信号処理
Signal Processing
『フーリエ変換』

rebrand.ly/sigproc

小林裕之

大阪工業大学 RD 学部システムデザイン工学科

OSAKA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

5 of 14

a LaTeX + Beamer slideshow

授業の受講に関して

- 講義資料（スライド等）は **Google Drive** (`https://rebrand.ly/sigproc`) に置く (紙の配布資料は行わない)。授業前には虫喰い状態のスライドのみを提供するが、授業後に `uncovered`フォルダに穴埋め版を置くので復習に活用されたい。アカウントの問題等でアクセスできないときのために `https://www.oit.ac.jp/rd/labs/kobayashi-lab/~yagshi/lectures/`にも置いておく。
- ミニレポートは**Google Forms** (`https://forms.gle/1PdgpYDpnahECqkY6`) に提出。

授業の進め方

- 出席そのものは評価せず。極論するとテストのみ出席で他は全欠席でもA評価はあり得る。
- 基本的には**中間演習**と**期末試験**で評価。
- 毎回ミニレポートを課す。出す者は提出期間を厳守すること。
- 試験の不合格者は**毎回のミニレポート**と**出席**で少し救済する。
(**しっかりした内容の**ミニレポートを概ね9割以上提出し、かつ大学の出欠管理システムで8割以上遅刻せず出席していた場合最大10点程度の救済。提出数や出席数が少ない場合は救済幅が縮小する。いずれかが7割を下回ったら一切救済しない。締め切り後の提出は認めない。)
- **授業中に**スライドの誤りを見つけて指摘してくれた者には、誤り一箇所につき先着一名様限り100点満点1点相当の加点を行う。(ただしごく軽微なものなど、内容によっては加点しない場合もあり。)

(#1 の再掲) 信号のいろいろ: 周期信号

- ある周期 T で同じパタンが繰り返されるような信号を**周期信号**という。
- 周期はふつう一番短いものを言う。(周期が 3 秒の周期信号は、周期が 6 秒あるいは 9 秒などなどと考えることもできるけれど、そうは言わずに 3 秒という。)

クイズ

1. 信号 $x(t)$ が周期 T の周期信号である、ということを簡潔に式で表現せよ。
2. 周期 T_1 の信号 $x_1(t)$ と周期 T_2 の信号 $x_2(t)$ を足した信号 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ の周期はいくらか。ただし T_1, T_2 は整数とする。
3. 周期的でない関数を周期関数だと言い張るには、どうすれば良いか?
4. $\int_{\frac{1}{2}+\pi}^{\frac{1}{2}+5\pi} \sin t + \cos(t + \frac{\pi}{3}) \mathrm{d}t$ を求めよ。

1. $f(t) = f(t + kT)$ ただし k は任意の整数
2. $\mathrm{lcm}(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$ (ちなみに T_1, T_2 を実数にまで拡張すると……激むずです。)
3. 周期が ∞ だと言えばいい。
4. 0

フーリエ級数展開の問題点

問 1. 一見便利で無敵そうなフーリエ級数展開

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad , \qquad C_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} \mathrm{d}t$$

には、致命的とも言える問題点がある。どこか?

答.

問 2. ではフーリエ級数展開のアイデアを一般の関数に拡張するには?

答.

フーリエ級数展開再考

式が 2 本あるとややこしいので一本で書いてみる

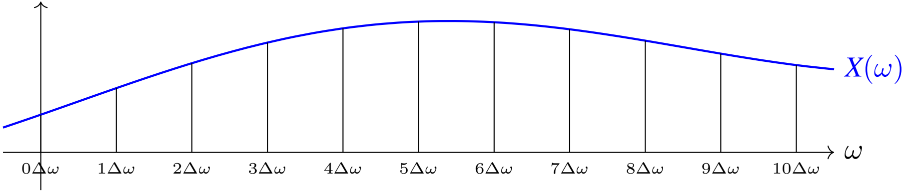
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

和の極限としての積分



$$\lim_{\Delta\omega\to 0} \sum_k X(k\Delta\omega)\Delta\omega = \int X(\omega)\mathrm{d}\omega$$

- 『和のカウンタ (?)』であるところの k が 1 変化するときの
- 『横軸の変化分』が $\Delta\omega$ である

というようなとき、上式のように lim を使って和を積分にできる。

p. 6の続き

p. 6の最後の式:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t e^{j\omega t} \omega_0$$

はまさに『カウンタ k が 1 変化すると横軸 ω が ω_0 変化する』の式だ! → lim で積分にしてみよう！

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t e^{j\omega t} \omega_0$$

極限をとることで……

$$=$$

積分に書き直せた。

$$=$$

内側をまとめて $X(\omega)$ としてみた。

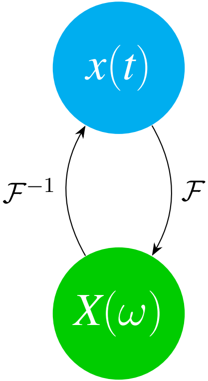
Fourier 変換・逆変換

Fourier 変換

$$\mathcal{F}\left\{x(t)\right\} =$$

Fourier 逆変換

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{X(\omega)\right\} =$$

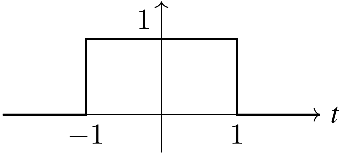


今後、Fourier 変換・逆変換の関係にあることを『$x(t) \rightleftharpoons X(\omega)$』と書く。

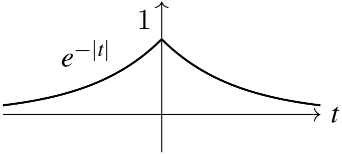
練習問題 (★☆☆☆☆)

問. 下に示す信号の Fourier 変換を求めよ。

1. 幅 2, 高さ 1 のパルス



2. 絶対値の指数関数



問. 単位インパルス信号の Fourier 変換を求めよ。

答. (実はもうずっと前にほぼやっている。)

覚えてしまおう

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \Delta(\omega)$$

$$=$$

授業 #1 でやった「信号の任意時刻 (ここでは 0) を切り出す」性質より

mini Q. t_0 右にずらしたインパルス信号 $\delta(t - t_0)$ の Fourier 変換を求めよ。

インパルス信号 hack

インチキぽい計算ですが、これでいいらしいのです。

1. $\delta(t)$ の Fourier 変換は 1 なので、1 を逆変換すれば $\delta(t)$ に**戻らないと困る**。

$$\mathcal{F}^{-1}\{1\} \qquad\qquad = \delta(t)$$

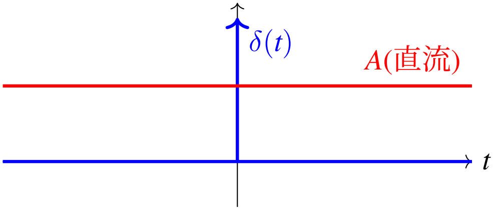
2. t と ω は**単なる文字なので入れ替えても問題ない**。

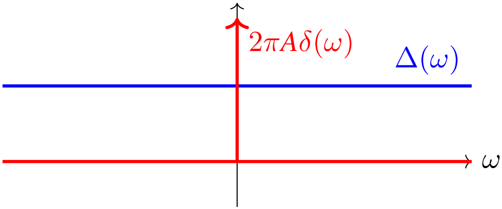
3. 両辺に 2π をかけてよく見ると……

4. なんと、これは “1” という**直流信号 (定数信号) の Fourier 変換**だ!!

$$\mathcal{F}\{1\} =$$

インパルス信号の Fourier 変換・逆変換のグラフ





フーリエ変換・級数展開の性質 (1 of 5)

周期信号の方は目印として T をつけ、$x_T(t)$ としてます。

1. **線型性** (定義式から明らか)

$$ax(t) + by(t) \rightleftharpoons$$

2. **時間反転** (定義式で $\tau = -t$ と変数変換すれば簡単に証明可。ただし t と τ で積分区間が逆になる ($t : -\infty \to \infty$ が $\tau : \infty \to -\infty$ になる) 点に注意。)

$$x(-t) \rightleftharpoons \qquad\qquad , \qquad x_T(-t) \rightleftharpoons$$

3. **時間シフト** (定義式で $\tau = t - t_0$ と変数変換すれば簡単に証明可)

$$x(t - t_0) \rightleftharpoons \qquad\qquad , \qquad x_T(t - t_0) \rightleftharpoons$$

フーリエ変換・級数展開の性質 (2 of 5)

4. **周波数シフト** (時間シフトと同じ)

$$X(\omega - \omega_0) \rightleftharpoons \qquad\qquad , \qquad \{C_{k-k_0}\} \rightleftharpoons$$

5. **時間・周波数スケーリング** (時間反転と同様に $\tau = at$ とおいて計算すれば基本的には良いのだが、$a < 0$ のときは定積分の向きが逆になるので場合分けする必要があり、結果として絶対値が出てくる点に注意。)

$$x(at) \rightleftharpoons$$

フーリエ変換・級数展開の性質 (3 of 5)

6. 微分の Fourier 変換 ($x'(t)e^{-j\omega t} = \left(x(t)e^{-j\omega t}\right)' + j\omega x(t)e^{-j\omega t}$ を使えば簡単。)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) \rightleftharpoons \qquad , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_T(t) \rightleftharpoons$$

7. 積分の Fourier 変換 ($y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ とおき、$x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)$ の両辺の Fourier 変換を求める。よく考えれば導出できる。覚える際は (前項の)**微分の逆**でいい。)

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \rightleftharpoons \qquad , \qquad \int_{-\infty}^{t} x_T(\tau)d\tau \rightleftharpoons$$

8. パーセバルの等式 (時間信号と周波数信号のエネルギや平均パワの関係式)

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)^2 \mathrm{d}t = \qquad \text{(周期信号)}$$

$$= \qquad \text{(非周期信号)}$$

(証明) どっちもやり方はだいたい同じなので後者で。$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega \right) \mathrm{d}t$ 積分の順番を入れ替えて $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\omega$ 内側の積分の j が通常のフーリエ変換と符号が逆。つまり複素共役なので $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \overline{X(\omega)} \mathrm{d}\omega$

フーリエ変換・級数展開の性質 (5 of 5)

畳み込み:

$$(x * y)(t) =$$

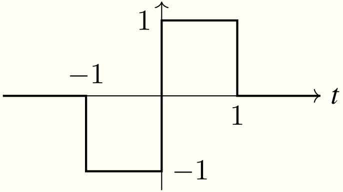
(注) 一般には、畳み込みの積分区間は必ず $-\infty$ から ∞ というわけではありません。

9. 畳み込み定理

$$(x * y)(t) \rightleftharpoons$$

練習問題

1. 図の信号の Fourier 変換を求めよ。



2. p. 14からはじまる性質の 2〜9 (ただし 8 は周期信号) を少なくとも 1 つ証明せよ。周期関数、非周期関数いずれか一方だけでも両方やっても良い。

答:

ミニレポート課題 (提出期間: 本日〜次回の授業の前日)

p. 19の練習問題を解け。

解答を PC 文書や手書きで作成し、PDF にして Google Forms (https://forms.gle/1PdgpYDpnahECqkY6) から提出せよ (要組織アカウントによるログイン)。ただし写真等の画像ファイルの場合は、解像度や露出・照明状態などを十分考慮し、きちんと読解可能なクオリティのものとすること。スマートフォンの場合はスキャナアプリの類の利用を必須とする。