信号処理
Signal Processing
『スペクトル』

rebrand.ly/sigproc

小林裕之

大阪工業大学 RD 学部システムデザイン工学科

OSAKA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

4 of 14

a LaTeX + Beamer slideshow

授業の受講に関して

- 講義資料（スライド等）は **Google Drive** (https://rebrand.ly/sigproc) に置く (紙の配布資料は行わない)。授業前には虫喰い状態のスライドのみを提供するが、授業後に uncoveredフォルダに穴埋め版を置くので復習に活用されたい。アカウントの問題等でアクセスできないときのために https://www.oit.ac.jp/rd/labs/kobayashi-lab/~yagshi/lectures/にも置いておく。
- ミニレポートは**Google Forms** (https://forms.gle/1PdgpYDpnahECqkY6) に提出。

授業の進め方

- 出席そのものは評価せず。極論するとテストのみ出席で他は全欠席でも A 評価はあり得る。
- 基本的には**中間演習**と**期末試験**で評価。
- 毎回ミニレポートを課す。出す者は提出期間を厳守すること。
- 試験の不合格者は**毎回のミニレポート**と**出席**で少し救済する。
  (**しっかりした内容の**ミニレポートを概ね 9 割以上提出し、かつ大学の出欠管理システムで 8 割以上遅刻せず出席していた場合最大 10 点程度の救済。提出数や出席数が少ない場合は救済幅が縮小する。いずれかが 7 割を下回ったら一切救済しない。締め切り後の提出は認めない。)
- **授業中に**スライドの誤りを見つけて指摘してくれた者には、誤り一箇所につき先着一名様限り 100 点満点 1 点相当の加点を行う。(ただしごく軽微なものなど、内容によっては加点しない場合もあり。)

複素数の信号はイメージしにくい？

ならば正弦（余弦）信号に戻せば良い。

問. 信号 $x(t)$ を (複素) フーリエ級数展開したものを複素数なしにせよ。(ヒント: $C_{-k} = \overline{C_k}$ の関係を使ってあとはオイラーの公式。)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 kt} =$$

複素数版とそうじゃない版の Fourier 級数展開

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 kt}$$ (複素数版)

(そうじゃない版 1)

(そうじゃない版 2)

$x(t)$ の、**角周波数 $\omega_0 k$ rad/s の成分を特徴づける係数は C_k あるいは a_k, b_k である。**

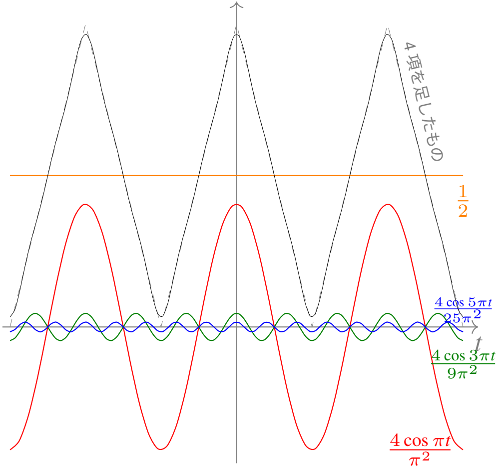
係数が波形を決める。

簡単な例 (三角波を 5 次まで近似してみる):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\pi t} = (\text{中略})$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4\cos((2m+1)\pi t)}{\pi^2 (2m+1)^2}$$

$$\approx$$



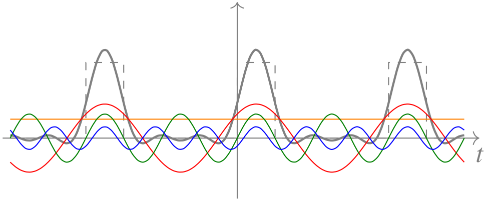
$\frac{1}{2}$ を　が、$\frac{4\cos \pi t}{\pi^2}$ を　が、$\frac{4\cos 3\pi t}{9\pi^2}$ を　が、$\frac{4\cos 5\pi t}{25\pi^2}$ を　が決めている！

もう一つ似たような例で確認。(位相にも注目)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\pi t} = (\text{中略})$$

$$= \frac{1}{4} + \sum_{k=-\infty}^{\infty, k\neq 0} \frac{j}{2k\pi}\left(e^{-j\frac{k\pi}{2}} - 1\right) e^{jk\pi t}$$

$$\approx$$



前ページと同様に、**角周波数が $\omega_0 k$ の成分を特徴づける（振幅と位相を決める)**のは　と　。→C_k の (何かの) 値を周波数の関数としたものを**スペクトル**と言う。

スペクトル
すみません。なんか前のページの繰り返しみたいな内容になってしまった、このページ。

p. 7の 3 次までの近似の例ふたたび。

$$
\begin{aligned}
x(t) \approx \tilde{x}(t) &= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\pi}\sin 2\pi t + \frac{\sqrt{2}}{3\pi}\sin\left(3\pi t - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= C_0 e^{j(0\omega_0)t} + C_1 e^{j(1\omega_0)t} + C_{-1} e^{j(-\omega_0)t} + C_2 e^{j(2\omega_0)t} + C_{-2} e^{j(-2\omega_0)t} \\
&+ C_3 e^{j(3\omega_0)t} + C_{-3} e^{j(-3\omega_0)t}
\end{aligned}
$$

C_k は $k\omega_0$ (rad/s) の信号の係数である。これを逆に『周波数 $k\omega_0$ の関数としての値 C_k と C_{-k}』と見るのが**スペクトル**。

周波数の関数としての C_k

くどいようですが p. 7 の例で。

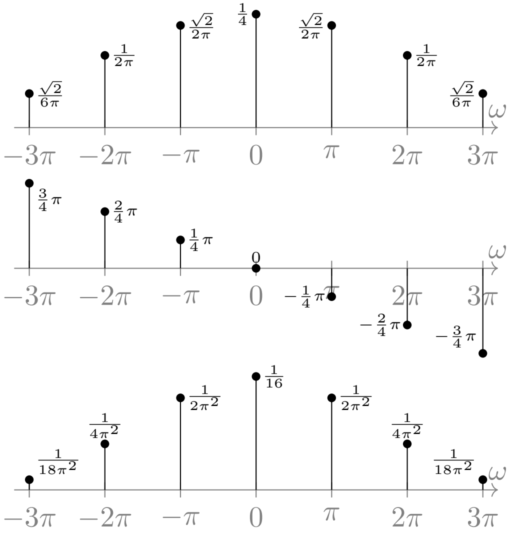
$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{4} & k = 0 \\ \frac{j}{2k\pi}\left(e^{-j\frac{k\pi}{2}} - 1\right) & k \neq 0 \end{cases}$$

これを ω の関数と考えると下表。ただし $\omega_0 = 2\pi/T$ なのでこの例だと $\omega_0 = \pi$

ω	$\cdots$	$-3\omega_0$	$-2\omega_0$	$-\omega_0$	0	ω_0	$2\omega_0$	$3\omega_0$	$\cdots$
C_k	$\cdots$	$\frac{-1+j}{6\pi}$	$\frac{j}{2\pi}$	$\frac{1+j}{2\pi}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1-j}{2\pi}$	$-\frac{j}{2\pi}$	$\frac{-1-j}{6\pi}$	$\cdots$
$\lvert C_k\rvert$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{6\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{\sqrt{2}}{6\pi}$	$\cdots$
$\angle C_k$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{2}{4}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	0	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{2}{4}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$
$\lvert C_k\rvert^2$	$\cdots$	$\frac{1}{18\pi^2}$	$\frac{1}{4\pi^2}$	$\frac{1}{2\pi^2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2\pi^2}$	$\frac{1}{4\pi^2}$	$\frac{1}{18\pi^2}$	$\cdots$

順に , **振幅スペクトル**, , という。

例によって p. 7のやつで。



上から　　　　　　、　　　　　　、　　　　　　のグラフ。(複素スペクトルは 2D グラフでは描けない。)

- 振幅〜とパワ〜は**必ず　関数**。
- 位相〜は**必ず　関数**。
- 情報量的には $\omega \geq 0$ だけあれば十分。(負の周波数部分は冗長。)
- 周波数成分の強さを議論するときには**パワースペクトル**がよく使われる。
- パワースペクトルを計算するときは　　　　とするのが便利（わかる ?)。知っておこう。

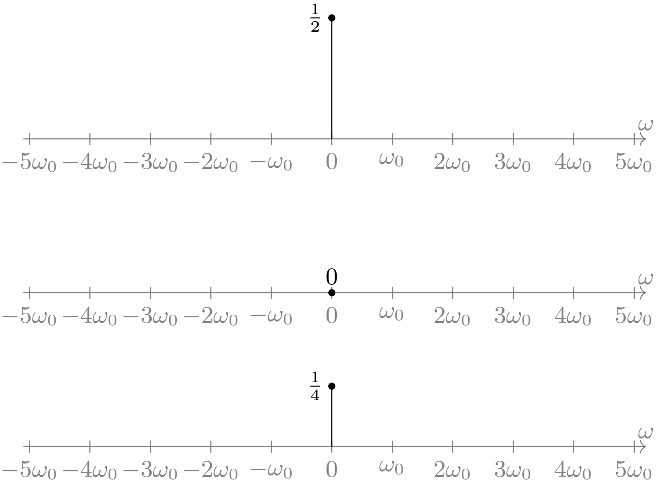
練習問題

問. p. 6 の例である以下の $x(t)$ の振幅、位相、パワースペクトルを $[-5\omega_0, 5\omega_0]$ の範囲でグラフで示せ。

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\pi t}$$

$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ -\frac{e^{-jk\pi}\left(e^{jk\pi}-1\right)^2}{2k^2\pi^2} & k \neq 0 \end{cases}$$

ヒント: まずは k が偶数と奇数にさらに場合分けしてみよう。

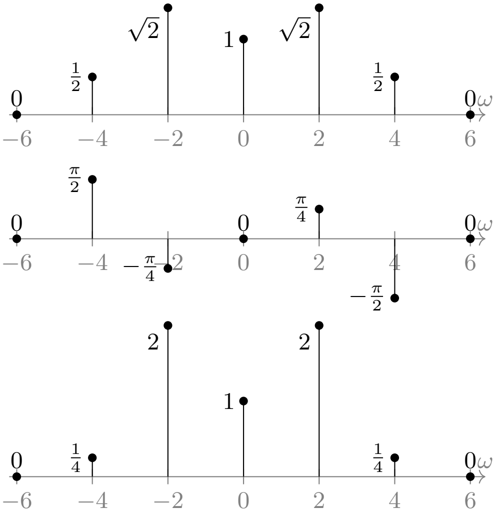


逆のパタンの練習問題

問. 図で示すような、上から順に振幅、位相、パワースペクトルの信号 $x(t)$ について

1. C_k を求め、
2. $x(t)$ を求め、
3. PC などを使って横軸を時間 t とした $x(t)$ の波形を示せ。

ただし図の範囲外の値はすべて 0 である。



ミニレポート課題 (提出期間: 本日〜次回の授業の前日)

p. 11と p. 12の練習問題の少なくとも一方を解け。

解答を PC 文書や手書きで作成し、PDF にして Google Forms (https://forms.gle/1PdgpYDpnahECqkY6) から提出せよ (要組織アカウントによるログイン)。ただし写真等の画像ファイルの場合は、解像度や露出・照明状態などを十分考慮し、きちんと読解可能なクオリティのものとすること。スマートフォンの場合はスキャナアプリの類の利用を必須とする。