信号処理
Signal Processing

『離散時間フーリエ変換』 rebrand.ly/sigproc

小林裕之

大阪工業大学 RD 学部システムデザイン工学科

OSAKA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

6 of 14

a LaTeX + Beamer slideshow

授業の受講に関して

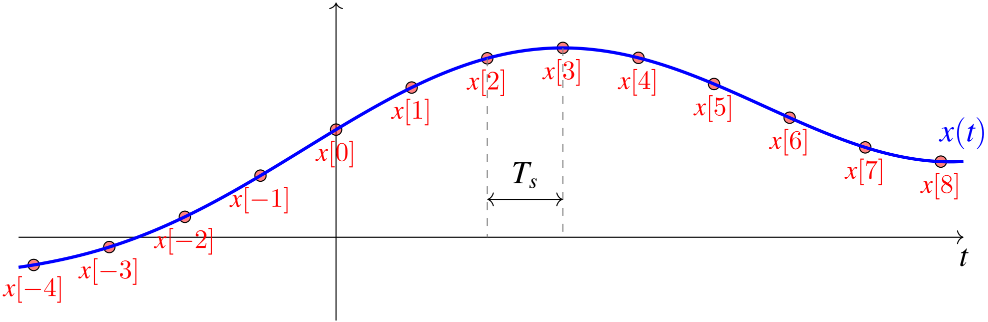
- 講義資料（スライド等）は **Google Drive** (`https://rebrand.ly/sigproc`) に置く (紙の配布資料は行わない)。授業前には虫喰い状態のスライドのみを提供するが、授業後に `uncovered` フォルダに穴埋め版を置くので復習に活用されたい。アカウントの問題等でアクセスできないときのために `https://www.oit.ac.jp/rd/labs/kobayashi-lab/~yagshi/lectures/` にも置いておく。
- ミニレポートは **Google Forms** (`https://forms.gle/1PdgpYDpnahECqkY6`) に提出。

授業の進め方

- 出席そのものは評価せず。極論するとテストのみ出席で他は全欠席でも A 評価はあり得る。
- 基本的には**中間演習**と**期末試験**で評価。
- 毎回ミニレポートを課す。出す者は提出期間を厳守すること。
- 試験の不合格者は**毎回のミニレポート**と**出席**で少し救済する。
  (**しっかりした内容の**ミニレポートを概ね 9 割以上提出し、かつ大学の出欠管理システムで 8 割以上遅刻せず出席していた場合最大 10 点程度の救済。提出数や出席数が少ない場合は救済幅が縮小する。いずれかが 7 割を下回ったら一切救済しない。締め切り後の提出は認めない。)
- **授業中に**スライドの誤りを見つけて指摘してくれた者には、誤り一箇所につき先着一名様限り 100 点満点 1 点相当の加点を行う。(ただしごく軽微なものなど、内容によっては加点しない場合もあり。)

次のフーリエ変換ターゲット

連続信号$x(t)$を、**サンプリング**して得られる**数列**$x[k]$



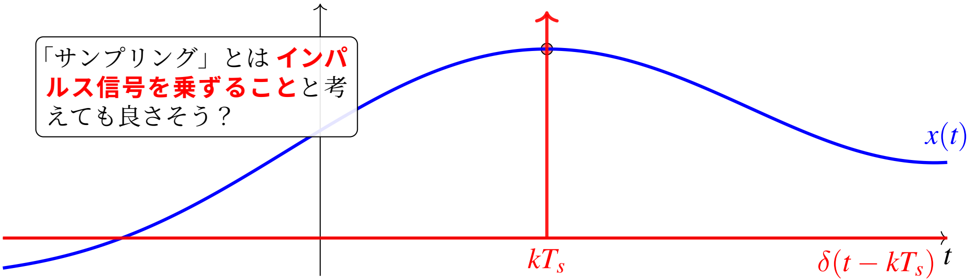
おことわり: $x[k]$ は数列というよりは離散時間信号とでも言うべきなのでしょうが、実体は数列そのものなので数列という表現を使っています。

信号 $x(t)$ の「サンプリング」とはそもそもどう考えたらいいか。

#1 の復習

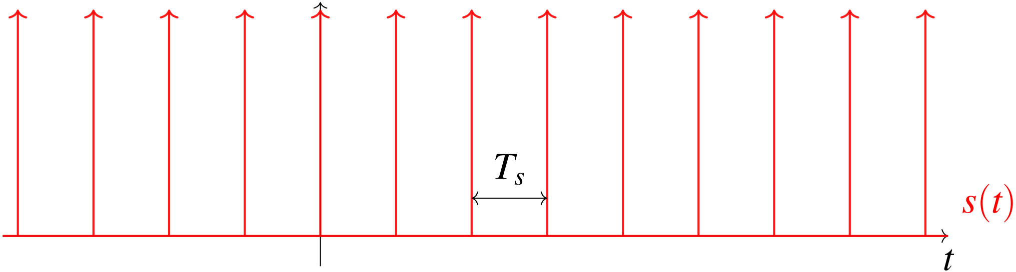
$x(t)$ のある時刻 kT_s における値 $x(kT_s)$ をインパルス信号 $\delta(t)$ を用いて表すと

$x(kT_s) =$ 　　　　　　　　　　　であった。



“くし型” (a.k.a. “comb” or “shah”) 信号

インパルス信号を等間隔に並べたものををを**くし型信号**という。



$$s(t) =$$

信号 $x(t)$ の「サンプリング」の定義

こうすると後々いろいろ丸く収まるのでこうする、くらいで納得してください。

(連続時間) 標本化信号

信号 $x(t)$ をサンプリング周期 T_s で標本化した連続時間信号 $x_\perp(t)$ は、周期 T_s のくし型信号 $s(t)$ を乗じたものとして考える。

$$x_\perp(t) \triangleq x(t)s(t) =$$

しれっとサンプル値である離散時間信号（数列）で表している点にも注目！

さ、定式化できたのでさっさと Fourier 変換してみましょ。

その前に、標本化信号をそのまま Fourier 変換していいのか問題

細かいことですが一応考えよう。

1. 標本化信号を**そのまま**Fourier 変換しようとした。

$$\mathcal{F}\left\{x_{\perp}(t)\right\} =$$

2. でもこれって T_s を変えたら (オリジナルの $x(t)$ が同じだとしても) 結果がその分スケーリングされちゃいませんか? (仮に細かくメッシュ切ったらその分たくさんカウントしちゃう、的な不公平さ感じません?)
3. というわけで、サンプリング周期に合わせて全体の倍率のつじつま合わせをするのが (オリジナルの $x(t)$ のフーリエ変換の近似的な意味を持たせるのであれば)、理屈としては正しい。

$$\mathcal{F}\left\{x(t)\right\} \approx \mathcal{F}\left\{ \quad x_{\perp}(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-kT_s)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

標本化信号 $x_\perp(t)$ の Fourier 変換

前のページの考察も考慮したバージョン

$$\mathcal{F}\left\{T_s x_\perp(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} T_s x_\perp(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

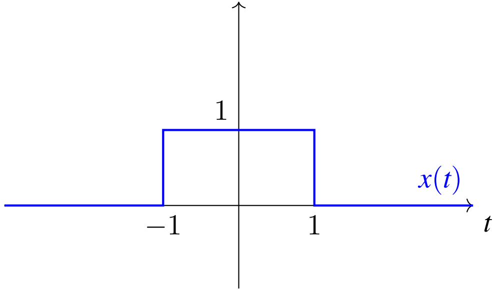
$$=$$

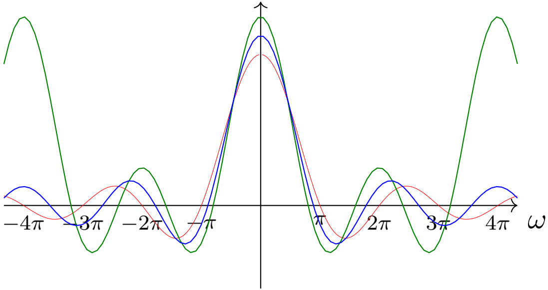
$$=$$

$$= T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega k T_s}$$

連続的な積分じゃなくて、離散的な $\sum$ の式になった！

念のため、プロットして確認。





$$X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t =$$

$$X_2(\omega) = T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega k T_s} = \qquad T_s = 0.5$$

$$X_3(\omega) = T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega k T_s} = \qquad T_s = 0.25$$

正規化 (角) 周波数の導入

Python の scipy とかでも使うよ。

(前ページの) 標本化信号による近似 Fourier 変換: $X(\omega) \approx T_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega k T_s}$

1. サンプリング周期 T_s は、その時の都合でいろいろ変わる値に過ぎず、純粋 (?) に数列 $x[k]$ にしてみればどうでもいい値。
2. $X(\omega)$ は周期 $\frac{2\pi}{T_s}$ の周期関数になっているが、ここに T_s が入るのも気持ち悪い。
3. そこでサンプリング周期 T_s(あるいはサンプリング周波数 $f_s = 1/T_s$) を基準に無次元化した　　　　　　　　　　　　を用いて、新たに　　　　　　　　(次ページ) を導入する。

頭がこんがらがったら、ようするに T_s を 1 周期 (2π なり 360 度なり) とする周波数や周期の表現、と理解すればいい。(なぜ T_s を基準にするのかは上記 2. 項の考えによる。)

離散時間フーリエ変換 (DTFT)

Discrete Time Fourier Transformation の略です。

DTFT

になっている。

- 数列（離散信号）$x[k]$ を連続信号 $X(\Omega)$ に変換する。
- この授業では FT も DTFT も同じ $X()$ という関数表記を使うので混乱しないように。
- 通常のフーリエ変換との関係については $X(\omega) \approx T_s X(\Omega)$ と、T_s がスケーリングファクターになっている点にも注意。(これは細かい話なので気にしなくていい。)

もちろん、逆もあります。

IDTFT

- フーリエ級数の式 $C_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$ とそっくりだけど微妙に違うのでまとめて覚えようというときは (特に指数部分の符号に) 注意。

DTFT の練習

問. 次の離散時間信号 $x[k]$ を DTFT し、$X(\Omega)$ を求めよ。

1. $x[k] = \mathbf{1}[k] = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ (離散時間ステップ信号)
2. $x[k] = \begin{cases} a^k & k \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
3. $x[k] = a^{|k|}$
4. $x[k] = \begin{cases} k & k \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

答:

DTFT の性質 (1 of 2)

1. **線型性**

$$ax[k] + by[k] \rightleftharpoons$$

2. **時間反転**

$$x[-k] \rightleftharpoons$$

3. **時間シフト**

$$x[k-m] \rightleftharpoons$$

DTFT の性質 (2 of 2)

4. 周波数シフト

$$X(\Omega - \Omega_0) \rightleftharpoons$$

5. パーセバルの等式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\overline{x[k]} =$$

ミニレポート課題 (提出期間: 本日～次回の授業の前日)

p. 14の練習問題の中から指定されたもののうち 2 つ以上を解け。

解答を PC 文書や手書きで作成し、PDF にして Google Forms (**https://forms.gle/1PdgpYDpnahECqkY6**) から提出せよ (要組織アカウントによるログイン)。ただし写真等の画像ファイルの場合は、解像度や露出・照明状態などを十分考慮し、きちんと読解可能なクオリティのものとすること。スマートフォンの場合はスキャナアプリの類の利用を必須とする。