信号処理
Signal Processing
『Fourier 級数』

rebrand.ly/sigproc

小林裕之

大阪工業大学 RD 学部システムデザイン工学科

OSAKA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

2 of 14

a LaTeX + Beamer slideshow

授業の受講に関して

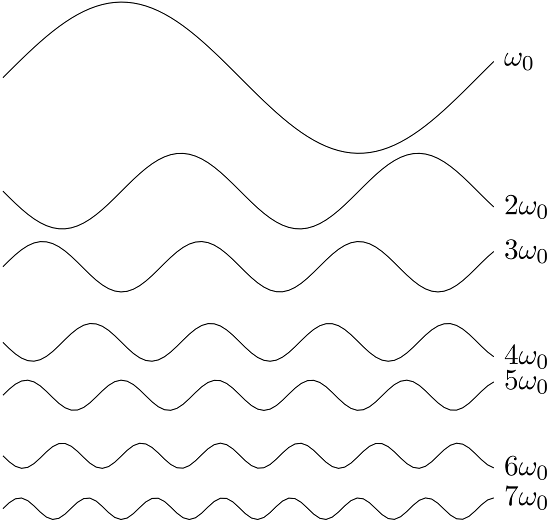
- 講義資料（スライド等）は **Google Drive** (https://rebrand.ly/sigproc) に置く (紙の配布資料は行わない)。授業前には虫喰い状態のスライドのみを提供するが、授業後に uncoveredフォルダに穴埋め版を置くので復習に活用されたい。アカウントの問題等でアクセスできないときのために https://www.oit.ac.jp/rd/labs/kobayashi-lab/~yagshi/lectures/にも置いておく。
- ミニレポートは**Google Forms** (https://forms.gle/1PdgpYDpnahECqkY6) に提出。

授業の進め方

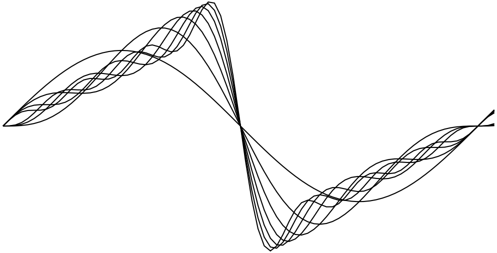
- 出席そのものは評価せず。極論するとテストのみ出席で他は全欠席でも A 評価はあり得る。
- 基本的には**中間演習**と**期末試験**で評価。
- 毎回ミニレポートを課す。出す者は提出期間を厳守すること。
- 試験の不合格者は**毎回のミニレポート**と**出席**で少し救済する。
(**しっかりした内容の**ミニレポートを概ね 9 割以上提出し、かつ大学の出欠管理システムで 8 割以上遅刻せず出席していた場合最大 10 点程度の救済。提出数や出席数が少ない場合は救済幅が縮小する。いずれかが 7 割を下回ったら一切救済しない。締め切り後の提出は認めない。)
- スライド穴埋め版はその回の授業終了後に公開。
- **授業中に**スライドの誤りを見つけて指摘してくれた者は、誤り一箇所につき先着一名様限り 100 点満点 1 点相当の加点を行う。(ただしごく軽微なものなど、内容によっては加点しない場合もあり。)

信号は倍々…の周波数の正弦波の合成である。

何となくそういう認識はあります……よね？



左の波形を足したもの:



周期信号は級数展開できるはず。

1. 周期 T(すなわち基本角周波数 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$) の周期信号 $x(t)$ は……
2. その整数倍の周波数の sin なり cos なりの重ね合わせである、ということは何となく聞いたことがあるし納得もできる。前ページの図でも見た。
3. sin や cos ということは本質的に $e^{jk\omega_0 t}$ といっしょ。というか e の方が楽なので e を使うことにする。

だから、きっとこんなふうに級数展開できるはず。

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \cdots + C_{-2}e^{j(-2)\omega_0 t} + C_{-1}e^{j(-1)\omega_0 t} + C_0 e^{j0\omega_0 t} + C_1 e^{j1\omega_0 t} + C_2 e^{j2\omega_0 t} + \cdots \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}
\end{aligned}
$$

ミニクイズ

問. 前ページの考えが正しいとして以下を答えよ。

1. 前のページの話によれば、例えば周期 0.1 s (周波数 10 Hz) の周期信号は 10 Hz, 20 Hz, 30 Hz, 40 Hz,... の成分から作れるとのことである。なぜ 15 Hz や 31 Hz は不要 (含まれない) と言い切れるのか?
2. 実数信号 $x(t)$ の場合[a]、前のページの式の係数 C_k は C_k と C_{-k} は共役複素数の関係である……というか、なければいけない。なぜか?

[a] この授業では $x(t)$ は基本的に実数信号です。

答.

1. 仮に 15 Hz が含まれていたら周期が 0.1 s にならないから。逆にもし 15 Hz が追加で含まれるとしたら、基本周波数は 5 Hz になる。(13 年周期のセミと 17 年周期のセミが同時に羽化するのは何年周期？と同じこと。)
2. そうしないと $x(t)$ 全体が実数にならない (複素数になってしまう) から。

Fourier 級数展開

p. 5では「できるはず」と言ってましたが、実際にできるんです。

周期 T、つまり基本角周波数 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ の周期信号 $x(t)$ は次のように級数和として表せる。

$$x(t) =$$

問. $C_k = re^{j\theta}$ とする。p. 6で見たとおり、$C_{-k} = \overline{C_k} = re^{-j\theta}$ である。このとき、(無限個の級数和のうち、$-k$ と k だけを取り出して) $C_{-k}e^{j(-k)\omega_0 t} + C_k e^{jk\omega_0 t}$ を計算せよ。

答:

してその係数は?

大きくて根源的な疑問

さっそく Fourier 級数展開してみようと思ったんだけど、

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

の C_k って、具体的にいくつだ?

ヒント: k が異なる 2 つの $e^{jk\omega_0 t}$ は**直交**してたんでした。(うん、確か前回勉強した。)

直交しているもの同士の内積は 0 になる。

- $x(t) = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{jm\omega_0 t}$ は文字通り無数の $e^{jm\omega_0 t}$ の線型和になっている。
- それと「$e^{jk\omega_0 t}$」の**内積**を求めれば、k 以外の m の部分は (直交しているから)**全部ゼロになる**ので……、

$$\langle e^{jk\omega_0 t}, x(t) \rangle =$$

- ***k* の部分だけが残る！**(のであとは何とかなる、きっと。)

ちなみに関数同士の内積はこんな計算でした。→ $\langle f(t), g(t) \rangle = \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t$

まずは $k=0$ から。

$k=0$ のときも立派に直交している関数の一つです。

$$\langle e^{jk\omega_0 t}, x(t)\rangle = \qquad \leftarrow k=0 \text{ なので } 1$$

$$= \qquad \leftarrow \text{内積の計算}$$

$$= \qquad \leftarrow \text{直交の性質より}$$

$$=$$

あとは C_0 について解けばいい。

0 次の Fourier 係数 C_0 が求まった!

$$C_0 =$$

- これはよく見ると 1 周期の 。換言すれば**直流成分**。(なるほど)

では、いよいよ k を k のままで計算!

$$\langle e^{jk\omega_0 t}, x(t)\rangle =$$ ← 内積の計算

$$=$$ ← 共役複素数は指数部分の符号逆転

$$=$$ ← 直交の性質より

$$=$$

$$=$$

あとは C_k について解けばいい。

k 次の Fourier 係数 C_k も求まった!

$$C_k =$$

- これはよく見ると $k = 0$ のときも (p. 11と同じ結果なので) 成り立っている!
- 何度か見てきたが、確かに $C_k = \overline{C_{-k}}$ になっている。

Fourier 級数展開 (完全版)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

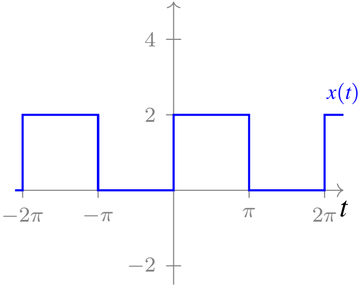
$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} \mathrm{d}t$$

ただし $x(t)$ は基本角周波数が ω_0 の周期関数で、$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ である。

また今後、時間信号とその Fourier 級数を『$x(t) \rightleftharpoons \{C_k\}$』と書く。

練習問題

問.　下図のような周期 $T = 2\pi$ の周期信号 $x(t)$ を Fourier 級数展開せよ。さらに 0 次、1 次の Fourier 近似を求めよ。



答: 周期が 2π なので $\omega_0 = 1$。したがって以下のとおり。

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jkt}$$

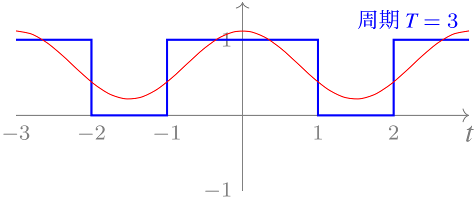
$$C_0 =$$

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-jkt}\mathrm{d}t$$

$$=$$

練習問題: 以下の青信号をフーリエ級数展開し、1 次近似を求めよ。

★★☆☆☆

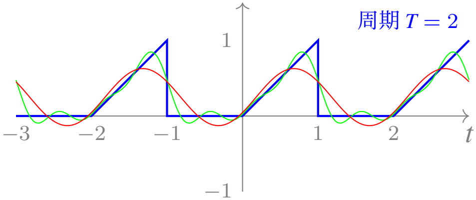


$$x(t) =$$

$$C_0 = \quad , C_k =$$

$$x(t) \approx$$

★★★★☆



$$x(t) =$$

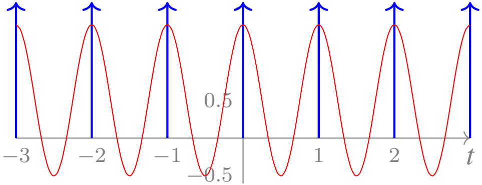
$$C_0 = \quad , C_k =$$

$$x(t) \approx$$

さらに練習問題

計算は簡単だけどちょっとひねった問題

単位インパルス列 ★★☆☆☆

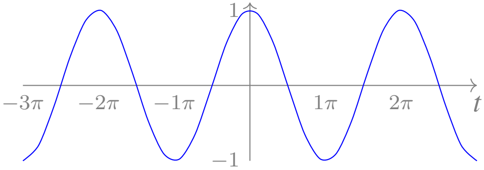


$$x(t) =$$

$$C_k =$$

$$x(t) \approx$$

敢えて $\cos t$ ★★★★☆



$$x(t) =$$

$$C_k =$$

ミニレポート課題 (提出期間: 本日〜次回の授業の前日)

p. 16の問題を少なくとも 1 つ解け。

解答を PC 文書や手書きで作成し、PDF にして Google Forms (**https://forms.gle/1PdgpYDpnahECqkY6**) から提出せよ (要組織アカウントによるログイン)。ただし写真等の画像ファイルの場合は、解像度や露出・照明状態などを十分考慮し、きちんと読解可能なクオリティのものとすること。スマートフォンの場合はスキャナアプリの類の利用を必須とする。