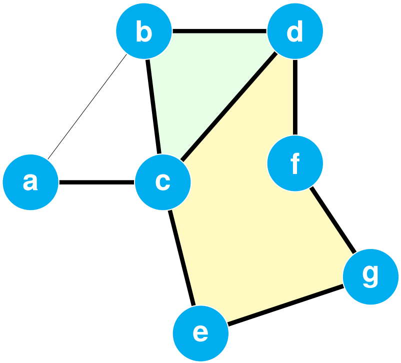
1. 平面グラフから辺を抜いていって連結木にする。
2. このときの頂点数 $|V|$ と辺数 $|E|$ の間には $|V| = |E| + 1$ の関係がある。(覚えてる?)
3. そして面数 $|F|$ は（当然）1。
4. 辺 $|E|$ を 1 増やす毎に面 $|F|$ が 1 増える。
5. 故に $|V| + |F| = |E| + 2$。

オイラーの多面体公式説明之圖



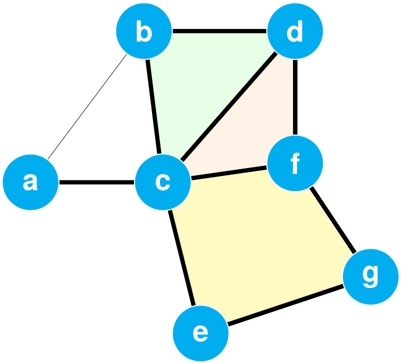
1. 平面グラフから辺を抜いていって連結木にする。
2. このときの頂点数 $|V|$ と辺数 $|E|$ の間には $|V| = |E| + 1$ の関係がある。(覚えてる?)
3. そして面数 $|F|$ は（当然）1。
4. 辺 $|E|$ を 1 増やす毎に面 $|F|$ が 1 増える。
5. 故に $|V| + |F| = |E| + 2$。

オイラーの多面体公式説明之圖



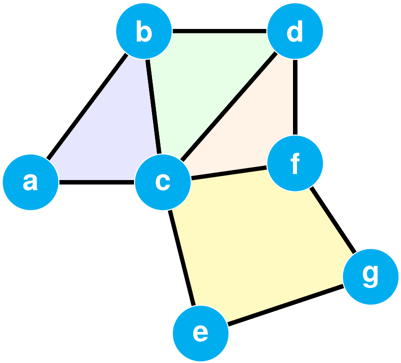
1. 平面グラフから辺を抜いていって連結木にする。
2. このときの頂点数 $|V|$ と辺数 $|E|$ の間には $|V| = |E| + 1$ の関係がある。(覚えてる?)
3. そして面数 $|F|$ は（当然）1。
4. 辺 $|E|$ を 1 増やす毎に面 $|F|$ が 1 増える。
5. 故に $|V| + |F| = |E| + 2$。

オイラーの多面体公式説明之圖



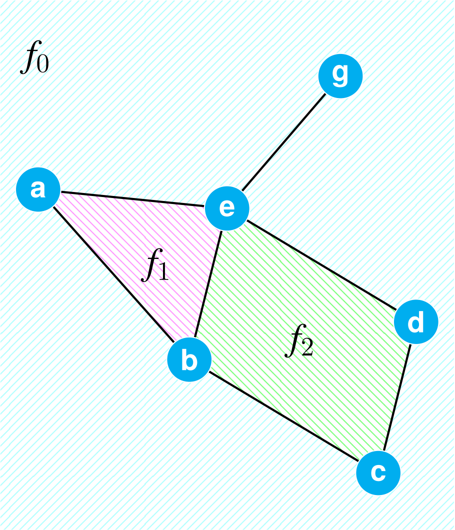
1. 平面グラフから辺を抜いていって連結木にする。
2. このときの頂点数 $|V|$ と辺数 $|E|$ の間には $|V| = |E| + 1$ の関係がある。(覚えてる?)
3. そして面数 $|F|$ は（当然）1。
4. 辺 $|E|$ を 1 増やす毎に面 $|F|$ が 1 増える。
5. 故に $|V| + |F| = |E| + 2$。

オイラーの多面体公式説明之圖



1. 平面グラフから辺を抜いていって連結木にする。
2. このときの頂点数 $|V|$ と辺数 $|E|$ の間には $|V| = |E| + 1$ の関係がある。(覚えてる?)
3. そして面数 $|F|$ は（当然）1。
4. 辺 $|E|$ を 1 増やす毎に面 $|F|$ が 1 増える。
5. 故に $|V| + |F| = |E| + 2$。

平面グラフの辺の数 (はけっこう少ないという話)

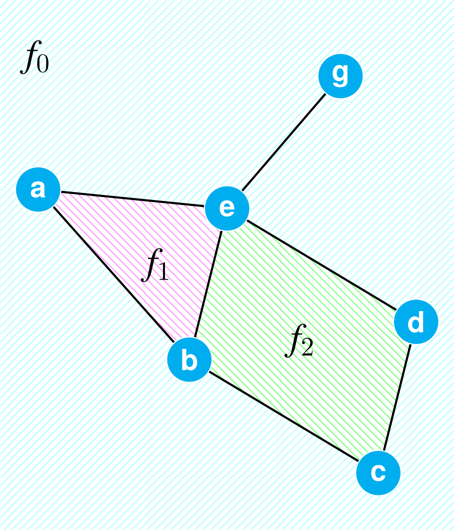


1. $G=(V,E)$, $F=\{f_0,f_1,\cdots\}$, 内面が 1 つ以上あるとする。
2. $X=\{(f,e)\mid f$は面, eはfに接する辺$\}$ とする。
3. **面は少なくとも 3 つ以上の辺に囲まれている**ので（《面》1 枚につき《面辺ペア》が少なくとも 3 組は作れるので）
4. **辺は 1 つか 2 つの面に接している**ので（《辺》一本で《面辺ペア》は高々 2 組しか作れないので）
5. オイラーの多面体公式より $|V|+|F|=|E|+2$

$$|E|\le$$

ちなみに平面でない一般のグラフの場合は
$|E|\le {}_{|V|}C_2=\frac{|V|\times(|V|-1)}{2}$ とずいぶん多い。

平面グラフの辺の数 (はけっこう少ないという話)

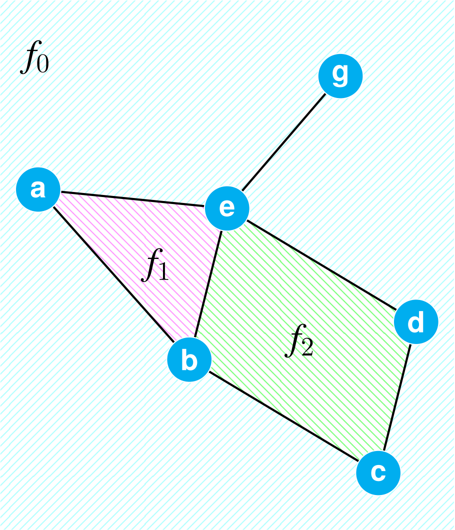


1. $G = (V, E)$, $F = \{f_0, f_1, \cdots\}$, 内面が 1 つ以上あるとする。
2. $X = \{(f, e) \mid f$は面$, e$はfに接する辺$\}$ とする。
3. **面は少なくとも 3 つ以上の辺に囲まれている**ので（《面》1 枚につき《面辺ペア》が少なくとも 3 組は作れるので）
$$3|F| \leq |X|$$
4. **辺は 1 つか 2 つの面に接している**ので（《辺》一本で《面辺ペア》は高々 2 組しか作れないので）
5. オイラーの多面体公式より $|V| + |F| = |E| + 2$

$$|E| \leq$$

ちなみに平面でない一般のグラフの場合は
$|E| \leq {}_{|V|}C_2 = \frac{|V| \times (|V|-1)}{2}$ とずいぶん多い。

平面グラフの辺の数 (はけっこう少ないという話)

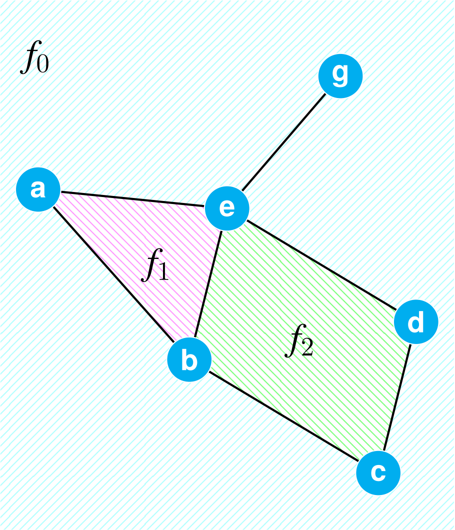


1. $G = (V, E)$, $F = \{f_0, f_1, \cdots\}$, 内面が 1 つ以上あるとする。
2. $X = \{(f, e) \mid f$は面, eはfに接する辺$\}$ とする。
3. **面は少なくとも 3 つ以上の辺に囲まれている**ので（《面》1 枚につき《面辺ペア》が少なくとも 3 組は作れるので）
$$3|F| \leq |X|$$
4. **辺は 1 つか 2 つの面に接している**ので（《辺》一本で《面辺ペア》は高々 2 組しか作れないので） $|X| \leq 2|E|$
5. オイラーの多面体公式より $|V| + |F| = |E| + 2$

$$|E| \leq$$

ちなみに平面でない一般のグラフの場合は
$|E| \leq {}_{|V|}C_2 = \frac{|V| \times (|V| - 1)}{2}$ とずいぶん多い。

平面グラフの辺の数 (はけっこう少ないという話)



1. $G = (V, E)$, $F = \{f_0, f_1, \cdots\}$, 内面が 1 つ以上あるとする。
2. $X = \{(f, e) \mid f$は面, eはfに接する辺$\}$ とする。
3. **面は少なくとも 3 つ以上の辺に囲まれている**ので（《面》1 枚につき《面辺ペア》が少なくとも 3 組は作れるので）
$$3|F| \leq |X|$$
4. **辺は 1 つか 2 つの面に接している**ので（《辺》一本で《面辺ペア》は高々 2 組しか作れないので） $|X| \leq 2|E|$
5. オイラーの多面体公式より $|V| + |F| = |E| + 2$

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

ちなみに平面でない一般のグラフの場合は
$|E| \leq {}_{|V|}C_2 = \frac{|V| \times (|V| - 1)}{2}$ とずいぶん多い。

彩色問題

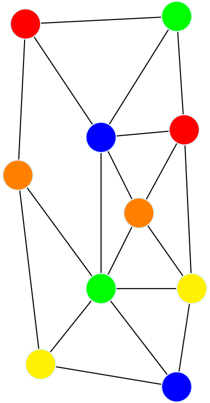
地図の塗り分けのあれ。何色使えばできるかな?

彩色問題

平面グラフで、隣接する面を異なる色で塗るには何色必要か?

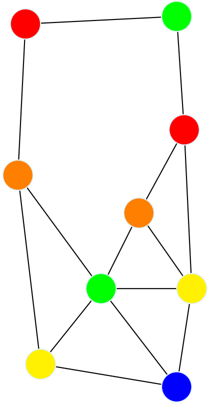
とりあえず 6 色でいけることは理解できる

- 『面 → 頂点』『面の隣接 → 辺』と置き換えた**双対グラフ**(そうたい)を考える。以下、双対グラフの話。
- 平面グラフの辺数は $3|V| - 6$ 以下であるので、握手補題より次数の総和は $6|V| - 12$ 以下、ゆえに平均次数は 6 未満。つまり、**平面グラフには必ず次数が 5 以下の頂点が存在する。**
- ある平面グラフから（必ず存在するはずの）「次数が 5 以下の頂点」を削除する。これ 6-彩色できていたと仮定する。
- ここに今削除した頂点を「戻す」ことを考える。この頂点の次数は高々 5 なので、6 色あれば隣接するどれとも違う色が必ず選べる。
- という感じで帰納法的に考えるとどんなグラフも 6-彩色可能。



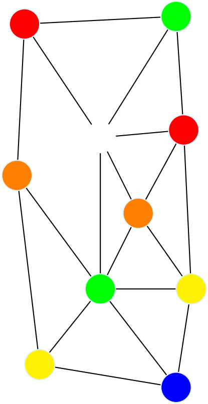
とりあえず 6 色でいけることは理解できる

- 『面 → 頂点』『面の隣接 → 辺』と置き換えた**双対グラフ**（そうたい）を考える。以下、双対グラフの話。
- 平面グラフの辺数は $3|V| - 6$ 以下であるので、握手補題より次数の総和は $6|V| - 12$ 以下、ゆえに平均次数は 6 未満。つまり、**平面グラフには必ず次数が 5 以下の頂点が存在する。**
- ある平面グラフから（必ず存在するはずの）「次数が 5 以下の頂点」を削除する。これ 6-彩色できていたと仮定する。
- ここに今削除した頂点を「戻す」ことを考える。この頂点の次数は高々 5 なので、6 色あれば隣接するどれとも違う色が必ず選べる。
- という感じで帰納法的に考えるとどんなグラフも 6-彩色可能。



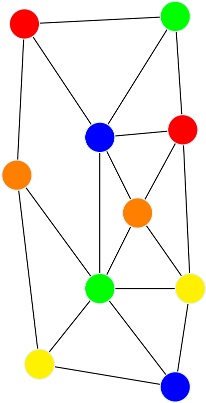
とりあえず 6 色でいけることは理解できる

- 『面 → 頂点』『面の隣接 → 辺』と置き換えた**双対グラフ**（そうたい）を考える。以下、双対グラフの話。
- 平面グラフの辺数は $3|V|-6$ 以下であるので、握手補題より次数の総和は $6|V|-12$ 以下、ゆえに平均次数は 6 未満。つまり、**平面グラフには必ず次数が 5 以下の頂点が存在する。**
- ある平面グラフから（必ず存在するはずの）「次数が 5 以下の頂点」を削除する。これ 6-彩色できていたと仮定する。
- ここに今削除した頂点を「戻す」ことを考える。この頂点の次数は高々 5 なので、6 色あれば隣接するどれとも違う色が必ず選べる。
- という感じで帰納法的に考えるとどんなグラフも 6-彩色可能。



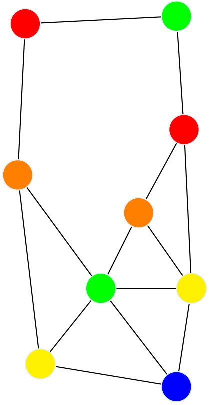
とりあえず 6 色でいけることは理解できる

- 『面 → 頂点』『面の隣接 → 辺』と置き換えた**双対グラフ**（そうたい）を考える。以下、双対グラフの話。
- 平面グラフの辺数は $3|V|-6$ 以下であるので、握手補題より次数の総和は $6|V|-12$ 以下、ゆえに平均次数は 6 未満。つまり、**平面グラフには必ず次数が 5 以下の頂点が存在する。**
- ある平面グラフから（必ず存在するはずの）「次数が 5 以下の頂点」を削除する。これ 6-彩色できていたと仮定する。
- ここに今削除した頂点を「戻す」ことを考える。この頂点の次数は高々 5 なので、6 色あれば隣接するどれとも違う色が必ず選べる。
- という感じで帰納法的に考えるとどんなグラフも 6-彩色可能。



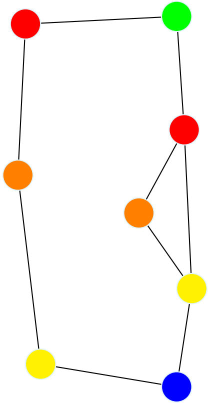
とりあえず 6 色でいけることは理解できる

- 『面 → 頂点』『面の隣接 → 辺』と置き換えた**双対グラフ**(そうたい)を考える。以下、双対グラフの話。
- 平面グラフの辺数は $3|V| - 6$ 以下であるので、握手補題より次数の総和は $6|V| - 12$ 以下、ゆえに平均次数は 6 未満。つまり、**平面グラフには必ず次数が 5 以下の頂点が存在する。**
- ある平面グラフから（必ず存在するはずの）「次数が 5 以下の頂点」を削除する。これ 6-彩色できていたと仮定する。
- ここに今削除した頂点を「戻す」ことを考える。この頂点の次数は高々 5 なので、6 色あれば隣接するどれとも違う色が必ず選べる。
- という感じで帰納法的に考えるとどんなグラフも 6-彩色可能。



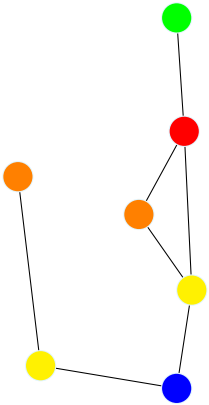
とりあえず 6 色でいけることは理解できる

- 『面 → 頂点』『面の隣接 → 辺』と置き換えた**双対グラフ**（そうたい）を考える。以下、双対グラフの話。
- 平面グラフの辺数は $3|V| - 6$ 以下であるので、握手補題より次数の総和は $6|V| - 12$ 以下、ゆえに平均次数は 6 未満。つまり、**平面グラフには必ず次数が 5 以下の頂点が存在する。**
- ある平面グラフから（必ず存在するはずの）「次数が 5 以下の頂点」を削除する。これ 6-彩色できていたと仮定する。
- ここに今削除した頂点を「戻す」ことを考える。この頂点の次数は高々 5 なので、6 色あれば隣接するどれとも違う色が必ず選べる。
- という感じで帰納法的に考えるとどんなグラフも 6-彩色可能。



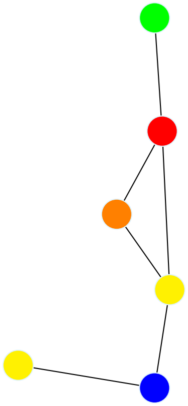
とりあえず 6 色でいけることは理解できる

- 『面 → 頂点』『面の隣接 → 辺』と置き換えた**双対(そうたい)グラフ**を考える。以下、双対グラフの話。
- 平面グラフの辺数は $3|V| - 6$ 以下であるので、握手補題より次数の総和は $6|V| - 12$ 以下、ゆえに平均次数は 6 未満。つまり、**平面グラフには必ず次数が 5 以下の頂点が存在する。**
- ある平面グラフから（必ず存在するはずの）「次数が 5 以下の頂点」を削除する。これ 6-彩色できていたと仮定する。
- ここに今削除した頂点を「戻す」ことを考える。この頂点の次数は高々 5 なので、6 色あれば隣接するどれとも違う色が必ず選べる。
- という感じで帰納法的に考えるとどんなグラフも 6-彩色可能。



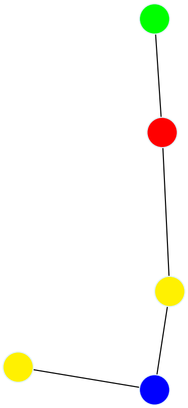
とりあえず 6 色でいけることは理解できる

- 『面 → 頂点』『面の隣接 → 辺』と置き換えた**双対グラフ**(そうたい)を考える。以下、双対グラフの話。
- 平面グラフの辺数は $3|V| - 6$ 以下であるので、握手補題より次数の総和は $6|V| - 12$ 以下、ゆえに平均次数は 6 未満。つまり、**平面グラフには必ず次数が 5 以下の頂点が存在する。**
- ある平面グラフから（必ず存在するはずの）「次数が 5 以下の頂点」を削除する。これ 6-彩色できていたと仮定する。
- ここに今削除した頂点を「戻す」ことを考える。この頂点の次数は高々 5 なので、6 色あれば隣接するどれとも違う色が必ず選べる。
- という感じで帰納法的に考えるとどんなグラフも 6-彩色可能。



とりあえず 6 色でいけることは理解できる

- 『面 → 頂点』『面の隣接 → 辺』と置き換えた**双対グラフ**(そうたい)を考える。以下、双対グラフの話。
- 平面グラフの辺数は $3|V| - 6$ 以下であるので、握手補題より次数の総和は $6|V| - 12$ 以下、ゆえに平均次数は 6 未満。つまり、**平面グラフには必ず次数が 5 以下の頂点が存在する。**
- ある平面グラフから（必ず存在するはずの）「次数が 5 以下の頂点」を削除する。これ 6-彩色できていたと仮定する。
- ここに今削除した頂点を「戻す」ことを考える。この頂点の次数は高々 5 なので、6 色あれば隣接するどれとも違う色が必ず選べる。
- という感じで帰納法的に考えるとどんなグラフも 6-彩色可能。



その後の流れ

詳細はネットで調べただけです。

- 4 色で塗れそうだ、と思われる。

その後の流れ

詳細はネットで調べてください。

- 4 色で塗れそうだ、と思われる。
- 19 世紀の終わり頃、4 色でいけるという証明がアルフレッド・ケンプによってなされる。

その後の流れ

詳細はネットで調べただけです。

- 4 色で塗れそうだ、と思われる。
- 19 世紀の終わり頃、4 色でいけるという証明がアルフレッド・ケンプによってなされる。
- ……が、それが間違いであることがわかる。

その後の流れ

詳細はネットで調べただけです。

- 4 色で塗れそうだ、と思われる。
- 19 世紀の終わり頃、4 色でいけるという証明がアルフレッド・ケンプによってなされる。
- ……が、それが間違いであることがわかる。
- その代わり、その証明をベースに 5 色なら ok ということが証明される。(1890)

その後の流れ

詳細はネットで調べただけです。

- 4 色で塗れそうだ、と思われる。
- 19 世紀の終わり頃、4 色でいけるという証明がアルフレッド・ケンプによってなされる。
- ……が、それが間違いであることがわかる。
- その代わり、その証明をベースに 5 色なら ok ということが証明される。(1890)

(4 色が証明できないまま時が過ぎる。)

その後の流れ

詳細はネットで調べただけです。

- 4 色で塗れそうだ、と思われる。
- 19 世紀の終わり頃、4 色でいけるという証明がアルフレッド・ケンプによってなされる。
- ……が、それが間違いであることがわかる。
- その代わり、その証明をベースに 5 色なら ok ということが証明される。(1890)

  (4 色が証明できないまま時が過ぎる。)
- 1976 年に Appel と Haken が計算機を援用して証明に成功!

練習

1. $|E(K_n)|$ を求めよ。
2. $|E(K_{n,m})|$ を求めよ。
3. $K_{2,3}$ は平面グラフか？理由とともに答えよ。（ヒント: 平面描画した例を示せば十分）

#13 ミニレポート課題 (提出期間: 本日〜次回の授業の前日)

前ページの問題を解け。

解答を PC 文書や手書きで作成し、PDF にして Google Forms (**https://forms.gle/hCyJBbFBMW9AisAt7**) から提出せよ (要組織アカウントによるログイン)。ただし写真等の画像ファイルの場合は、解像度や露出・照明状態などを十分考慮し、きちんと読解可能なクオリティのものとすること。スマートフォンの場合はスキャナアプリの類の利用を必須とする。