信号処理
Signal Processing
『信号』

rebrand.ly/sigproc

小林裕之

大阪工業大学 RD 学部システムデザイン工学科

OSAKA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

1 of 14

a LaTeX + Beamer slideshow

授業の受講に関して

- 講義資料（スライド等）は **Google Drive** (https://rebrand.ly/sigproc) に置く (紙の配布資料は行わない)。授業前には虫喰い状態のスライドのみを提供するが、授業後に uncoveredフォルダに穴埋め版を置くので復習に活用されたい。アカウントの問題等でアクセスできないときのために https://www.oit.ac.jp/rd/labs/kobayashi-lab/~yagshi/lectures/にも置いておく。
- ミニレポートは**Google Forms** (https://forms.gle/1PdgpYDpnahECqkY6) に提出。

授業の進め方

- 出席そのものは評価せず。極論するとテストのみ出席で他は全欠席でも A 評価はあり得る。
- 基本的には**中間演習**と**期末試験**で評価。
- 毎回ミニレポートを課す。出す者は提出期間を厳守すること。
- 試験の不合格者は**毎回のミニレポート**と**出席**で少し救済する。
(**しっかりした内容の**ミニレポートを概ね 9 割以上提出し、かつ大学の出欠管理システムで 8 割以上遅刻せず出席していた場合最大 10 点程度の救済。提出数や出席数が少ない場合は救済幅が縮小する。いずれかが 7 割を下回ったら一切救済しない。締め切り後の提出は認めない。)
- スライド穴埋め版はその回の授業終了後に公開。
- **授業中に**スライドの誤りを見つけて指摘してくれた者は、誤り一箇所につき先着一名様限り 100 点満点 1 点相当の加点を行う。(ただしごく軽微なものなど、内容によっては加点しない場合もあり。)

信号とは

しん - ごう【信号】 **広辞苑第六版**

1. 隔たった二者以上の間で、一定の符号を用いて意思を通ずる方法。また、その符号。符号には、色・音・形・光などを用いる。「手旗一」
2. 特に、道路・鉄道などの交通信号。また、交通信号機。

signal **the pocket Oxford dictionary 7th edition**

1. ***n.*** sign (esp. prearranged one) conveying information or giving instruction, message made up of such signs; device on railway giving instructions or warnings to train-drivers etc.; event which causes immediate activity (*her arrival was the signal for cheering*); transmitted electrical impulses or radio waves, sequence of these.
2. ***v.*** (-ll) make signal or signals (to); transmit or announce by signal; direct (person *to do* thing) by signal.
3. ***a.*** remarkably good or bad, noteworthy.
4. **signal-box** building from which railway signals are controlled. [F f. L (prec.)]

この授業で扱う「信号」とは

前ページの辞書の意味とはちょっと違って、要するに**関数**と**数列**のどちらか。

「信号」の例その 1: 関数

$$x(t)$$

- 変数 t が連続値をとれる関数。
- (直感的にイメージしやすいので) t を主に**時間**と考えて議論することにする。

「信号」の例その 2: 数列

$$x[k]$$

- 変数 k は整数値。
- 定義域が整数に限定された**関数**と考えて差し支えない。
- k が整数であることを強調するために角括弧を使う。

とりあえず数列の方はしばらく置いておいて、連続時間関数としての信号から始める。

信号のいろいろ: 周期信号

- ある周期 T で同じパタンが繰り返されるような信号を**周期信号**という。
- 周期はふつう一番短いものを言う。(周期が 3 秒の周期信号は、周期が 6 秒あるいは 9 秒などなどと考えることもできるけれど、そうは言わずに 3 秒という。)

クイズ

1. 信号 $x(t)$ が周期 T の周期信号である、ということを簡潔に式で表現せよ。
2. 周期 T_1 の信号 $x_1(t)$ と周期 T_2 の信号 $x_2(t)$ を足した信号 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ の周期はいくらか。ただし T_1, T_2 は整数とする。
3. 周期的でない関数を周期関数だと言い張るには、どうすれば良いか?
4. $\int_{\frac{1}{2}+\pi}^{\frac{1}{2}+5\pi} \sin t + \cos(t + \frac{\pi}{3})\mathrm{d}t$ を求めよ。(ヒント sin, cos それぞれの項の周期は?)

周期信号の当たり前だけど重要な性質

前のページのクイズとも関連します。

k 周期ずらしても同じ (← って周期関数の定義そのもの)

$$x(t+kT) =$$

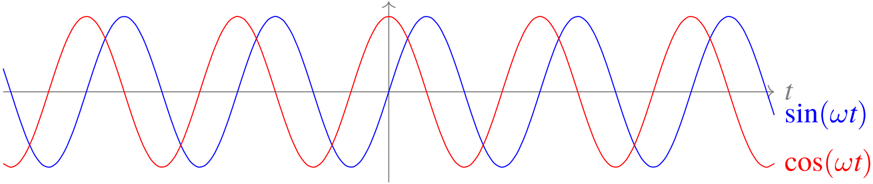
1 周期分積分するならどこでもいっしょ (今後よく使う性質なので注意)

$$\forall t_0, \quad \int_0^T x(t)\mathrm{d}t =$$

信号のいろいろ: 偶関数と奇関数

- 偶関数: $x_e(t) = x_e(-t)$ 要するに $t = 0$ で対称
- 奇関数: $x_o(t) = -x_o(-t)$ 要するに原点で点対称

問. $\cos\omega t$, $\sin\omega t$, $e^{j\omega t}$ はそれぞれ偶関数・奇関数・どれでもない、のいずれか?



どんな信号（関数）も偶関数と奇関数に分解できる件

どんな $x(t)$ についても、

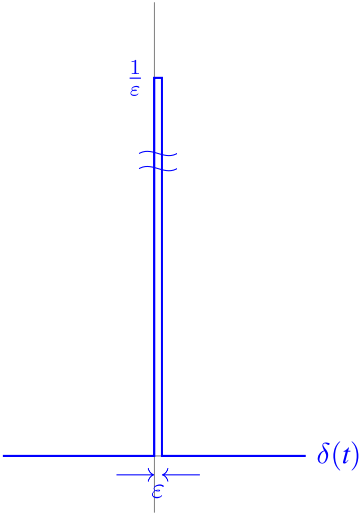
$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

なる偶関数 $x_e(t)$ と奇関数 $x_o(t)$ が存在する！

問.

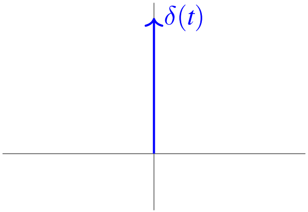
1. $x_e(t)$ と $x_o(t)$ をそれぞれ $x(t)$ で表せ。
2. $e^{j\omega t}$ を偶関数と奇関数に分解せよ。

信号のいろいろ: 単位インパルス信号



1. 図のような『時刻 0 で立ち上がり、幅が ε で、面積が 1』のパルス状の信号を考える。
2. $\lim_{\varepsilon \to 0}$ とする。
3. そんな信号 $\delta(t)$ を、**単位インパルス信号**あるいは **Dirac のデルタ関数**と言う。

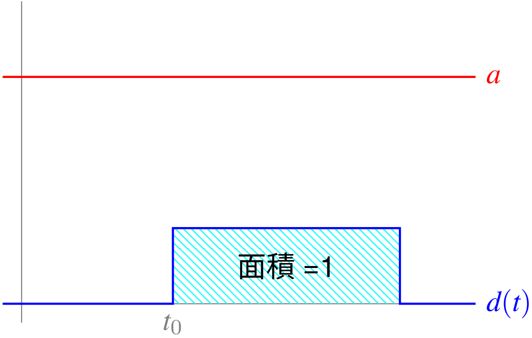
図で表すときは、幅が 0、高さが無限大のイメージで下のように矢印を使う。



単位インパルス信号誕生秘話

もちろんウソです。でもこういうストーリィで考えるとこの先いろいろ理解しやすいかと。

面積が 1 の信号と定数信号



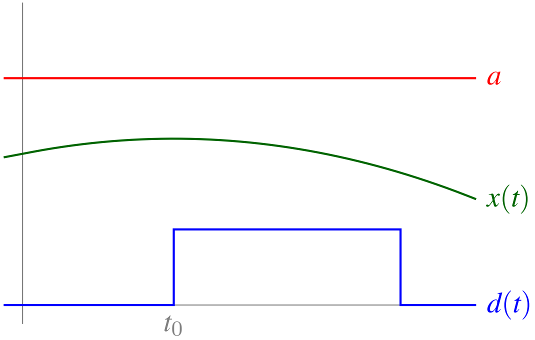
1. 面積が 1 の信号 $d(t)$ がありました。

$$\int_{-\infty}^{\infty} d(t)\mathrm{d}t = 1$$

2. そこに**定数信号** aがやってきました。
3. 2 つの信号をかけ合わせた積信号の面積は

   です。

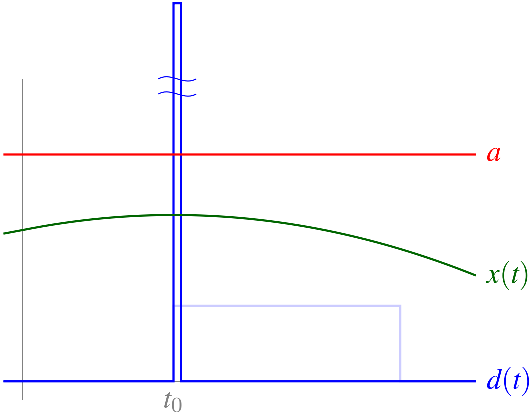
面積が 1 の信号と任意の信号



1. 今度は**任意の信号** $x(t)$がやってきました。
2. 2 つの信号をかけ合わせた積信号の面積は

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \times d(t) \mathrm{d}t =$$

面積が 1 のスリムな信号と任意の信号



1. そこで、$d(t)$ を、**面積は 1 のまま**、細長くしてみました。
2. 2 つの信号をかけ合わせた積信号の**だいたいの**面積は、$x(t)$ が**ほぼ一定値**$x(t_0)$ とみなせるので簡単です。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t_0) \times d(t)\mathrm{d}t \approx$$

3. あれれ？右辺と左辺を入れ替えると、**面積が 1 の細長い信号は、任意の信号のある時刻 t_0 の値を切り出すナイフのように使える** と考えることができそうです！**→ インパルス信号**

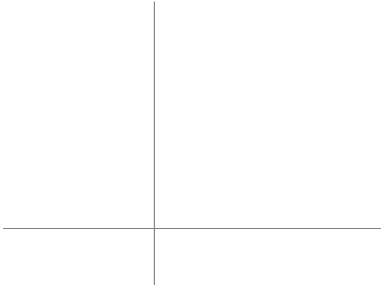
単位インパルス信号の性質

ある信号の任意時刻の値を切り出す (サンプリングする)。

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)\mathrm{d}t$$

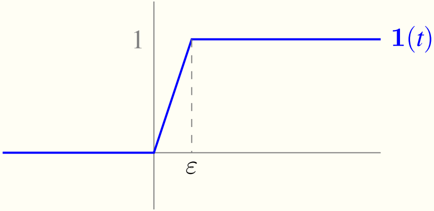
この「任意の信号のある瞬間の値 (左辺) をナイフのように切り取る」性質、直感的にすごく理解しづらくて覚えづらいと（小林は）思うので、この前の 3 ページ分のスライドを繰り返し読んで納得して、覚えてください。

信号のいろいろ: 単位ステップ関数



- 図のような『時刻 0 で 1 に立ち上がる』信号を**単位ステップ関数**あるいは単に**ステップ関数**と言う。
- $\mathbf{1}(t)$、あるいは $u(t)$ などと書くことが多い。

問. ステップ関数の微分を求めよ。ただしそのままだと難しいので、まずは下図のように時間 ε で立ち上がる連続な関数で考えて、その後で $\lim_{\varepsilon\to 0}$ とせよ。



何を今さらな『オイラーの公式』の確認

j が出てきてもうろたえるな、という話

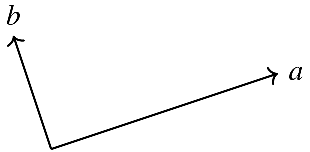
$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

- $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

- cos や sin は **本質的に複素指数関数といっしょ**。
- cos や sin は公式がごちゃごちゃしてて**計算がとてもめんどくさい**。
- この授業では極力複素指数関数を使います。複素指数関数が出てきたら、それは cos や sin の組み合わせだ（表現方法の違いに過ぎない）と思いましょう。

あなたの知らなかった直交の話 〜複素数編〜

- ベクトル $a = (u_a, v_a)$ と $b = (u_b, v_b)$ の内積 $\langle a, b \rangle$ が 0 のとき、この 2 つのベクトルは**直交する**[a]。
- 内積の計算は、$\langle a, b \rangle = u_a \times u_b + v_a \times v_b$ だと思っていたかも知れないけれど、本当は……、
- $\langle a, b \rangle =$ 　　　　　　　　　　でした！(要素が複素数の場合。)
- 直交なベクトルを集めたものを**直交系**という。



[a] 高校では内積の記号は中点だったと思いますが、かけ算みたいで紛らわしいのでここでは $\langle , \rangle$ を使います。またベクトルも面倒なのでいちいち “$\boldsymbol{a}$” とか “$\vec{a}$” とか書かずに単に “a” とします。

あなたの知らなかった直交の話 〜関数編〜

- ベクトルと同じノリで 2 つの信号（関数）の間にも**内積**と**直交**という概念が存在する。
- **関数の内積**とは、ある区間で (一方を複素共役にして)**かけて積分** したもので、それが　なら**直交**する、という。

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle =$$

- ベクトルと同様に**直交系**という概念も採用しよう。

問. $\sin\omega t$ と $\cos\omega t$ は区間 $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ において直交しているか調べよ。同様に $\sin\omega t$ と $\sin k\omega t$ はどうか? ただし k は 0 以外の整数とする。

計算のヒント: $\sin\omega t \times \cos\omega t = \frac{1}{2}\sin 2\omega t$

直交なものに分解する。

問. ベクトル x は直交系のベクトル、u, v, w の線型結合 (下式) である。

$$x = au + bv + cw$$

3 つの係数 a, b, c を求めよ。

(略解) まず a を求めよう。両辺に u をかける（内積をとる）と、$\langle x, u\rangle = a\langle u, u\rangle + b\langle v, u\rangle + c\langle w, u\rangle$ となるが、直交の性質より　は 0 になる。つまり $\langle x, u\rangle = a\langle u, u\rangle$。したがって $a = \dfrac{\langle x, u\rangle}{|u|^2}$ となる。b, c も同様。

何がいいたいかと言うと、**直交系の線型結合において、係数を求めるのは簡単**だ、ということ。

すごい直交関数系

角周波数がある値 ω_0 の整数 k 倍[a]の複素指数関数

$$x_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad (k\text{: 整数})$$

は気の済むまでいくら集めても、区間 $[0, \frac{2\pi}{\omega_0}]$ で直交関数系である。

[a] ちなみにこのような状況における ω_o を**基本 (角) 周波数**といいます。

問. 確認せよ。

(補足) 換言すると、同じ角周波数の cos, sin のいい感じの組み合わせについても同じことが言える、ということ。

ここでついに核心に迫る！

次回あらためて詳しく見るので、今日はチラ見せのみ。

核心

周期 $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ の**どんな周期関数**も、角周波数が ω_0 の整数倍の**複素指数関数の線型結合**で表せる！

式で書くとこうなる。

$$x(t) = \cdots + C_{-2}e^{j(-2)\omega_0 t} + C_{-1}e^{j(-1)\omega_0 t} + C_0 e^{j0\omega_0 t} + C_1 e^{j1\omega_0 t} + C_2 e^{j2\omega_0 t} + \cdots$$

$$=$$

ミニレポート課題 (提出期間: 本日〜次回の授業の前日)

p. 21の問題を解け。

解答を PC 文書や手書きで作成し、PDF にして Google Forms (https://forms.gle/1PdgpYDpnahECqkY6) から提出せよ (要組織アカウントによるログイン)。ただし写真等の画像ファイルの場合は、解像度や露出・照明状態などを十分考慮し、きちんと読解可能なクオリティのものとすること。スマートフォンの場合はスキャナアプリの類の利用を必須とする。